5. 3. 324

5 S. 3.

Digitized by Google

PHYSICÆ GENERALIS

TOMUS PRIMUS

Digitized by Google

Digitized by Google

PHYSICÆ GENERALIS

METHODO MATHEMATICA

TRACTATÆ

ET IN TRES TOMOS DISTRIBUTÆ

TOMUS PRIMUS

AUCTORE

JOANNE BAPTISTA SCARELLA

CLERICO REGULARI

AD USUM CONGREGATIONIS CLER. REGUL.

BRIXIÆ MDCCLIV.

Typis JOANNIS BAPTISTÆ BOSSINI

SUPERIORUM FACULTATE.

Digitized by Google

Digitized by Google

CLARISSIMO AC NOBILISSIMO VIRO

COMITI DURANTI DE DURANTIBUS

JOANNES BAPTISTA SCARELLA CLERICUS REGULARIS F.

CUm natura comparatum & conſuetudine confirmatum ſit , ut qui librum aliquem publicæ luci ſunt mandaturi ſibi ab aliquo præſtantiſſimo Viro præſidium accerſant , mihi hoc præſertim nunc eſſe faciendum intelligo , cum primum meæ Phyſicæ Generalis Tomum in lucem emitto . Nam

Digitized by Google

qui ſibi maxime eſt conſcius ſe iis carere ornamentis, quibus ſua doctis viris opera commendare poſſit, ei potiſſimum convenit extrinſecus petere, quod ad conciliandum litteratorum favorem ſit profuturum. Id eſt in cauſſa, cur in tuo nomine, Clariſſime Comes, emittam hunc librum Tibique inſcribam, quo ad ipſius apud eruditos commendationem neminem invenire poſſum magis idoneum & accommodatum. Quotumenimquodque in Te deſideratur eorum, quæ ſummum decent Patronum ac Mæcenatem? Si neſcirem apud Te plus valere ornamenta virtutis, quam ullam ſanguinis nobilitatem, ad id comprobandum longam primo texerem ſeriem illuſtrium avorum, qui ut luculenter conſtat ex authenticis monumentis, quæ ex publicis Bergomi & Brixiæ Tabulariis depromta ſunt, uſque ab anno reparatæ ſalutis milleſimo nonageſimo non ſolum has urbes, ex quarum altera Durantum Gens traxit originem, in altera ſedem habet, verum etiam totam Italiam ſeptem fere ſæculorum ſpatio illuſtrarunt. Facere tamen non poſſum, quin ſaltem commemorem, plures ex tuis Majoribus, quoad ibi manſere, ante quingentos annos & amplius ſummum Magiſtratum adeptos fuiſſe; inter quos præſertim memoria dignus eſt Ricemburgus, qui rebus inter Guelphos & Ghibelli-

belli-

bellinos ſuæ Patriæ, cui præerat, compoſitis, exoptatam Italiæ tunc a ſuis filiis miſerandum in modum diſciſſæ pacem promovit: poſtquam vero circa initium ſæculi quinti ſe huc contulerunt, cum domi laude ſcientiæ Juris Civilis & primis Magiſtratibus, tum vero foris ampliſſimis Eccleſiæ Dignitatibus floruiſſe. Adhuc enim celebre eſt nomen Cardinalis Durantis, qui cum eximium prudentiæ, pietatis, moderationis animi, munificentiæ, aliarumque virtutum ſpecimen ab adoleſcentia dediſſet, poſtea difficillimis Reipublicæ Chriſtianæ temporibus in celeberrima cooptatione a Sapientiſſimo Pontifice Paulo III. ſummum honorem & primum Legationem Umbriæ, deinceps Eccleſiæ Brixianæ regimen aſſecutus in obeundis harum Dignitatum muneribus majora in dies atque illuſtriora ſuarum virtutum experimenta præbuit. Nec etiam temporis diuturnitate obſolevit memoria Petri Thermolitani Epiſcopi atque Datarii ipſius patrui, & Vincentii conſobrini pariter Antiſtitis atque Datarii, quos dignitate inferiores, virtute pares Andreas tuus propatruus poſt primos a ſuis civibus ſibi delatos honores nunc Chiſtrenſis Epiſcopus æmulatur. Verum hæc miſſa facio apud Te, qui non ex aliorum pendes virtutibus, ſed ex tuis, nec ex atavorum præclare geſtis, ſed

ex

ex propriis ſingulare tuo nomini decus comparaviſti. Etenim quam parum momenti ad veram gloriam aut in ſanguinis claritate, aut in opum copia eſſe ſtatueris, indicavit a puero magnus ille ardor, quo mirifice incenſus in omne litterarum genus ea felicitate incubuiſti, ut eximiam in poeſi, in arte oratoria, in hiſtoria, in ſcientia Reipublicæ bene gerendæ, in aliiſque facultatibus famam a prima adoleſcentia ſis conſecutus. Argumento ſunt publicæ Academiæ, Cortonenſis & duæ Florentinæ, quæ magno ſibi honori fore duxerunt, ſi Te vix ex ephœbis egreſſum ſocium aſcriberent, omnes Italiæ eruditi, qui tua carmina etruſca lingua conſcripta perinde ac ea, quæ a ſummis Poetis ſunt exarata, ſuſpiciunt, & graviſſimum Sapientiſſimi Regis Sardiniæ, communis litterarum Patroni judicium, qui eadem mox deſideratam ab omnibus aſpectura lucem ſibi dicari non dedignatur. Ad exterorum judicium accedit domeſticum tuorum civium, a quibus quam magni ſias, pluribus iiſque inſignibus teſtimoniis declaratum eſt. Nam quo primo die Tibi ad Civitatis Concilium accedendi eſt facta poteſtas, eodem, tametſi propter ætatem lege præſcriptam nullam etiam tum Reipublicæ partem attigiſſes, Tibi ad ſummum Magiſtratum omnium conſenſu aditus patuit:

tuit :

tuit : qui vix tranſacto legitimo tempore iterum, & nunc cum trigeſimumquintum agis ætatis annum , inaudito prorſus exemplo tertium eſt reſeratus . Præſertim vero quantum Tibi a tuis conterraneis deferretur , perſpectum eſt in tuo clariſſimo reditu ad Patriam , unde annum abeſſe coactus fueras . Siquidem eo die tota Civitas ex ſuis veluti ſedibus evulſa Tibi obviam gratulatum prodiit , & longiſſimo agmine ut alterum Tullium ab exſilio revertentem ad domeſticos lares deduxit . Quæ cum ita ſint , tum ſpero meum conſilium ab omnibus iri probatum , qui ad tantum Patronum ac Mæcenatem confugerim , tum vero futurum confido , ut cum ob ſingulares virtutes auctoritate & gratia apud omnes tam valeas , huic meo libro in tuam clientelam ſe recipienti aliorum favorem concilies . Quod ſi hac ſpe fruſtrabor ob illam cauſſam , quod opus caret omnibus aliis præſidiis , ſine quibus ad hominum gratiam aſpirari non poteſt , illud tamen conſequar , quod mihi potiſſimum in eo Tibi dicando propoſitum eſt , ut perpetuum mei ſingularis erga Te obſequii conſtet monumentum .

D. JO-

D. JOANNES BAPTISTA DE MARI

Præpoſitus Generalis Congregationis Clericorum Regularium.

HOc Opus inſcriptum *Phyſica Generalis methodo Mathematica pertractata* a R. P. D. Joanni Baptiſta Scarella noſtræ Congregationis Theologo compoſitum, & juxta aſſertionem Patrum, quibus id commiſimus approbatum, ut Typis mandetur, quoad nos ſpectat, facultatem concedimus. In quorum fidem præſentes literas manu propria ſubſcripſimus, & ſolito ſigillo firmavimus.

Datum Romæ in Ædibus S. Sil. Montis Quirinalis die 23. Decembris 1752.

(*D. Jo. Baptiſta de Mari Præpoſit. Gen. Cleric. Regular.*

L. ✠ S.

D. Paſchalis Dentice C. R. Segret.

PRÆ-

PRÆFATIO

Centum & amplius ſunt anni, ex quo doctiſſimi viri, jugo Peripateticorum excuſſo, non in Ariſtotelis ejuſque Interpretum libris, ſed, ut res poſtulabat, in ipſomet omnium oculis expoſito libro Naturæ abditiſſima ejuſdem arcana inveſtigare cœperunt. Qua in re quantum profecerint, nemo eſt in Phyſicis tam peregrinus & hoſpes, qui ignoret. Profecto ſi volumina, quæ ab Archimedis temporibus ad Galilæum uſque recentioris Phyſicæ anteſignanum de rebus naturalibus conſcripta ſunt, cum iis, quæ a Galilæi ætate ad hanc uſque diem prodierunt in lucem, comparentur, quiſque facile intelliget, quamquam Archimedes viam, qua eſſet eundum, digito quaſi præmonſtraverit, tamen bis mille annorum ſpatio fere ne hilum quidem Philoſophos in evolutione naturalium effectuum proceſſiſſe, breviori autem centum annorum curriculo Phyſicam eo eſſe perductam, quo illam nemo perventuram ſperaſſet. Verumtamen Recentiorum laboribus atque vigiliis factum non eſt, ut huic præſtantiſſimæ facultati ultima veluti manus impoſita fuerit, ſive in explicatione particularium phænomenorum, quæ ſunt ſubjecta materies illius partis Phyſicæ, quæ Specialis appellatur, quem locum propemodum infinitum exhauriri non poſſe omnes norunt, ſive etiam in explanatione primorum Phyſicæ capitum & generalium motus legum, in quibus evolvendis ea, quæ dicitur Phyſica Generalis, verſatur. Quamobrem qui litteris mandant & emittunt in lucem, quæ ipſi de natura rerum ſunt commentati, non continuo repudiandi ſunt, perinde ac ſi actum agerent, ſed ante videndum quid ſcripſerint, quam explodantur & iis adnumerentur ſcriptoribus, qui novam novis libris lucem rebus non afferunt. Quamquam & eorum induſtria rejicienda non eſt, qui ad minuendos aliorum labores, ea, quæ in tot voluminibus & præſertim in Academiarum Commentariis diſperſa & diſſipata ſunt, & alia aliis methodis, iiſque ut plurimum intricatioribus demonſtrata, in unum veluti colligunt corpus, uno eodemque tenore conficiunt, qua ratione aliud ex alio colligatur oſtendunt, & aliorum inventa in ſuum quodammodo ſanguinem & ſuccum convertunt. Cogitanti autem mihi ea, quæ de rebus Phyſicis plurium annorum ſtudio collegi, dum publicum docendi ſuſtinerem munus, lit-

litteris conſignare, hæc duo fuerunt propoſita. In hoc vero primo Phyſicæ Generalis tomo, quem nunc edo, utrum illud ſim conſecutus nec ne, aliorum erit judicium, quibus fortaſſe novum non videbitur, nec nova ratione confectum, quod mihi in hiſce ſtudiis non ita contrito hujuſmodi apparuit. Unum hoc affirmare poſſum me totis viribus in id incubuiſſe, quo meas elucubrationes ſin minus re, ſaltem animo doctis viris probarem, eamque laudem mererer: *in magnis aliquid voluiſſe ſat eſt*. Quod vero attinet ad methodum, qua in his contexendis ſum uſus, fateor Mathematicam mihi præ ceteris placuiſſe, quæ docet ea præmitti oportere, quorum adminiculo cetera intelliguntur ac demonſtrantur. Hanc enim cum præ aliis in omnes partes valere, tum vero ad ea, quæ ab aliis inventa ſunt, addiſcenda, & ad nova invenienda maxime aptam & accommodatam ſum arbitratus. Nec tamen ita, ut ſit a Geometris, & a Cl. Chriſtiano Wolphio in ſuis de univerſa Philoſophia doctiſſimis libris non ſine multorum reprehenſione fuit uſurpatum, adamuſſim ſervandam duxi, ut ne latum quidem unguem ab eadem diſcedere mihi licere putarem. Magnum eſt enim diſcrimen inter Mathematicas ac Philoſophicas diſciplinas; illæ utpote quæ in una quantitate & in ejus proportionibus, quarum clariſſimas ac determinatas notiones habemus, verſantur, ſimul ac quidpiam ex antegreſſis enuntiationibus preſſe collegerunt, rem omnino cogunt & efficiunt, nec in aliquas incurrunt difficultates, ſine quarum ſolutione id, quo de agitur, funditus intelligi nequeat. At Phyſica aliæque Philoſophiæ partes, quæ per omne rerum genus vagantur, & res etiam vel a noſtris ſenſibus remotiſſimas, vel in profundo naturæ ſinu abditas inveſtigant, nimiis undique tenebris involvuntur, & pluribus iiſque gravioribus difficultatibus ſcatent, quam ut ſicca & jejuna Geometrarum ratione res ſatis explicari queant, & iis, quæ objici poſſunt, non ſolutis animus ſciendi cupidus in ſolis demonſtrationibus acquieſcat. Quamobrem Cicero ſummus non ſolum Orator, ſed etiam, ut iis temporibus, Philoſophus cum in primis Tuſculanarum quæſtionum libris docuiſſet nihil eſſe bonum, niſi quod honeſtum ſit, in quinto autem virtutem ad beate vivendum ſe ipſa eſſe contentam oſtendendum ſuſcipiens ſibi objeciſſet jam id eſſe confectum, & alterum ex altero conſequi, nec ideo ſeparatim eſſe tractandum; ſic propoſitam difficultatem cap. 18. diluere & inter Geometrarum & Philoſophorum rationem tale diſcrimen ſtatuere non dubitavit.

Ve-

Veruntamen Mathematicorum iſte mos eſt, non eſt Philoſophorum. Nam Geometræ cum aliquid docere volunt, ſiquod ad eam rem pertinet eorum, quæ ante docuerunt, id ſumunt pro conceſſo & probato, illud modo explicant, de quo ante nihil ſcriptum eſt. Philoſophi quamcumque rem habent in manibus, in eam quæ conveniunt, congerunt omnia, etſi alio loco diſputata ſunt. Quod ni ita eſſet, cur Stoicus, ſi eſſet quæſitum ſatis ne ad beate vivendum virtus poſſet, multa diceret? cui ſatis eſſet reſpondere ſe ante docuiſſe nihil bonum eſſe niſi quod honeſtum eſſet, hoc probato conſequens eſſe beatam vitam virtute eſſe contentam: & quomodo hoc ſit conſequens illi, ſic illud huic, ut ſi beata vita virtute contenta ſit, niſi honeſtum quod eſt, nihil aliud ſit bonum. Sed tamen non agunt ſic. Nam & de honeſto & de ſummo bono ſeparatim libri ſunt, & cum ex eo efficiatur ſatis magnam in virtute ad beate vivendum eſſe vim, nihilominus hoc agunt ſeparatim; propriis enim & ſuis argumentis & admonitionibus tractanda quæque res eſt. Hactenus Cicero, cujus rationes, uti & paulo ante relatas, expendens in eam veni ſententiam, ut mihi media quadam via putarem eſſe inſiſtendum, quo id, quod in utraque methodo boni eſt, aſſequerer, quod autem mali, vitarem. Hanc itaque perpetuo rationem tenui; ipſas enunciationes ita diſpoſui, ut altera alteri conſequens eſſet, & conſequentes ex antecedentibus conficerem, quo Mathematicæ ſatisfieri putavi: in eas vero, quas accuratius tractari oporteret, multa congeſſi tum ad eaſdem illuſtrandas, tum ad ea, quæ contradici poſſent, refutanda, quo Philoſophicæ ſatis ſuperque morem geri arbitratus ſum. Atque hæc univerſe mihi eſſe præfanda duxi.

Quid vero in hoc primo Phyſicæ Generalis tomo præſtiterim, paucis declarare aggredior. Duas in partes totum hunc librum diſtribuo, in quarum altera de quantitate, in altera de natura, attributis, accidentibus & modis corporum diſſero. Pars I. decem complectitur capita. In primo de natura quantitatis deque illius diviſionibus diſputatur. In ſecundo ad illa omnia, quæ pertinent ad quantitatem, viam mihi munio celebri circa vacui poſſibilitatem quæſtione, in qua mihi videor nodum inveniſſe difficultatis, & ea ſuſtuliſſe de medio, quæ diſſentientes Philoſophos non ſinebant in unam convenire ſententiam. Tertium verſatur in demonſtratione illius enuntiationis, quæ in hac materia, immo in tota Phyſica familiam ducit, *continuum extenſum ex inextenſis componi non poteſt*. In hac autem oſtendenda dum utor quidem communibus argumentis, ſed alia ratione in adverſarios con-

tortis, occaſionem arripio examinandi tum Cavallerii methodum Indiviſibilium, ut quatenus illa aut intelligi, ne principium petamus, aut uſurpari oporteat, ne in palmares incidamus errores, definiam; tum novum quoddam a doctiſſimo Profeſſore Matheſeos P. Buskovikio S. J. excogitatum ſyſtema circa compoſitionem continui. Sequitur quartum caput, in quo mihi illud oſtendendum ſuſcipio eſſe in continuo puncta inextenſa, quemadmodum & lineas latitudinis prorſus expertes, ex iis tamen continuum nequaquam componi. Quia vero omnium tum difficultatum, quibus hic de quantitate continua locus implicatus eſt, tum errorum, qui ſenſim ſine ſenſu irrepſerunt, fons & origo eſt illa communis præjudicata opinio, quod continuum ex partibus re ipſa diſtinctis coaleſcat, qua factum eſt ut fruſtraneum laborem ſuſciperent in inveſtigando, quomodo ex iiſdem partibus componeretur, ad eam convellendam in quinto capite doceo non eſſe in vero continuo partes diſtinctas ut partes, idque ea ratione, quæ tam evidenter colligitur ex eo, quod continuum extenſum ex inextenſis conſtare nequit, ut mirari ſubeat tot præſtantiſſimos Philoſophos, qui hoc alterum communiter amplexati ſunt, non vidiſſe quid inde conſequeretur. Quo conſtituto & hic & alibi disjicio tenebras, quas animis Philoſophantium partes offuderant, & quatenus verum ſit continuum poſſe dividi uſque in infinitum, declaro; atque illud concludo, hiſce partibus exploſis, poſſe diſſentientes Philoſophos in unam convenire ſententiam, quin a ſuis quique principiis revera deſciſcant. Ad eſſentiam vero continui accuratius declarandam ibidem excurro in illum Ontologiæ locum, qui eſt de eſſentialibus, attributis, accidentibus & modis entium, cujus diligenti tractatione opus etiam habeo in conſequentibus ad multa aut conſtituenda aut refellenda, propterea quod ex non ſatis evoluta eſſentiæ notione & diſtinctionis præſertim inter primariam & ſubſtantialem, interque ſecundariam, & accidentalem non paucæ difficultates erroreſque fluxerunt. Ex eo vero, quod hæ partes non ſunt, ſua veluti ſponte fluit ſoliditas extenſi continui, ſive corpuſculorum, quæ proxime a Deo creata ſunt, quam adverſus Cl. Viros P. Lanam atque Molierium in ſexto capite monſtro. Hoc excipit ſeptimum, in quo tribus articulis diſſero de tempore & motu. In primo eam trado motus & loci definitionem, quæ ex ſupra conſtitutis ita evidenter colligitur, ut a nemine, qui fuerit iiſdem aſſentitus, poſſe in dubium revocari credam. Nihilo tamen minus

nus

nus ad eam magis confirmandam ab objectis vindico adverſariorum. In ſecundo diſſeritur de tempore, quod in alia nulla creata re, quam in motu inveniri contendo, indeque anſam arripio clare nitideque explicandi communem illam Recentiorum enuntiationem, qua ponunt velocitatem motus æquabilis unius corporis eſſe æqualem ſpatio percurſo per tempus diviſo, ſive duorum corporum velocitates eſſe in ratione compoſita ex directa ſpatiorum, quæ percurſa ſunt, & ex inverſa temporum, quæ in iis abſolvendis impenduntur. In tertio denique motus & temporis proprietates expendo, & præſertim continuitatem, potentiam diviſionis in infinitum, & inſtantia, quæ in tempore exſtare doceo tamquam principium & finem, non vero tamquam partes, ex quibus tempus componatur. Hinc tranſeo ad caput octavum, in quo mihi oſtendendum ſuſcipio fieri poſſe, ut non ſolum motus omnino continuus alius alio ſit in infinitum velocior, quod majori parti Philoſophantium arridet, verum etiam extenſum prorſus continuum aliud alio ſit in infinitum denſius, quod a communi abhorret Philoſophorum ſententia. Ne ad hujuſce propoſitionis, cujus maximus uſus multis in hoc tomo locis apparet, alioquin evidentes rationes animum Philoſophi adverterent, in cauſſa fuit communis illa præjudicata opinio circa compoſitionem continui, perinde ac ſi ex partibus reipſa diſtinctis conſtaret, & inde petita efficaciſſima ad ſpeciem ratio pro communi opinione, quod partes ſe plus quam proxime contingere nequeunt. Difficultatem autem adverſus noſtram hanc de continui partibus opinationem ductam ex communi ſententia circa tripartitum genus diſtinctionum realium, ex eo, quod hæc diviſio peccare oſtenditur, facile ſolvo capite nono, quod aliarum circa noſtrum de continuo ſyſtema difficultatum ſolutionem complectitur. Longiſſimum omnium hujus primæ partis caput eſt decimum, in quo hæc tria mihi potiſſimum propoſita ſunt, 1 oſtendere nullis certis rationibus effici poſſe exſtare quantitates infinite parvas aut magnas; 2 nullis pariter cogi eaſdem in numero eorum, quæ exſiſtere nequeunt, eſſe recenſendas; 3 declarare qui fieri poſſit, ut quod elicitur adminiculo calculi tum differentialis tum integralis, qui verſatur in quantitatibus infinite parvis, & non raro etiam in infinite magnis, nihilominus certum & exploratum ſit. Fortaſſe nonnullis videbor nimium a ſcopo aberrare, propterea quod non parum immoror in iis ſolvendis, quæ in iiſdem calculis difficultatem facere poſſunt. Verum ſi

 quis

quis animadvertat me ex altera parte ea ſuſcipere examinanda, quæ non Mathematico ſed Philoſopho negotium faceſſere queunt, ex altera vero elicere non pauca, quæ aliunde peti nequirent, & alioquin ad multas Phyſicæ easque magni momenti quæſtiones explicandas neceſſaria ſunt, facile me vacare hac culpa putabit. In hoc primo tomo articulo 4 hujus capitis inſignem detego errorem ceteroquin ſummi Geometræ Euleri, qui ex non ſatis evoluta metaphyſica notione calculi ſummatorii a numero poſſibilium in natura exploſit nonnullas virium centralium hypotheſes, quæ ſi tales forent, ac ipſe putat, magnam ipſe idem calculus plagam acciperet. Articulo ſexto tranſitum quantitatis a finita ad infinite parvam aut magnam perfici oſtendo per converſionem ejuſdem ab alio ad alium ſtatum, ideſt ab ajente ad negantem & a negante ad ajentem, quod unum mihi in altera hujus tomi parte viam munit ad explicandas leges motuum in corporum durorum colliſione, & ad totam corporis naturam penitius noſcendam, atque in altero tomo ad enodandas quamplures virium centralium difficultates. Articulo 7 explano diverſos infinitorum aut infinite parvorum ordines, & quatenus aliqua quantitas intelligi debeat eſſe infinite parva aut magna 1', 2', 3' &c. gradus, quæ multas in partes hic valere oſtendo, & multo magis oſtendam ſecundo tomo, cum plures eoſque primo adſpectu inextricabiles nodos in virium attrahentium negotio hujus ope theoriæ ſolvemus. Ne longum faciam, mitto alia, ex quibus apparere poteſt hunc a Philoſopho laborem fruſtra non ſuſcipi, & hoc unum addo me ob eaſdem rationes articulo octavo inveſtigare naturam quantitatum, quæ affirmantes dicuntur atque negantes, reales & imaginariæ, & rationem regularum, quas in iis ſubducendis obſervare neceſſe eſt; quo loco tum doceo fieri non poſſe, ut methodis uſurpari ſolitis radix vera aliquarum tertii gradus æquationum eliciatur, tum contra Nicolaum de Martino contendo quantitates imaginarias in nullo ſtatu eſſe poſſibiles.

Atque his finem impono I. Parti hujus libri; inde accedo ad ſecundam, quæ pariter decem capitibus continetur. Primum agit de primitiva & ſubſtantiali corporum eſſentia, quam eſſe poſitam in una extenſione ex iis, quæ de continui natura in anteceſſum conſtituta fuerunt, colligo adverſus Leibnitium, Muſſchenbroechium, Dominam *Du Chaſtellet*, aliosque Cl. Philoſophos, atque ab eorum objectis cum hic, tum ve-

ro

ro multo luculentius in conſequentibus vindico. Secundum enumerat corporis attributa, in quorum cenſu, tametſi Philoſophi alii diſſentiunt, ponendam eſſe primitivi cujuſque corpuſculi figuram ex iis, quæ de continuo partibus non conſtante deque illius ſoliditate in ſuperioribus ſunt diſputata, evidenter efficiò. In tertio capite perſequor corporum accidentia; qua in re primum contra Carteſii aſtipulatores ſtatuo id, quod in toto virium negotio magnum habere momentum comperiemus, præter illam relationem ſucceſſionemque, in qua natura motus poſita eſt, in corporibus exſtare aliquod abſolutum & permanens, quod ſit cauſſa motus quodque dicitur vis, atque id probo rationibus ex intimiori Philoſophia petitis. Tum adverſus aſſeclas Cl. Virorum Leibnitii & Wolphii iis momentis, quæ rem cogere & efficere mihi videntur, planum facio vires, quæ ſunt cauſſa motus effectrix, cum eſſentia corporis primitiva neceſſario copulatas non eſſe, ſed eidem jam abſoluto & perfecto extrinſecus accidere. His mihi viam munio ad obſcuriſſimum in Phyſicis locum, qui eſt de preſſionibus, ex quarum fluxu vires motrices exſiſtunt, illudque præſertim mihi oſtendendum capite 4. propono, nullas in hac rerum univerſitate exſtare poſſe puras preſſiones ſine viribus vivis, ut ajunt, & illas ab his ſolum tamquam terminos & modos ſecerni, quemadmodum ſuperficies a ſolido, ſine quo eſſe non queunt, diſtinguuntur. Quod cum tracto & ab objectis vindicare nitor, multa declaro ad plures Phyſicæ intricatas quæſtiones ſolvendas maxime neceſſaria, uti modum, quo vires generantur, aut ſe viciſſim elidunt, celebrem illum & a Cl. Viris tractatum locum de infinita vi percuſſionis ratione habita gravitatis, poſſibilitatem perfecti æquilibrii, & alia non pauca. Succedit caput quintum idque longiſſimum omnium, quæ in hac altera Parte continentur. Ipſis novem articulis ad examen revoco celeberrimam illam de virium æſtimatione quæſtionem, de qua non ſolum doctiſſimi Geometræ & Phyſici, verum etiam integræ nationes digladiantur. Primam rationem in ſententiam Leibnitii, quam ſequor, articulo primo explicatam peto a Bernullio, ſive ab obliquo corporis in planum immobile incurſu, ſed illam magis urgeo aliterque contorqueo, ut ex iis, quæ hic & ſupra a me conſtituta ſunt, facilem claramque ſolutionem eliciam eorum, quæ a præſtantiſſimis viris Fontenello, Mairano, & Deidierio ad

Bernullianam contradicta fuerunt. In ſecundo idem confirmo nova quadam ratione a priori, quæ toti huic loco maximam affert lucem, quæque in eo poſita eſt, ut vis motrix ſive ſumma preſſionum, ex quarum fluxu vis intelligitur generari, productum ex quantitate preſſionis in velocitatem, qua fluit, & in tempus, quo durat fluxus, exæquet. In ſcholio adnexo alium valde obſcurum locum examino, & doceo novas, quæ in corpore oblique in alterum incurrente exſiſtunt, directiones ante incurſum in eodem nequaquam exſtare. Ex iis vero, quæ hiſce duobus articulis conſtituuntur, facilem eruo reſponſionem ad multa, quæ ab Adverſariis Leibnitii objecta fuere. His addo articulis 4. & 5. rationes a Carteſianis ductas ex deſcenſu corporum gravium ſive rectilineo, ſive per curvas, & monſtro parum eſſe momenti in reſponſionibus Hermanni & Bulfingeri, & ſummam quæſtionis dijudicari non poſſe Analyſis calculo, qui omnes in partes verſari poteſt pro qualitate formulæ, a qua ſumit initium, ſed ad eam definiendam cum in multis Matheſeos ac Phyſicæ capitibus, tum in hac re formulam ipſam expendi oportere, utrum ſcilicet ſumma virium mortuarum in motu æquabiliter accelerato ſit productum ex preſſione ſive ex vi mortua in ſpatium, an vero in tempus. Cum autem qui Leibnitii partes ſequuntur, arcem Leibnitiani ſyſtematis in actione elaſtrorum in corpora poſuerint, rationes a Joanne Bernullio & a Muſſchenbroechio inde petitas ſexto articulo profero in medium, ad quas quid contradici poſſit a Carteſianis, articulo ſequenti declaro, ita ut perſpicuum fiat iis Leibnitianam virium æſtimationem non effici, niſi alio modo urgeantur. Id quod ope eorum, quæ articulo ſecundo conſtituta fuerunt, exſequor articulo octavo, in quo prius demonſtratis motuum legibus in hujuſmodi elaſtrorum actionibus, ſuperiora magis magiſque confirmo, & ſimul ſatisfacio argumentis, quæ ex deſcenſu corporum gravium adverſus Leibnitium a Carteſianis ducuntur. Reſtat nonus articulus, in quo agitur de virium compoſitione in ſententia virium vivarum, & poſita noſtra virium æſtimatione plures diſſolvuntur nodi, qui poſita Carteſiana inextricabiles ſunt, & præſertim in qualibet duarum virium compoſitione adminiculo celerioris aut tardioris fluxus preſſionum, quem eſſe in hoc negotio attendendum ſupra ſtatuimus, æqualitas inter effectum & cauſſam clariſſime demon-

ſtra-

ſtratur : quo uno fit, ut Leibnitianæ ſententiæ & rationibus, quæ a nobis proferuntur, multum accedat momenti.

His conſtitutis venio ad ſolutionem maximæ difficultatis adverſus Leibnitii ſententiam, ductæ ex colliſione corporum perfecte durorum, qua una Carteſianam virium æſtimationem tam evidenter effici putant ejuſdem ſectæ patroni, ut Leibnitii ſectatoribus adverſus prima principia pugnandum eſſe arbitrentur, quo rationibus inde concluſis occurrant. Qua in re dum vires ingenii capite ſexto contendo, in veram, ut mihi quidem videtur, incurro communicationis virium theoriam, ſumtam ex viribus corporum attractricibus, quæ cum in contactu infinitæ fiant, in repellentes abeunt eaſque infinitas, qua non ſolum argumentis Carteſianorum fit ſatis, ſed etiam plura oſtenduntur, 1. per ſolam impulſionem tamquam cauſſam effectricem ſine hiſce viribus attrahentibus & repellentibus vis communicationem haud poſſe fieri, 2. leges motuum, quales ab omnibus admittuntur, ſine ullo ſententiæ Leibnitianæ detrimento, 3. æquilibrium corporum, quæ appenduntur ex vectis extremis, 4. in colliſione corporum perfecte durorum ſervari principium continuitatis, in cujus gratiam Leibnitiani corpora perfecte dura e poſſibilium numero expunxerant, 5. origo impenetrabilitatis & vis inertiæ, quas ab omnibus admiſſas invenimus, a nemine demonſtratas, & quod attinet ad vim inertiæ, nec ſatis explicatam, 6. demum magis perfecta & abſoluta naturæ corporis deſcriptio, qualem expetivit magnus Leibnitius, quæ principium actionum & paſſionum ſive mutationum omnium, quæ obſervantur in corporibus, contineret. Cumque mihi poſtquam hæc excogitaveram, innotuiſſet Principium Minimæ Actionis, ex quo Cl. Maupertuiſius leges communicationis motus in colliſione corporum tum durorum tum elaſticorum, nec non æquilibrii legem mira facilitate deduxit, confero meum Principium cum hoc, & utrum præſtet, oſtendo.

Paucioribus expedio difficultatem alteram, quam doctus quidam auctor Diſſertationis Veronæ impreſſæ pro Carteſii ſententia deduxit ex colliſione duorum corporum elaſticorum, quæ in tertium quieſcens & pariter elaſticum eodem tempore incurrerent. Cum enim leges in trium corporum elaſticorum conflictu nondum ſint definitæ, immo Eulerus & laudatus auctor aliique in iis explicandis erraverint, eas primum capi-

te ſeptimo aliqua ex parte conſtituo, indeque ſolutionem elicio propoſitæ difficultatis.

Quo cogitaram finem imponere huic diſputationi, & ſimul priori tomo, qui ob ea, quæ hactenus commemorata ſunt, in ſatis magnam molem excreſcere poterat. Verum tres recens editi libri in hanc rem me veluti a portu in altum revocant. Primus, qui inſcribitur *Dialogo intorno alle Forze Vive*, editus eſt Bononiæ an. 1749. a Cl. Matheſeos Profeſſore P. Vincentio Riccati S. J. qui Leibnitii ſententiam adeo luculenter exquiſiteque defendit, ut multos in Italia etiam tum hæſitantes confirmarit, alios etiam a Carteſii caſtris ad Leibnitiana traduxerit. Quamvis autem quod attinet ad ſummam quæſtionem, mihi cum eo conveniat, tamen hujus libri examen mihi eſſe ſuſcipiendum video tum ad oſtendendum me actum non agere, tum ad aliquas Operis partes ex meis principiis magis magiſque confirmandas, tum ad alia nonnulla, in quibus mihi cum eo cauſſa communis eſſe non poteſt, indicanda. Examen cap. 8. diſpertio in 5. articulos, in quorum primo ex iis, quæ in anteceſſum conſtituta ſunt, colligo adverſus Buskovikium, quem laudat Riccatus, quid ſit intelligendum nomine vis, cujus menſuram hic quærimus, adverſus autem Riccatum vim inertiæ eſſe eamdem ac vim motricem, preſſiones puras in hac rerum univerſitate non poſſe conſtare, & veram cauſſam, cur globus intra virgulam aquæ ſalientis poſitus alicubi quieſcat, alicubi vero deſcendat, illam non eſſe, quam auctor propoſuit. Cum vero Cl. Zanottus in Commentariis Academiæ Bononienſis nonnulla ſtatuiſſet adverſus Bernullianam elaſtrorum theoriam, & auctor Zanotti theoremata multis rationibus exploſiſſet, ad id confirmandum in ſecundo articulo meam ego quoque ſimbolam confero. Leibnitianis autem digladiantibus cum Carteſianis in ea quæſtione, an cum agitur de ſubducenda actione elaſtrorum, ſit habenda temporis ratio, nec ne, his ajentibus, illis abſolute negantibus, quorum cauſſam Riccatus multis ad ſpeciem efficacibus rationibus defendere nititur, ex meis principiis litem jam eſſe dijudicatam articulo tertio facio perſpicuum, & ajo non ſolius temporis durationis preſſionum, quemadmodum Carteſii ſectatores perperam volunt, ſed etiam velocitatis, qua fluunt, ſubducendam eſſe rationem; ut Carteſiana actionum menſura peccet quidem, ſed non ob eam rationem, quam eorum afferunt Adverſarii, quia

com-

computet tempus, quo elaſtra ſe exerunt, bene vero quia manca eſt, cum ſolum tempus ſubducat, & negligat fluxus preſſionum celeritatem; Leibnitiana autem, quæ actionem vult æqualem producto ex preſſione in ſpatium, vera quidem ſit, ſed non quia tempus prorſus ſit explodendum, ſed quia ſpatium inter ab elaſtris confectum & productum ex celeritate, qua preſſiones fluunt, in tempus, quo durat fluxus, æqualitas intercedit. Quod cum in ſuperioribus jam oſtenderim multis in eventibus uſuvenire, nunc in uno nondum examinato, in quo Leibnitiani magnam vim faciunt, demonſtro. Ex quibus contra Riccatum elicio quæſtionis cardinem in eo non verti, utrum vires & actiones ſint computandæ in ratione temporum, an in ratione ſpatiorum, ſive cum in motibus acceleratis ſint jam conſtitutæ communi Phyſicorum calculo duæ notiſſimæ formulæ, altera $f\,dt = m\,dv$ exprimens tempora, in qua f exprimit preſſionem, dt tempuſculum, m maſſam corporis moti, & dv incrementum velocitatis; altera $f\,ds = m\,v\,dv$ exprimens ſpatium, cujus elementum eſt ds; utra ex his formulis idoneam menſuram virium & actionum, & ideo etiam effectuum complectatur. Nam contra ipſum, qui ſolam ſecundam putat hujuſmodi, utramque eſſe idoneam ex iis, quæ ſunt diſputata, concludo, ſi modo utramque convenienter naturæ utriuſque uſurpemus. Arcem Riccatiani ſyſtematis conſtitutam in compoſitione virium earumque reſolutione quarto articulo expendo, eamque multis illuſtrare conor, quemadmodum & rationem a priori, cur in qualibet compoſitione virium ſit æqualitas inter effectum & cauſſam, quam dedi articulo 9. capitis quinti. Ex colloquio noni diei, quod articulo quinto examinandum ſuſcipio, illam unam excerpo rationem, quam a Cl. Jurino ductam ab elaſtro, quod cum navi mota conjungitur, in globum ſecundum navis directionem ſe explicante, & tanta fiducia prolatam, ut omnem Leibnitianorum nationem ad eam provocet diluendam, nec ſatis ab aliquo Leibnitianorum refutatam Riccatus, excogitata ſubtiliter motus tranſlati theoria, quam a Domina *Du Chaſtellet* eodem fere tempore & in eumdem finem invenio adumbratam, convellere nititur, & novam illius ſolutionem ex meis principiis elicio.

Alter ex libris, qui me longiorem, quam putaram, curſum tenere coegerunt, eſt Diſſertatio Cl. Anonymi Angli, qui putat

tat hanc controverſiam ſe poſſe dirimere, dum hæc probare contendit, hanc litem eſſe de nomine, & hic non de poſſeſſione, ſed de terminis inter Philoſophos diſputari, eſſe in ipſorum arbitrio quam quiſque voluerit, nomini vis vivæ poteſtatem ſubjicere, & ad aſſumendam pro libito, non vero probandam, ut aliis videtur, vis motricis finitionem nunc Carteſianis litem eſſe adjudicandam, nunc Leibnitianis, & denique utramque menſuram explicandis naturæ phænomenis motuſque legibus eſſe accommodatam. Ad hæc refutanda, quæ ſi vera eſſent, univerſum laborem hunc fruſtra a me ſuſcipi evincerent, rem altius peto, & ex penitiori Logica tracto quæſtionem, utrum & quando definitionibus tamquam certis & exploratis principiis ad alia inde inferenda uti poſſimus, ex reconditiori autem Ontologia depromo duas eſſe quantitatis menſuras, alteram generalem, alteram vero particularem, idque exemplis declaro Geometriæ. Ex his una cum iis, quæ in ſuperioribus conſtituta ſunt, evidentem eruo ſolutionem eorum, quæ a laudato auctore prolata ſunt, & inter cetera doceo, menſuram virium non pura definitione contineri oportere, ſed eſſe rationibus definiendum, in quonam poſita ſit, & generalem, quæ ad omnes eventus & ad omnia naturæ phænomena ſit accommodata, eſſe illam, quam ſupra ſtatuimus, æqualem producto ex preſſione in celeritatem, qua fluit, & in tempus, quo fluxus durat. Quod cum exſequor capite 8. hactenus diſputata luculenter illuſtro & confirmo.

Tertium Opus editum eſt a Cl. Franciſco Maria Zanotti adverſus Leibnitii ſententiam, præſertim contra Riccatum, qui nonnulla ab eodem in Commentariis Academiæ Bononienſis propoſita identidem carpſerat. Hujus Operis in tres libros diſtributi examen capite X. & ultimo inſtitutum in tres conſero articulos, in quorum primo hæc tria potiſſimum nitor oſtendere; 1. quamvis aliqua ſit apud Leibnitianos in definiendo quid nomine vis vivæ intelligi velint, loquendi obſcuritas & inconſtantia, tamen in dubium vocari non poſſe quid ſit intelligendum; 2. puras potentias, ut vocat Zanottus, ſive preſſiones, ut nos, ſine vi viva ex earum genita fluxu non poſſe conſtare ob aliam rationem diverſam ab iis, quas in anteceſſum protulimus, ex intimiori Metaphyſica, quæ homini eſt in deliciis, depromtam; 3. in tria vis motricis elementa a nobis diſtincta, quantitatem preſſionis, velocitatem, qua fluit,

&

& tempus, quo fluere pergit, illa omnia convenire, quæ in elementa, ex quibus quantitas aliqua exſiſtere ponitur, cadere debere in expendenda methodo Indiviſibilium oſtendimus. Quo noſtræ rationi in Leibnitianam virium æſtimationem inde petitæ maximum pondus accedit. Cum autem in ſecundo libro duo præſertim ſibi oſtendenda propoſuiſſet Zanottus, alterum eſſe falſam conſtitutam a Bernullio, & ab aliis qua Leibnitianis qua Carteſianis adoptatam elaſtrorum theoriam; alterum falſam eſſe quoque legem continuitatis, & ideo nullam adverſus corporum perfecte durorum poſſibilitatem rationem, quam inde Leibnitiani duxerunt; ad primum ſubtiliſſimas hominis rationes ſecundo articulo diluere conor, & eamdem magis magiſque firmare ex meis principiis & præſertim ex diſtinctione inter intenſionem preſſionis ipſius per ſe conſideratæ, interque velocitatem, qua fluit; ad ſecundum vero, interim ſepoſita illa quæſtione, an ea lex neceſſaria ſit in natura, in examinandis legibus colliſionis corporum perfecte durorum confici adverto legem hanc in hoc negotio obſervari. Cum denique tertio libro Zanottus ipſam Riccatiani ſyſtematis arcem, chordarum elaſticarum actionem aggrediatur, ejuſdem ſubtiliſſima argumenta, quatenus habent aliquid contra noſtras rationes momenti, refuto, multaque ex ſuperioribus arrepta occaſione confirmo, atque illud præſertim, quod in ſolo Leibnitiano ſyſtemate obſcuriſſimus compoſitionis virium locus intelligi ac declarari, & Principium æqualitatis inter effectum & cauſſam ſervari poteſt. Atque hoc pacto ultimam impono manum huic primo tomo, quem, ſi Deus dabit, ſecundus jam abſolutus, & tertius non ſolum inchoatus, ſed magna ex parte informatus mox ſubſequentur.

NOI

NOI RIFORMATORI
Dello Studio di Padova.

AVendo veduto per la Fede di Reviſione, ed Approvazione del P. *F. Giacinto Maria Marini* Inquiſitor Generale del Sant' Officio di Breſcia nel Libro intitolato: *Phyſicæ Generalis methodo Mathematica tractatæ Tom. I. Auctore Jo. Baptiſta Scarella C. R.* non v' eſſer coſa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimente per atteſtato del Segretario noſtro, niente contro Principi, e buoni coſtumi, concedemo Licenza a *Giambatiſta Boſſini Stampatore in Breſcia*, che poſſi eſſere ſtampato, oſſervando gli ordini in materia di Stampe, e preſentando le ſolite Copie alle Pubbliche Librerie di Venezia, e di Padova.

Dat. li 20. Novembre 1753.

{ *Gio. Emo Proc. Rif.*
{ *Marco Foſcarini Cav. Proc. Rif.*
{ *Alviſe Mocenigo q.° Cav. Proc. Rif.*

Regiſtrato in Libro a carte 30. al numero 211.

Gio. Girolamo Zuccato Seg.

Adì 3. Dicembre 1753.
Regiſtrato nel Magiſtrato Eccellentiſſimo degli Eſecutori contro la Beſtemmia.

Alviſe Legrenzi Seg.

ELEN-

ELENCHUS
CAPITUM ET ARTICULORUM

PARS PRIMA

De Quantitate.

CAPUT PRIMUM

De Natura quantitatis ejuſque diviſionibus. pag. 3

CAPUT SECUNDUM

Explicatur quid ſit vacuum & ejus poſſibilitas monſtratur. 5

CAPUT TERTIUM

Continuum extenſum ex inextenſis componi non poteſt. 18

CAPUT QUARTUM

In extenſo ſunt puncta & lineæ, quibus tamen non conſtat. 40

CAPUT QUINTUM

Omnes continui partes non ſunt actu diſtinctæ ut partes, & de diviſione continui. Excurritur in illum Ontologiæ locum, qui eſt, de eſſentialibus, attributis, accidentibus & modis Entium. 47

CAPUT SEXTUM

De ſoliditate continui extenſi. 107

CAPUT SEPTIMUM

De tempore & motu. 110

ARTICULUS I.

Diſſeritur ſpeciatim de motu. ibid.

ARTICULUS II.

Diſſeritur ſpeciatim de tempore. 120

ARTICULUS III.

De continuitate motus & ejuſdem in infinitum diviſibilitate. 138

CAPUT OCTAVUM

Continuum poteſt eſſe aliud alio denſius in infinitum. 147

CAPUT NONUM

Solvuntur argumenta contra noſtram de continuo ſententiam. 155

CAPUT DECIMUM

De quantitatibus infinite magnis & parvis. 163

ARTICULUS I.

Nulla evidenti ratione hactenus monſtratum eſt poſſe exſiſtere aut deſignari quantitates infinite parvas. 165

AR-

ARTICULUS II.

Objecta adverſus calculum differentialem. Exponitur ſententia Wolphii & Corradi circa infinite parva; alia proponitur. 172

ARTICULUS III.

De aliis nonnullis, quæ difficultatem facere poſſunt in calculo differentiali. 188

ARTICULUS IV.

De nonnullis, quæ in calculo integrali difficultatem facere poſſunt. 213

ARTICULUS V.

De calculo exponentiali & difficultatibus, quæ in ipſo occurrunt. 235

ARTICULUS VI.

De calculo differentio-differentiali & difficultatibus, quæ in eo occurrunt. 247

ARTICULUS VII.

Nulla evidenti ratione probari poteſt repugnare quantitates infinite magnas aut parvas. 253

ARTICULUS VIII.

De quantitatibus poſitivis & negantibus, realibus & imaginariis. 270

PARS SECUNDA

De Natura ſive eſſentia, attributis, modis, & accidentibus omnium Corporum. 285

CAPUT PRIMUM

De eſſentia corporis in genere. ibid.

CAPUT SECUNDUM

De Attributis Corporis in genere. 307

CAPUT TERTIUM

De Accidentibus & modis Corporis in genere. 310

CAPUT QUARTUM

De Preſſionibus & Viribus, & quod puræ preſſiones ſine viribus exſiſtere non poſſunt. 324

CAPUT QUINTUM

De virium æſtimatione. 338

ARTICULUS I.

Prima ratio, qua efficitur vires eſſe ut quadrata velocitatum. ibid.

AR-

ARTICULUS II.

Secunda ratio, qua idem monſtratur. 357

ARTICULUS III.

Quædam objecta adverſus ſententiam Leibnitii. 372

ARTICULUS IV.

De objectis, quæ ducuntur ex aſcenſu & deſcenſu gravium. 378

ARTICULUS V.

Continuatio ejuſdem argumenti. 395

ARTICULUS VI.

De actionibus elaſtrorum in corpora & de rationibus inde petitis a Bernullio & Muſſchenbroechio pro Leibnitiana ſententia. 400

ARTICULUS VII.

De actionibus elaſtrorum in corpora. Bernullii & Muſſchenbroechii rationibus quid contradici poſſit a Carteſianis. 407

ARTICULUS VIII.

Continuatio ejuſdem argumenti de actione elaſtrorum in corpora; ſtabilitur ſententia Leibnitii, & reſponſa Carteſianorum infirmantur. 415

ARTICULUS IX.

De virium compoſitione in ſententia virium vivarum. Expenditur ſententia Fontenelli & P. Riccati. 434

CAPUT SEXTUM

De objectis, quæ ex colliſione corporum perfecte durorum adverſus Leibnitii ſententiam ducuntur, & de vera cauſſa communicationis motus deque legibus colliſionis hujuſmodi corporum. 445

CAPUT SEPTIMUM

De objectis, quæ ex colliſione corporum elaſticorum adverſus Leibnitii ſententiam ducuntur, & de legibus motuum, cum duo corpora elaſtica in tertium incurrunt. 488

CAPUT OCTAVUM

Expenditur liber Cl. P. Vincentii Riccati de viribus vivis. 493

ARTICULUS I.

De ſermone habito primo die. ibid.

ARTICULUS II.

De ſermone habito tertio die. 500

ARTICULUS III.

De ſermone habito quarto & quinto die. 506

ARTICULUS IV.

De ſermone habito ſeptimo die. 511

AR-

ARTICULUS V.

De ſermone habito nono die. 521

CAPUT NONUM

Exponitur nova quædam ſententia Anonymi Angli circa virium æſtimationem, & refellitur. 525

CAPUT DECIMUM ET ULTIMUM

Expenditur opus Cl. Zanotti de viribus vivis. 542

ARTICULUS I.

Expenditur primus liber. ibid.

ARTICULUS II.

Expenditur ſecundus liber. 557

ARTICULUS III.

Expenditur tertius liber. 567

PHYSICÆ GENERALIS.

CUM Phyſica in Generalem atque Particularem diſtribui ſoleat, nomine Phyſicæ Generalis, quam nunc aggredimur, Philoſophi volunt eam Phyſicæ partem, quæ cum naturam & eſſentiam contemplatur corporis, & proprietates, quæ in omne corpus conveniunt, cum primarias atque præcipuas corporum ſpecies, & ea quæ in eaſdem cadunt, perſequitur. Nomine vero ſpecialis intelligunt illam, quæ in contemplatione verſatur corporum individuorum. Ut natura corporis in genere, qua internoſcitur a ſpiritibus, ejus ſoliditas, figura, vires, motus, & quies, corpora conſiſtentia & fluida, dura, mollia, & elaſtica, aliaque id generis ſunt Phyſicæ Generalis ſubjecta materies: At aerem, ignem, aquam, animalia, & plantas, aliaque hujuſmodi ſpecialis Phyſica ſibi vindicat. Id tamen non prohibet quominus in Generali quædam prælibent, quæ pertinent ad Specialem, & contra de aliis, quæ ſunt Generalis propria, ſibi integrum ſervent, cum ad ſpecialem venerint, propterea quod aliquando illud poſtulent methodi leges, quæ potiſſimum cordi eſſe debent, quæque præcipiunt ut ea præmittantur, per quæ cetera intelligi & confici poſſint. Equidem Phyſicam Generalem quatuor libris complectar, in quorum primo de natura, attri-

Digitized by Google

butis, & accidentibus, quæ in corpus omne conveniunt, diſſeram, altero perſequar leges motuum generales, tertio præcipuas corporum ſpecies percurram, quarto demum de legibus motuum ſpecialibus diſputabo.

LIBER PRIMUS.

Phyſicæ Generalis

CUm vero natura, & proprietates corporis in genere ſatis intelligi non poſſint ſine cognitione eorum, quæ pertinent ad quantitatem, præſertim continuam ſive permanentem ſive ſucceſſivam, iccirco ante de his tractabo, quam ad corpus propius accedam, atque hunc librum in duas diſtribuam partes, in quarum altera mihi propoſitum erit diſſerere de quantitate, in altera vero de natura corporis univerſim, deque attributis & accidentibus, quæ in omnia corpora cadunt.

PARS PRIMA

De Quantitate.

IN hac vero prima parte vires omnes ingenii contendam, quod & multas habet intricatiſſimas difficultates Philoſophiæ cum Matheſi communes, & multum in iis momenti eſt ad perfectam rerum cognitionem, quæ ad utramque pertinent facultatem. Quamquam autem hic locus fere a nullo Philoſophorum ſit prætermiſſus, ut multis non temere videri poſſit nos actum agere, & inculcare ea, quæ ſexcentis libris ſunt diſputata, ſpero tamen ea me prolaturum in medium, quæ hanc operam non ſine cauſſa mihi eſſe ſuſceptam evincent. Quod non arroganter dictum exiſtimari velim, ſed ut eorum ſtudia retineam, qui ab iis, quæ ſunt recocta, legendis nimium abhorrent. Hanc ob rem, & inanes quaſdam ac futiles Ariſtotelæorum quæſtiones vitabimus, & in eas, quæ in Phyſicis, & Mathematicis magno nobis uſui eſſe poterunt, totis viribus incumbemus. Cumque & Mathematicæ diſciplinæ, tametſi certiſſimæ ſint, impugnari poſſint, & revera ab aliquibus impugnatæ fuerint, iis ſatisfacere contendemus, quod totum fere a Profeſſoribus Matheſis omittitur. Plures etiam methodos quibus in hac ſcientia res confici ſolent, & præ-

præſertim eam, quæ vocatur Infinite Parvorum, ad examen vocabimus, quatenus intelligi debeant oſtendemus, & quæ notiones imaginariæ in iiſdem occurrunt , & ideo veritati negotium videntur faceſſere , ad reales traducemus . Ceterum hic de omnibus quæ ad quantitatem redigi quoquo modo poſſunt, tractabimus , de vacuo ſcilicet , de extenſo , de numero , de ſpatio , motu ac tempore .

CAPUT PRIMUM

De natura quantitatis ejuſque diviſionibus .

§ 1 Definitio

QUid ſit autem quantitas univerſim inſpecta facilius eſt intelligere quam verbis complecti . Verum mea ſententia eſt, ejus notionem generalem ex unitate ortum ducere, tametſi hæc in aliquas difficultates, quas infra expendemus, incurrat. Quamobrem cum præter unam aliquam rem alia etiam aut aliæ quoquo modo a priori diſtinctæ conſiderantur, in nobis exſiſtit idea quantitatis , quæ in omnem quantitatis convenit ſpeciem. Unde quantitas definiri poteſt plurium rerum conjunctio ſive multitudo, quocumque modo eædem diſtinctæ ſint.

§ 2 Definitio

Qua definitione compertum fit in qualibet quantitate duo reperiri , plures ſcilicet res , quæ vocantnr partes , tametſi hoc partium vocabulum, ut infra oſtendemus, in omnes quantitatis ſpecies non quadret, & conjunctionem, ſive modum, quo eædem res ſive partes copulantur. Ex utroque autem capite plures nobis oriuntur quantitatis diviſiones . Nam primo ſi ad partium qualitatem attendamus, vel hæ ſpatium occupant , ideſt aliæ in aliis locis ſunt, vel non. Si ſpatium complent , naſcitur quantitas extenſa , ſin minus , inextenſa . Quamobrem quantitas extenſa illa eſt , cujus partes ſpatium occupant , ſive ita ſunt in loco ut aliæ alium locum teneant ſinguliſque partibus ſingulæ loci partes reſpondeant . Ita ſunt corpora & motus etiam eorumdem; inextenſa vero cujus partes locum non occupant . Ita eſt multitudo plurium ſubſtantiarum ſimplicium.

§ 3 Definitiones

Rurſus extenſæ quantitatis partes , nam de inextenſa parum ſolliciti ſunt tum Philoſophi tum Mathematici, vel in loco ſunt

ſimul & uno eodemque tempore, vel alia tantum poſt aliam ita ut jugiter fluant, & aliæ intereant dum aliæ naſcuntur. Quantitas extenſa ſimultanea dicitur, cujus partes omnes ſpatium occupantes eodem tempore ſimul conſtant, cujuſmodi ſunt corpora. Quantitas ſucceſſiva extenſa, cujus partes ſunt quidem in diverſis locis, at non ſimul, ſed aliæ aliis ſuccedunt. Talis eſt corporum motus.

§ 4 Definitiones

Sin autem attendamus ad modum quo partes copulantur, aliæ quantitatis extenſæ ſpecies exſiſtunt. Nam ſi ita invicem copulentur ut ſingulæ poſſint ſeorſim conſtare, quantitas inde coalita diſcreta appellabitur. Cujuſmodi eſt multitudo lapidum ex quibus domus componitur. Indiſcreta autem quantitas eſt, e qua nulla pars detrahi poteſt, quin omnes intereant. Hæc autem dicitur etiam quantitas continua. Talis eſſe naturæ ſingula primitiva corpuſcula, quæ proxime a Deo creata fuerunt, ſuo loco oſtendemus.

§ 5 Definitiones

Diſcretam autem in duas alias partimur, in eam ſcilicet quæ proprie & mathematice numerica eſt, & in eam quæ improprie & quatenus vulgo accipitur. Altera eſt quantitas diſcreta cujus omnes partes penitus ipſæ inter ſe ſimiles & æquales ſunt, adeo ut nullum aliud inter ſingulas diſcrimen interſit niſi eorum, quæ rem individuam faciunt, quæque pronominibus ſingularibus *hic*, *ille*, *iſte* &c. ſignificantur. Hujuſmodi eſt multitudo nummorum aureorum ejuſdem ponderis, figuræ, extenſionis, quique non differant niſi determinationibus ſingularibus, uti locis in quibus reperiuntur. Quantitas vero numerica improprie ea eſt, cujus partes alio differunt quam ſolis attributis quæ rem individuam faciunt, uti eſt multitudo lapidum figura, magnitudine, aliiſque qualitatibus præter ſingulares diſcrepantium. Verum tamen eſt, quod ſi ad vivum reſecemus vulgarem quantitatis diſcretæ & numericæ ideam, aliquomodo cum propria & mathematica congruere videbimus. Nam cum homines vulgo res inter ipſas diſcrepantes ad eamdem quantitatem diſcretam ſuis notionibus redigunt, eorum quæ in iis alia atque alia ſunt, rationem habere nequaquam videntur, ſed eorum tantummodo, quæ eadem & ſimilia eſſe cognoſcunt. Hinc homines cum brutis quantitatem diſcretam & numerum faciunt quatenus animalia ſunt, in quo conveniunt, cum plantis quatenus corpora vi-

viventia, cum lapidibus quatenus corpora , cum Angelis quatenus ſubſtantiæ. Unde vera in iis unitas, ex cujus additione numerus exſiſtit, eſt illud quod in ſingulis idem reperitur, ſcilicet animal in hominibus & brutis, vivens in hominibus , brutis & plantis &c. Quamquam numerus, de quo Mathematici tractant, illud etiam proprium habet ut quælibet ejuſdem una pars ſive unitas in quot partes æquales volueris diſpeſci poſſit, quod quatenus ſit intelligendum ſuo loco docebimus, adeo ut ſola extenſa, quæ talis diviſionis ſunt capacia, vicem unitatum numeri mathematici gerere poſſint .

§ 6 Definitio

Inter quantitatem diſcretam atque indiſcretam quædam media quantitas eſt ex utraque coalita , cujus ſingulæ partes ſunt quantitates indiſcretæ & continuæ invicem ita copulatæ, ut ſenſibus tamquam unum continuum appareant . Cujuſmodi ſunt corpora quæ in ſenſus incurrunt .

§ 7 Scholion

Scio nonnullas ex hiſce definitionibus in multorum reprehenſionem eſſe caſuras, quod & a communibus diſcedant, & aliqua videantur complecti quæ ſimul eſſe non poſſe quiſpiam judicaverit . Verum hic nemini illas tamquam rerum definitiones obtrudo, ſed ſolum accipi volo tamquam nominum, ſingulas, quæ in dubium vocari poſſunt , in conſequentibus explicaturus , & rationes cur ita traditæ fuerint expoſiturus . Quamobrem ante exſpectandum eſt dum id faciam, quam repudientur .

CAPUT SECUNDUM

De Vacuo

§ 8 Definitio & Propoſitio

ORdior a vacuo cujus poſſibilitatem hic oſtendendam ſuſcipio: hujus nomine Philoſophi intelligunt ſpatium in longum , latum & profundum extenſum omnium corporum expers . Quamobrem ejus poſſibilitatem demonſtraturi ſibi eſſe conficiendum credunt hæc duo non pugnare , ſpatium extenſum , & inane ſive omnium corporum expers . Sed quantum eos ſua fallat opinio , ex iis , quæ infra dicentur , conſtabit . Quare nos ad omnem vitilitigationem vitandam illud unum efficere conabimur , poſſe in rerum natura conſtare duo aut plu-

ra corpora quorum aliud ab alio non contingatur, & nihiloſecius corpus aliquod inter illa non ſit. Equidem ſcio Carteſium & ejus Aſtipulatores, & recentiori memoria Leibnitium nec non hoc eodem tempore Wolphium inane in numero rerum non ſolum quæ exſtant, verum etiam quæ poſſint exſtare aliquando, non ponere, ſed inter ideas imaginarias collocare: ut ſi inter duo corpora nihil intercedit, ea ſe invicem contingant. Sed eorum auctoritate nos frangi verum non eſt, cum pro contraria ſententia Auctores habeamus alios etiam graviſſimos Philoſophos Nevvtonum & ejus Sectatores, & quod præcipuum eſt, efficaciſſimas, ut mihi quidem videtur, rationes. Ceterum id quod diximus de vitilitigatione vitanda, valebit præſertim in Leibnitium & Wolphium. Nam ſi effici poterit poſſe duo corpora exſtare inter quæ, tametſi ſe invicem non contingentia, nihil interſit, illud etiam concludetur, vacuum non inter ideas imaginarias, ut hi Philoſophi voluerunt, ſed inter reales eſſe ponendum.

§ 9 I Ratio

Primam itaque rationem poſſibilitatis vacui, quam hic tueor, ex eo deduco, quod ſimul ac Adverſari illud non poſſe exſiſtere certis argumentis non docent, poſſibilitas ejuſdem invicte clareque probatur. Nam ſi exempli gratia duos cubiculi parietes conſideremus, certum & exploratum eſt eorum exſiſtentiam in eo loco in quo ſunt, non pendere ab exſiſtentia corporum quæ intercepta ſunt, uti aeris, tum quod ſubſtantia parietum penitus perfecteque diſtincta eſt a ſubſtantia interpoſiti aeris, tum quia totus aer nunc incluſus ab eo ſpatio abeſſe poteſt, quominus aut in nihilum revertantur, aut ad ſe mutuo accedant, ſaltem ea ratione, ipſis quoque Adverſariis fatentibus, ut in locum exeuntium aliæ aeris vel alterius fluidi particulæ continuata ſerie ingrediantur. Hoc conſtituto quis non videt omnem ab eo loco aerem poſſe educi & prohiberi ſimul nequid corporis intro ſe inſinuet, quin aut acceſſus parietum aut interitus conſequantur; idque ex perfecta parietum & corporum interceptorum diſtinctione concludi, & poſſibile factu clariſſime percipi, niſi eoſdem parietes ſine aliquorum corporum interpoſitione ſe non contingere tamquam repugnans aliunde perſpicuum fiat? Si enim ſemel repudiamus ea, quorum poſſibilitatis clariſſimam habemus notionem, tametſi nullis, quibus ſatisfieri nequeat, difficultatibus premantur, quotumquodque in Philoſophia nobis certum

certum & exploratum erit, in dubium vocata perſpicuitate idearum, perinde ac ſi nobis imponere poſſet; qua una Philoſophi omnes, etiam ii, qui primum Carteſii veritatis criterium non probant, in rebus ſolo naturali lumine notis dijudicandis utuntur? Re autem vera vacui inter duo corpora ſe non contingentia poſſibilitatem Carteſiani & Wolphiani non impetunt iis rationibus quæ facile refutari non poſſint. Nam quod ajunt inde ſequi, illud inane eſſe ſimul aliquid & nihil, nihil, quod eſt cujuſcumque corporis negatio, aliquid, quod rei proprietates illi conveniunt ſcilicet in longum, latum & profundum expanſio, id nihil eſt & non difficulter diluitur: non quidem ea ratione quæ vulgo adhiberi ſolet, quæque tantum abeſt, ut propoſitæ difficultati ſatisfaciat, ut potius eam confirmet, & contrariæ ſententiæ Patronos a noſtra maxime deterreat. Quid enim eſt extenſio negativa & increata quam inani tribuunt, & in quanam ſubſtantia eadem reperitur, cum alioquin certum & evidens ſit negationes omnes utpote relativum aliquid continentes ipſas per ſe non poſſe exſiſtere, ſed in aliqua ſubſtantia eſſe oportere? Certe iis Philoſophis qui non delectantur niſi notionibus realibus, hanc negativam ſimul & actualem extenſionem nunquam obtrudent. Igitur ut veram difficultatis ſolvendæ rationem proponam, ex veræ Philoſophiæ principiis conſequi adverto ſolum dari duplicem extenſionem, actualem & potentialem, ſeu tantum exſtare poſſe aut veram extenſionem, aut potentiam recipiendi extenſa. Quo conſtituto ajo inane inter parietes interceptum actu vere extenſum non eſſe, propterea quod nulla ibidem ſubſtantia eſt extenſione donata, ſed eſſe ſolam & meram potentiam recipiendi extenſa, videlicet hujuſmodi ut inter illos duos parietes extenſa corpora intercipi queant. Quod in cauſſa eſt cur vacuum numquam appellarim extenſum aut ſpatium, & paulo ante monuerim eos valde falli qui hæc duo ſpatium in longum, latum & profundum extenſum, & inane ſive negationem cujuſcumque extenſi corporis non pugnare inter ſe conficere conantur. Hinc vero ſequitur nullam eſſe oppoſitam ab Adverſariis contradictionem. Siquidem vacuum eſt aliquid potentia, & nihil actu, quæ duo poſſe optime cohærere tum per ſe patet, tum ex rebus creatis quæ antequam e nihilo educerentur, actu nihil, potentia aliquid erant.

2 Sed Adverſarii urgere poſſunt difficultatem eodem revolvi. Nam ut negatio ipſa per ſe eſſe nequit, ſed in aliqua ſubſtan-

tia reperiatur oportet, ita & potentia ſeu poſſibilitas recipiendi extenſa utpote attributum cum alia re neceſſario cohærens, in alio inveniatur neceſſe eſt; immo multo magis, cum illa ſit poſſibilitas ad actum poſitivum, uti eſt corporum receptio, quæ proinde ens poſitivum, in quo inſit, neceſſario deſiderat. Huc nimirum eos volebam; nam hujus cardo quæſtionis in eo vertitur, in explicando qui hæc potentia vera & realis ſit, non imaginaria & commentitia. Siquidem ab aliis etiam inſinuatum eſt inter duos cubiculi inanis parietes eſſe potentiam recipiendi extenſa, dum affirmarunt poſſe rurſus introduci ea corpora quæ hinc educta fuerunt. Verum quia ubinam eadem eſſet, & in quo ſubjecto inhæreret, non docuerunt, nihil proficere & rem aliis perſuadere non potuerunt. Itaque ajo hanc potentiam recipiendi extenſa non eſſe quidem in aliquo creato ſubjecto, quod ibi nullum eſſe ponitur, ſed in increato, ſcilicet Deo, ſive eſt Dei attributum, illud ſcilicet quod immenſitas appellatur. Quod & efficaci ratione conficitur, & in nullas difficultates incurrit. Siquidem primo poſſibilitas recipiendi extenſa eſt, ut paulo ante docui, potentia quædam poſitiva; ſtatus enim potentiæ pendet a ſtatu actus, ad quem refertur; receptio vero corporum eſt actus, qui habet aliquid poſitivi. Ergo hæc potentia recipiendi extenſa ipſa ſit aliquod poſitivum neceſſe eſt. Deinde hæc poſſibilitas ipſa per ſe eſſe non poteſt. Nam id quod ipſum per ſe eſt, actu & reipſa eſt, quod autem actu eſt, nequit eſſe tantum poſſibile, nec poſſibilitas modi, ut eſt corporum receptio, eſſe quit primum cujuſdam rei attributum, ſed dumtaxat ſecundum, quod aliud deſiderat ante ſe quodque ab eodem proficiſcitur. Quare cum potentia recipiendi extenſa ſit ex altera parte poſitiva, ex altera ipſa per ſe conſtare nequeat, in aliqua ſubſtantia, quæ eſt aliquod poſitivum per ſe ipſum conſtare potens, reperiatur neceſſe eſt. Hæc autem ſubſtantia nequit eſſe niſi Deus, qui ſolus per immenſitatem inter illos duos parietes eſſe quit.

3 Nec id incurrit in aliquam difficultatem quæ ſolvi non poſſit; mihi enim aliud nihil objici poſſe videtur, niſi aut Deum non habere hanc recipiendi extenſa potentiam quod extenſione careat, aut vacuum quod eſt aliquod negans, dedecere Deum, quod eſt res undequaque poſitiva. Sed primum facile refellitur, quia quemadmodum Deus tametſi non extenſus extenſa creare poteſt, ita quamvis extenſionis expers, extenſa creata recipere

potis

potis eſt : quod congruit cum ſententia Apoſtoli Pauli ſcribentis: *in ipſo vivimus, movemur, & ſumus*. Quo vero alterum ſolvamus, prius explicandum eſt diſcrimen inter perfectiones, quas tum Philoſophi tum Theologi ſimpliciter ſimplices vocant, interque illas, quæ *ſecundum quid* ab iiſdem appellantur, ſive ut preſſius loquamur, inter veras & puras perfectiones, interque illas quæ mixtæ ſunt, & ex aliquibus imperfectis coagmentatæ. Nam vulgo traditæ definitiones eo laborant vitio quo pleræque Ariſtotelæorum, quod aut nullas complectuntur notas quibus res explicatæ ipſe in ſe cognoſcantur, & ab aliis internoſcantur, aut ſi quas, nullius tamen fere uſus & parum accommodatas ad id, ad quod declarandum conficiendumque ſunt comparatæ. Cum enim in conſtituenda differentia inter utrumque perfectionum genus ſibi propoſitum habeant oſtendere ac definire, quænam in Deum cadant & quænam ſecus, ad hunc finem conſequendum quid prodeſt dicere perfectionem puram ſive ſimpliciter ſimplicem eſſe illam, *quæ eſt melior ipſa quam non ipſa*, mixtam autem & ſecundum quid, *quæ eſt melior non ipſa quam ipſa?* Periculum faciant, & comperient ſe illarum adminiculo nihil in hoc negotio poſſe proficere. Quare ut alias potioris uſus ſubſtituam, ajo perfectionem puram eſſe illam quæ eſt ſolum ens, nihilque negantis ſive non entis includit, mixtam vero, quæ præter ens aliquid etiam negativi ſive non entis complectitur, quæque iccirco habet tum ens tum negationem entis, quorum altero diſcrepat a pura perfectione, in qua nihil negantis admixtum eſt, altero a pura imperfectione, quæ nihil continet entis. Ex iis autem facile eſt eruere quænam ex ſingulis tum animæ noſtræ tum corporum perfectionibus in Deum conveniant, qui cum ſit Ens a ſe, a quo omnia alia entia dimanant, omne verum ens in ſe habeat oportet, atque ideo ſit purum ens, nihilque negativi complectatur. Ex. gr. quia intelligere, quod eſt in anima noſtra, eſt eſſe, intelligere autem hæc tantum, non alia, eſt negatio entis, inde colligimus primum cadere in Deum, non autem ſecundum. Cum vero negatio negationis ſive non entis ſit affirmatio & ens, ex his efficitur etiam negationes negationum in Deum convenire. His conſtitutis, de quibus alibi enucleatius, propius accedo ad id, quorſum hæc ſpectant, & ajo in qualibet re extenſa duo eſſe diſtinguenda, alterum eſſe in loco, quod eſt poſitivum & ens, alterum non ſolum in alio non reperiri, verum etiam cum parte alia aliis in loci punctis eſſe, non in omnibus, quod eſt nega-

gati-

gativum & non ens. Quare negatio primi, utpote entis, eſt vera negatio, nec in Deum cadit, negatio vero ſecundi, utpote negatio negationis, eſt ens & iccirco illi adſcribenda. Quo fit ut cum natura Divina non pugnet vacuum, quatenus negat id quod imperfecti & negationis eſt in corporibus, cum alioquin Deus utpote totus in toto & totus in qualibet loci parte, id omne habeat quod veræ perfectionis verique entis corpora complectuntur. Quibus mihi videor penitus amoviſſe id quod Carteſianos alioſque Philoſophos ab admittenda vacui poſſibilitate jure ac merito deterrebat. Nam aliis Philoſophis qui pro ea ſtabant, ad extenſionem negativam & increatam confugientibus, eamque ſatis non explicantibus, ſemper reſtabat inquirere, quid illa extenſio negativa foret, qui merum nihil eſſet, & tamen negative extenſum & recipiendis extenſis poſitive idoneum.

4 At enim ſi res ita foret, vacuum illud, quod inter cubiculi parietes intercipitur, eſſet ſimul finitum & infinitum; finitum quia quatuor parietibus, fornice & pavimento tamquam finitis corporibus finitaſque ſuperficies habentibus contineretur; infinitum vero propterea quod noſtra ſententia eſſet attributum Divinæ naturæ, atque idem ac Divina Immenſitas, quæ nullis coercetur limitibus. Hujus difficultatis ſolutio rei de qua agimus majorem afferet lucem, & viam muniet ad meam quamdam opinationem, quæ licet a communi diſſentiat, nihilo tamen minus, niſi valde fallor, certa & vera eſt. Utor autem hac diſtinctione: vacuum illud eſt quidem extrinſecus finitum; circumſcribitur enim tamquam extrinſecis finibus quatuor parietum libramentis; intrinſecus tamen infinitum eſt, quod corpus aliud alio denſius in infinitum, tametſi omnia omnino continua ſint, in eodem a Deo creari & collocari poteſt, quæ corpora omnino continua alia aliis denſiora in infinitum non repugnare infra ſuadebimus. Quo prorſus infirmatur ratio ab Adverſariis objecta. Non enim cum ratione pugnat Deum ejuſque attributum extrinſecus coerceri iis limitibus, quos ſibi ipſe fixit atque refigere poteſt, ſi modo intrinſecus & quod attinet ad ſubſtantiam infinitus permaneat.

5 Si vero hic urgere non deſiſtas, vacuo inter utrumque diſſitum parietem intercepto veram extenſionem in longum, latum & profundum convenire, propterea quod ejus partes ut ante quamlibet corporum extractionem, ita poſt extra ſe invicem ſunt, cum eædem permaneant, & iccirco a Deo fore diſtinctum, &

nihil

nihil, atque nihilominus extenſum, quæ duo pugnant inter ſe; cauſſa tamen non caderem. Nego enim in illo vacuo quamdam eſſe actualem extenſionem; nam ſi quæ ſunt ejus partes, aliæ nequeunt eſſe niſi eſſentiæ divinæ, quæ nullas habet extra ſe poſitas, quæque cum ſit tota in toto & tota in qualibet parte loci, facere nequit ut vacuum illud actu veram habeat extenſionem. Cum vero dicitur eductis omnibus ex cubiculo corporibus illud ſpatium idem permanere, verum eſt ſi de potentia recipiendi extenſa id intelligas; eo quod in immenſitate Dei, quæ eadem perſeverat, eadem quoque manet quæ antea, potentia recipiendi corpora parietem inter utrumque, non autem ſi hoc dictum velis de actuali extenſione.

Nam quod in ejus rei confirmationem afferre potes, ſcilicet diſtantiam inter parietes, eamdem quæ antea erat permanere, ex. gr. 10. pedum, & iccirco etiam interpoſitam extenſionem, ſine qua nihil ab alio diſtare poteſt, illud hac ratione refuto. Una ex proprietatibus relationis eſt ut in aliqua re nova poſſit exoriri relatio ſine ulla ejuſdem mutatione, modo alia res ad quam prior refertur quamdam mutationem ſubeat. Ita ſi ſolus ſit paries albus A, nulla eſt in eo ſimilitudinis relatio cum alio. At ſi e regione ponatur paries albus B, in A relatio ſimilitudinis cum B continuo exſiſtit, tametſi nihil in A mutatum fuerit. Jam vero diſtantia inter duos ex. gr. parietes eſt illorum relatio exigens quoque interpoſitum aliquid, quo eorum diſtantiam metiamur. Unde cum dicimus paries alius ab alio 10. pedes diſſidet, id intelligi nequit ſine pedibus extenſis atque corporeis, qui inter utrumque parietem intercedere cogitentur. Quamobrem ſi nullum omnino corpus inter eoſdem interſit, actualis quidem 10. pedum diſtantia non erit, cum non ſint interpoſita corpora, quæ ad hanc actualem relationem conſtituendam ſunt neceſſaria; exoriri tamen poterit ſine ulla parietum mutatione aut translatione, ſi modo quæ corpora intereſſe queunt ob potentiam recipiendi extenſa, revera interponantur. Ex qua reſponſione colligitur inter hoſce parietes eſſe potentiam tantummodo actualis diſtantiæ, quæ non requirit aliud niſi potentiam in Deo ſitam recipiendi extenſionem. Atque id in cauſſa fuit cur a primo non dixerim parietes diſtare, ſed ſe non contingere. Quo mihi videtur penitus ſatisfieri omnibus iis quæ ab Adverſariis contradicta ſunt. Quamobrem cum nullimode probetur, hoc vacuum inter utrumque parietem repugnare, poſſibile a Philoſo-

phis

Digitized by Google

phis eſſe putandum prima ratione concludo.

§ 10 Alia ratio

Alteram poſſibilitatis vacui rationem ex eo duco, quod motus in rerum natùra conſtare poteſt ſaltem eo modo, ut quamvis omnia plena ſint & ſe invicem tangant, tamen aliud in alius locum ſuccedat; ut accidit in circulari canaliculo, quem decem ex. cauſſa globuli repleant. Nam ſi unus ex iis propellitur, omnes in gyrum torquentur, & antecedentis quiſque locum ſubit. Quo poſito animum advertamus ad tres proximos hujuſmodi globulos, quorum alius in alius locum meat, & diſtinctionis cauſſa tribus primis alphabeti litteris deſignemus, ut A ſignificet globulum qui in locum interpoſiti ingreditur, B medium & interpoſitum, C denique tertium, cujus locus a B ſubinde occupatur. Qua in re dico A poſſe moveri etſi nullus foret inter A & C interpoſitus globus B: nam in B nulla eſt ratio cur A poſſit in ejus locum intrare. Nam quatenus B eſt ſolidum, extenſum, & penetrationi reſiſtens, motui A pariter ſolidi, quique cum alio penetrari non quit, potius obſiſtit; quatenus B eſt ipſum ſpatium & locus, ut Carteſiani volunt, & ſequitur ex noſtra ſententia, qui in vacuo nullam eſſe extenſionem oſtendimus, nullam quoque rationem habere intelligitur cur A moveri queat. Nam A moveri non poteſt niſi cedat B, quem penetrare non poteſt; decedente autem B diſcedit etiam ſpatium & locus qui juxta Carteſianos & Wolphianos a B non diſtinguitur. Ergo B nullam intelligitur habere rationem cur A poſſit in ejus locum motu ſuccedere. Quoniam vero nihil eſt abſque ſufficienti ratione, reſtat ut hæc ratio ſit vel in ipſomet vacuo inter A & C interjecto, vel in A: ſi in vacuo eſt, jam teneo quod volebam, poſſe inter duo corpora ſe non contingentia exſiſtere inane. Sin autem in globulo A hæc ratio ineſt, propterea quod in Adverſariorum & etiam noſtra ſententia ſuum ſpatium intrinſecum a quo non diſtinguitur, ſecum defert, eodem tamen quo ſpecto, res evadet. Nam inde perſpicuum fit poſſe globum A perinde moveri, ſive illi proximum ſit aliud corpus ſive non. quia ſcilicet tota ratio in eo eſt, ſive attendas ad vim qua percellitur, ſive ad ſpatium. Quod ſi corpus finitum & undequaque circumſcriptum, quale eſt globus A, moveri poteſt, etiamſi cum nullo proximo corpore continuetur; quis non videt, ſi locus unde incipit moveri, ſola mente & cogitatione deſignetur, ab eodem ad alium, ad quem motu pervenit, inane & vacuum intereſſe?

§ 11

§ 11 Tertia ratio

Atque hinc tertia ratio pro vacui poſſibilitate deducitur. Fac enim mundum, ita ut eſt, eſſe finitum , & aliquod in ejus extima ſuperficie corpus imaginare quod cum aliis quidem cohæret, ſed nihilominus ab iiſdem ſecernitur; niſi aliunde vacui repugnantiam oſtenderis, ut revera non oſtenditur , nonne perſpicuum eſt quam quod maxime eidem ſoli poſſe imprimi vim contrariam vi qua alia corpora proxima ad centrum mundi propelluntur ? Hac impreſſa vi vel corpus illi obſequitur vel non; ſi etiam, extra mundum movebitur & poſt aliquem motum a reliquo mundo ſaltem in potentia diſtabit, ideoque inter mundum & illud corpus intercipietur inane . Alia enim a corpore pulſo diſtincta , ut quæ illa vi carere ponuntur , diſcedens a mundo corpus conſequi nequeunt . Sin autem non obtemperat, quid eſt extra mundum quod illi obnitatur ? Non ſolidum aliquod, quia finis univerſitatis corporum ibi eſſe ſtatuitur , nec loci defectus , quod ex altera parte negatio loci vim habere ipſa per ſe non poteſt , qua vi alteri obſiſtat, ex altera vero corpus ſuum ſpatium habet & ſecum defert. Conſequens igitur eſt poſſe dictum corpus moveri , itaque fieri ut inter duo corpora ſe non contingentia nihil ſolidi interſit quod ibidem intercedere poſſit, quin ullus in iis corporibus motus præcedat .

Has & ſimiles concluſiones Adverſarii viderunt ex mundo finito conſequi , cumque earum vi ſe obrui experirentur , mundum vel infinitum vel indefinitum voluerunt . Sed horum alterum, ut leviſſime dicam , indignum eſt Philoſopho Chriſtiano, alterum autem difficultatem eludit , nec facit quin mundi finitudinem concedere debeamus , ſi Chriſtianæ fidei decreta id velint ; de quo Theologorum eſto judicium . Interim ſatis certo concluditur inter duo ſe non contingentia corpora poſſe intercedere vacuum , quod alius corporis recipiendi ſit capax , quin eadem ullimode moveantur & alterum ab altero abſcedat .

§ 12 Corollarium

Porro ex his concluditur vacuum eſſe infinitum; nam ſi mundus eſt infinitus , ante illius creationem erat poſſibilitas infiniti vacui; at ſi vero finitus , ultra fines mundi corpus in infinitum pergere poſſe dicta ratione conficitur, atque iccirco infinitam illius recipiendi capacitatem inveniri. Quod congruit cum eo quod ſupra notavimus, inane & vacuum idem prorſus eſſe ac Divinam Immenſitatem .

§ 13

§ 13 Scholion

Quæ concluſio ſi, quomodo a me defenditur, ita a Carteſii Diſcipulis admitteretur, credo eos nihil facturos contra proprium ſyſtema eſſentiæ corporum in extenſione poſitæ, quod potiſſimum in cauſſa fuit ut a communi ſententia poſſibilitatis vacui diſcederent. Siquidem ea non efficitur, inter duo corpora ſe non contingentia actu exſiſtere extenſionem aliquam negativam quæ faciat ut extenſio generatim accepta ſoli corpori non conveniat, ut ſoli corpori convenire neceſſe eſt ſi ad ejuſdem pertinet eſſentiam, quemadmodum hi Philoſophi volunt. Quamobrem puto eoſdem facile in noſtram ſententiam ituros, ſarta tecta una ex iis enunciationibus, quæ in ipſorum Philoſophia familiam ducit, de qua alias enucleate diſſeremus. Immo futurum ſpero ut omnes diſſidentes Philoſophi in eamdem conveniant; Nam cum diſcordiæ cauſſa in eo poſita eſſet, quod utrique ex parte verum attingebant, ex parte ab eodem aberrabant, illi qui poſſibilitatem vacui tuebantur, quod ſimul tamquam actu, tametſi negative extenſum defendebant, illi vero qui eam negabant, quod ſimul hypotheſim duorum corporum ſe non contingentium tametſi nullum extenſum corpus intereſſet, tamquam impoſſibilem judicabant, ea nunc ſublata rationibus quas attulimus, conſequens eſſe videtur ut etiam litibus finem imponant.

2 Quod ut magis magiſque comprobetur, audiamus unam ex præcipuis Leibnitii rationibus adverſus Clarkium in Commercio Epiſtolico, quam referens Cl. Femina Domina du Chaſtellet in Inſtitutionibus Phyſicæ § 74 pag. 75 editionis Italicæ Venetiis an. 1743 negat eſſe hujuſmodi ut quidpiam reſponderi poſſit. Sic autem preſſe ab ea concluditur. „ Si ſpatium eſt „ quidpiam reale & ſine corporibus ſubſiſtens & corpora in eo„ dem collocari poſſunt, res eſt prorſus indifferens in quacumque „ hujus ſimilaris ſpatii parte corpora collocentur, modo eum„ dem ipſa inter ſe ſitum tueantur. Nulla igitur foret ratio ſuffi„ ciens cur Deus mundum creaſſet in hoc potius loco in quo „ eſt, quam in quolibet alio, quoniam locare illum poterat in „ plaga 10000 leucas diſſita, aut Orientem ponere ubi Occidens „ reperitur, aut tandem ſus deque vertere quin alius rerum ſitus „ exſiſteret. Hactenus laudata Mulier quæ nobiſcum ſentire poteſt, quin aliquid de hujuſce rationis vi detractum putet; propterea quod inane quod a nobis defenditur, non eſt aliquod ſpatium extenſum, in quo corpora tamquam in loco extenſo con-

conſtitui poſſint, non habet plures partes & plagas, in quarum aliqua ut mundus collocetur, opus ſit ſufficienti ratione quæ Divinam voluntatem alioqui indifferentem determinet, uno verbo aliud non eſt niſi pura potentia recipiendi extenſa quæ in Deo ſine ulla prorſus diſtinctione partium tamquam ipſius attributum exſiſtit. Quod ſi credat hinc effici, exſtare non poſſe vacuum neque in eo ſenſu quem nos defendimus, & ideo corpora omnia ſe proxime quaquaverſum contingere, valde fallitur. Equidem ſcio ad id efficiendum aliam etiam rationem eodem rationis ſufficientis principio nixam ab ipſa uſurpari, ſed nullum in ea eſſe momenti faciemus perſpicuum, cum de corpuſculorum figura & limitibus, in quibus illa poſita eſt, diſputabimus.

§ 14 Scholion

Quemadmodum autem in hac mea vacui ſententia nihil eſt quod Carteſianos deterreat, ita multo minus quidpiam offenditur quod Chriſtianos Philoſophos abſterrere poſſit. His enim, immo & iis, quæ ſequuntur, ſcriptis ad meas manus pervenerunt elementa Phyſicæ Petri Muſſchembroechii edit. Venetæ apud Bertellum an. 1752. in duos tomos diſtributa cum notis Cl. Anonymi, & in nota ad § 89 tomi primi duo legi, alterum præſtantiſſimis viris Henrico Moro, Joſepho Rapſon, Nevvtono, Clarkio & in primis Leonardo Leſſio Societatis Jeſu in libro de Divinis Perfectionibus cap. 2. eam jamdudum fuiſſe ſententiam quam nos defendimus, quod ſpatium ab ipſo Deo ejuſque immenſitate non diſtinguatur, alterum eamdem *audentiſſimam* eſſe & ad Spinoſæ doctrinam proclivem. Quam Spinoſiſmi notam eidem aſſeverantius inuſtam offendi in parte priore Elem. Metaph. Cl. Antonii Genuenſis prop. 84 edit. Ven. apud Bettinelli an. 1748. hiſce verbis: *Si ſubſtantia ſpatii vacui eſt Deus, Deus eſt ſubſtantia Spinoſæ & Deus Stoicorum. Dem. Si ſubſtantia ſpatii penetrat ſubſtantiam materiæ, ſubſtantia ſpatii & materiæ una eſt (prop. 82): cum autem quæ eidem ſunt unum, inter ſe ſint unum (prop. 48), ſi Deus eſt ſubſtantia ſpatii, Deus & ſubſtantia materiæ ſunt eadem ſubſtantia, nempe Deus eſt ſubſtantia Spinoſæ (vide Shcolion prop. 21) & Stoicorum Deus, ſeu mundi τὸ πᾶν ..... Certum mihi eſt éos qui ſtatuunt ſubſtantiam ſpatii eſſe Deum, ſtatuere quoque Deum eſſe materiæ ſubſtantiam. Nam cum ſubſtantia ſpatii ſit primum materiæ fundamentum materiamque permeet ita ut nequeat materia exſiſtere ſine ſpatio hoc,*

pro-

profecto materiæ primum fundamentum ideſt ſubjectum & ſubſtantia Deus eſt . Quid concludi apertius poſſit non video .

2 Verum hac cenſura obſtringuntur qui ſimul vacuum eſſe attributum Dei & tamquam ſpatium in longum , latum & profundum negative extenſum defendunt . Hoc enim pacto extenſionem ſupremo Numini attribuunt, itaque parum internoſcunt a materia , quicum Deus ab impio Spinoſa confunditur . Hos vero falli nos jam docuimus , hujuſque erroris jam reſeravimus fontem , rationem ſcilicet illam ſubtiliter concluſam ductam ex eo quod extractis e cubiculo corporibus interceptis , & parietibus ejuſdem ſine ullo motu ibidem manentibus eadem ac antea 10 palmorum inter parietes diſtantia permaneat , confirmatam ludificatione quadam imaginationis , quæ eodem tempore corpora omnia e cubiculo exceſſiſſe fingit , & 10 palmos corporeos in eodem ſubſtituit . In meam ergo ſententiam , qui vacuum aliud nihil eſſe volo , quam puram recipiendi extenſa potentiam in Deo poſitam omniſque extenſionis expertem , quomodo dicta cenſura cadere poſſit non video . niſi quis velit nigro theta notare Chriſtianos omnes qui potentiam creandi corpora ab æterno in Deo fuiſſe arbitrantur . Sane Muſſchembroechius § 91 non impugnat niſi eos Philoſophos qui ita ſpatium vacuum cum Deo confundunt , ut extenſionem ipſimet Deo attribuant : laudatus quoque Anonymus eodem ſpectat . Genuenſis autem aut eodem collimavit ut credo , aut ſi aliud ſpectavit , a ſcopo mihi aberraſſe videtur . Nam vis demonſtrationis in eo poſita eſt , quod duæ ſubſtantiæ ſe perfecte compenetrantes una & eadem ſubſtantia ſint . Ut vero nunc mittam id nec ab eo propoſitione 60 , nec a Lochio , quem citat , ulla certa ratione monſtrari , non inficias iverit hanc eſſe communem Theologorum ſententiam qui corpora compenetrari poſſe & revera compenetrata fuiſſe ſine ulla confuſione credunt . Quod ſi hæc tamquam fidei parum conſona non exploduntur , nec illa explodenda eſt , quæ ponit in Deo recipiendi extenſa potentiam & extenſam materiam ſine ulla confuſione Dei & materiæ in Deo eſſe tamquam in loco proprio ſed inextenſo , de quo poſtea diſputabimus : præſertim cum , ut proprie loquamur , Deus non compenetretur cum corporibus uti extenſum cum alio extenſo , ſed iiſdem dici poteſt ſua ſubſtantia intime præſens , quemadmodum nec ab iis circumſcribitur , tum quia Deus potius eſt in ſeipſo , tum quod in

aliis

aliis in infinitum quæ creari poſſent, corporibus eſſe poteſt, quin ab alio ad alium locum migret.

3 Concludendum eſt ergo vacuum aliud non eſſe niſi recipiendi extenſa potentiam, hancque, uti & alias rerum poſſibilitates, in Deo tamquam illius attributum ineſſe, nec tamen inde quidpiam detrimenti capere Chriſtianam Religionem. quo conſtituto facillime ſolvuntur omnes aliæ quæſtiones quæ circa vacuum agitantur, in quibus dijudicandis dum Auctores verſantur, mirum eſt in quos ſe laqueos induant, ut tolerabilius videatur vacuum inter ea, quæ eſſe non poſſunt, reponere, quam illud ita defendere ut velis eſſe aliquid re ipſa negative extenſum & a Dei ſubſtantia diſtinctum. Quæritur enim a Muſſchembroechio § 89 citati libri, utrum ſit increatum an creatum. Ex noſtra ſententia manifeſtum fit eſſe increatum & æternum, quin id in aliquam difficultatem incurrat, quemadmodum increatæ ſunt & æternæ, utpote attributa Divina, omnes aliæ rerum creatarum potentiæ ſive poſſibilitates, quin huic omnium qua Philoſophorum qua Theologorum opinioni quidpiam faceſſat negotium. At defendente Muſſchembroechio illius creationem, nemo non videt quibus difficultatibus ea ſententia prematur. Si quis eruditas Anonymi ad eum locum Notas adeat, id manibus tanget. Sed non levioribus obruuntur qui ſimul increatum & reipſa extenſum, atque a Deo diſtinctum propugnant, ut ipſum per ſe patet, & videre licet apud eumdem Auctorem qui in re adeo intricata judicium ſuſtinere maluit, quam prava & abſurda proferre. Cujus conſilium univerſim non improbo; in hac autem re ſatis probare non poſſum propter periculum ne impii homines, quibus nunc Europa ſcatet, inde occaſionem arripiant alicujus chriſtiani dogmatis evertendi. Cum enim res a Chriſtianis Philoſophis eo deducta ſit, ut ſimul oſtendatur eſſe poſſe vacuum minime a Deo creatum, & nihilominus ab eodem ſecerni dicatur, quis jure cohibere poterit ne ex his efficiant, quidpiam eſſe increati & æterni præter Supremum Numen, quod Chriſtianam Religionem quantum, ut leviſſime dicam, incommodet Theologi norunt. Quæritur etiam utrum ſit ſubſtantia, vel accidens. Subſtantiam eſſe ex noſtra ſententia plane colligitur ſaltem in ſenſu, ut ajunt, *identico*, quatenus omnia divina attributa ſunt idem ac Deus. At doctiſſimus meique amiciſſimus P. Fortunatus a Brixia, quem honoris cauſſa nomino,

tom. 1. Philoſoph. ſenſuum Mechanicæ § 73 edit. an. 1745. neutrum dici poſſe ait, propterea quod eſt ens quidem reale, ſed negativum non poſitivum, quod ſolum in ſubſtantiam & accidens diſtribui poteſt. Sed entia negativa per ſe exſtare non poſſe eadem ratione ſuadetur, qua poſſibilitates rerum per ſe eſſe non poſſe ſupra evicimus. Reſtat ergo inquirenda ſubſtantia in qua hæc negatio ſit. Quamquam nec veram eſſe negationem jam docuimus. Quæ omnia luculentius confirmant noſtram ſententiam eſſe tenendam, in qua & cum ratione naturali & cum fide Divina omnia mirifice congruunt.

CAPUT TERTIUM

Continuum extenſum ex inextenſis componi non poteſt.

§ 15 Propoſitio

Conſtituto vacuo videndum eſt quale debeat eſſe illud extenſum continuum quod inter duo corpora diſſita intercipi poſſit & vacuum illud implere, ſive potius in eo tamquam in Divina Immenſitate recipi. Qua in re vires omnes contendam, ut continuum extenſum illius implendi capax ex inextenſis, ſive finitis, ſive infinitis, ſive puncta Zenonica dicantur, ſive elementa Wolphii ſimplicia, componi non poſſe demonſtrem. In eo enim vertitur cardo totius de quantitate continua diſputationis; hinc omnes difficultates, quibus hæc materia implicatur, oriuntur; hinc omnium errorum qui multos cum antiquos tum recentes Philoſophos in tranſverſum egerunt, fons & origo petenda eſt. Utar autem communi ratione, cujus vim nemo ex contrariæ ſectæ Philoſophis, qui a priſcis temporibus ad hæc uſque tempora ſuas in ea refellenda vires experti ſunt, retundere potuit; eam tamen latius quam alii fecerint, explicabo. Ut itaque inextenſum ſimul cum alio aut pluribus inextenſis continuum extenſum faciat, aliud cum alio ita jungendum eſt, ut nihil inter hujus extenſi partes interjacere queat, atque ideo ſe invicem tangant. Nam ſi ita conjuncta non forent, continuum quod ex partibus proxime cohæreſcentibus, & aliis alias conſequentibus, ut nullam aliam intercipere queant, conſtare ab omnibus intelligitur, componere minime poſſent. Præterquamquod hæc inextenſa a ſe divulſa eadem quæ antea, ſcilicet inextenſa manerent. Quo igitur

tur hæc inextenſa extenſum continuum, ut Adverſarii volunt, faciant, copulanda ſunt, & ſe invicem tangant oportet. Rurſus ad eumdem finem conſequendum neceſſe eſt ut aliud extra aliud exſiſtat, vel ſaltem quidpiam unius exſtet extra aliud; ſi enim nihil exſtaret, perfecte congruerent, ubi unum, ibi etiam alterum reperiretur, & ideo extenſum non facerent. Sed hæc duo *ſe proxime tangunt*, & *aliud extra aliud ſive aliquid unius extra aliud exſiſtit* liquido pugnant in inextenſis. nam ſi ſe tangunt, eſt aliquid in utroque mutuo tactum; ſi aliquid unius eſt extra aliud, eſt aliquid non tactum, ideoque in uno & eodemmet inextenſo eſt aliquid tactum & aliquid aliud non tactum; ſed id quod non eſt tactum, eſt extra id quod tangitur; ergo in inextenſo ſunt plura ſimul copulata, quorum aliud extra aliud exſiſtit. Igitur hoc inextenſum foret ſimul inextenſum ut ponitur, & extenſum ut ultima concluſione conficitur: quod maniſeſte repugnat. Quamobrem plura inextenſa ſimul conjuncta perfecte congruere debent, ut nihil unius extra alia ſit, & ideo extenſum continuum aptum loco occupando componere nequeunt.

2 Hujus veritatis clariſſimæ luci tenebras offundere conatur doctiſſimus ceteroquin & recentioris in Phyſicis Methodi Princeps Galilæus; & argumento ita apte concluſo aſſentitur quidem effici, continuum extenſum ex inextenſis numero finitis haud poſſe conſtare, negat tamen id valere adverſus inextenſa, ſi numerum in infinitum augeas & ſimul infinita componas. Omne autem continuum, ut demonſtrationibus Geometricis, de quibus infra, ad evidentiam oſtenditur, ex partibus numero infinitis coaleſcit. Qua in re ad vim argumenti eludendam effugium excogitavit ſimile illius, quo Athei ſe evadere poſſe arbitrantur ex iis anguſtis locis, in quæ conjiciuntur a Divinitatis defenſoribus, dum hi ſeriem aliquam rerum ſine ſubſtantia a ſe non poſſe conſtare planum faciunt. Illi enim de ſerie finita id effici, non de infinita reponunt. Quamobrem quæ ad hunc exitum Atheis præcludendum a Theologis ſolent afferri, & a nobis, ut reor, efficacius quam adhuc ſit factum, ſuo loco afferentur; ea valere poſſunt etiam in Galilæum. Verumtamen nitar propriis hujus rei, de qua diſputamus, rationibus eumdem refellere. Ac primum ajo, ſi in re extenſa ſunt hujuſmodi infinita puncta inextenſa ex quibus componitur, fieri poſſe ut ſimul juncta locum non occu-

pent, & omnino congruant. nam poſtquam duo conjuncta ſunt & ob rationem allatam perfecte congruerunt, ut nihil unius extra aliud exſiſtat, eadem omnino ratione poteſt effici tertium congruere cum his duobus, quæ, quod attinet ad locum non occupandum & ad extenſum non faciendum, pro uno accipi poſſunt, quartum cum tribus, quintum cum quatuor & ita porro uſque in infinitum, ſi punctorum adjectio in infinitum continuaretur. cum enim quantumcumque punctis jam coalitis adjici intelligas, ſemper eadem ratio ſit præſto, cur omnia congruant, hujus congruentiæ potentiam numquam minui, ideoque nec exhauriri, & iccirco infinitam eſſe neceſſe eſt.

Hoc conſtituto ſi puncta inextenſa finita neceſſario congruunt, & infinita congruere poſſunt, non video cur infinita quoque neceſſario non congruant. Nam ſi infinitudo punctorum ipſa per ſe potentiam congruendi, quæ pariter eſt in punctis finitis, non tollit, nec ipſa per ſe actum congruendi tollere poteſt. Si enim infinita, ut nos oſtendimus, poſſunt congruere, & ut Galilæus vult, poſſunt etiam non congruere, id argumento eſt infinitatem ipſam per ſe eſſe ad utrumque ſtatum indifferentem, & ideo in illa rationem ſufficientem, cur locum occupent, non poſſe inveniri, & cum nihil abſque ſufficienti ratione ſit, eam rationem in quodam alio præter infinitatem eſſe quærendam. Nam ſi ex. gr. adverſus nonnullos recentiores Phyſicos oſtenditur fieri poſſe ut corpus in quam minutiſſimas particulas comminutum fluidi proprietatibus non utatur: nemo non videt diviſionem in exiliſſimas partes ad naturam fluidi conſtituendam non ſufficere, ſed aliquid aliud ſcilicet motum eorumdem vorticoſum requiri. Eodem modo de infinitate ratiocinare. Igitur ex eo quod in extenſo ſunt infinita numero puncta, non poteſt Galilæus negare, qua ratione efficitur extenſum ex finitis inextenſis componi nequire, illa eadem ex infinitis conſtare non poſſe ſuaderi, niſi quid aliud habeat præter infinitatem, unde ſuam opinionem tueatur.

3 Poſſet hic aliquis cauſſam Galilæi ſuſcipiens multa opponere ex ſublimioris Recentiorum Matheſeos principiis, quibus efficitur incremento certæ cujuſdam quantitatis uſque in infinitum aliud omnino fieri atque id quod exſiſtit, ſi eadem illa quantitas limitibus circumſcribatur. Nam ut aliqua ex pluribus exempla proponam, ſi focus alter ellypſeos ab altero abſcedat

Digitized by Google

ſcedat ad diſtantiam quamcumque finitam, curva manet quæ prius, ellypſis nimirum; at ſi ad infinitum intervallum alter ab altero diſcedere intelligantur, ellypſis in parabolam, quæ eſt curva ab ellypſi diverſa, convertetur: item ſi foci ad centrum ellypſis & ad ſe invicem ita accedant, ut quantitate finita ab eodem diſſiti ſint, nulla curvæ alterius in alteram naſcitur transformatio, at ſi mutuo acceſſu fiat ut cum centro tantum non congruant, & quantitate ſolum infinite parva a ſe invicem diſtent, ellypſis in circulum abit & transformatur. Quidni ergo ſuſpicari licet ſimile quidpiam contingere poſſe in re de qua agitur, ut quamvis finitus inextenſorum numerus extenſum componere nequeat, infinitus tamen id facere poſſit?

4 Sed tantum abeſt ut his e Matheſi ſumtis exemplis vis allatæ demonſtrationis infirmetur, ut eam mirifice confirmari ſim oſtenſurus. Nam verum quidem eſt infinito focorum aut receſſu aut acceſſu ellypſim aut in parabolam aut in circulum converti, ſed etiam illud eſt certum id non momento & puncto temporis fieri, ſed paulatim & ſenſim, adeo ut ellypſis paulatim in parabolam aut in circulum abeat, & quo diſtantia focorum magis augetur aut imminuitur, eo ſemper minus a parabola aut a circulo abſit. Quod etiam cadit in omnes alias quantitates quibus infinitæ partes aut accedere intelliguntur aut decedere. Singulis enim acceſſionibus aut deceſſionibus fit ut quantitas qua de agitur, propius accedat ad id, quo iis in infinitum continuatis illam pervenire percipimus. At contra ſe habet res de qua diſputamus, nam ut oſtendi num. 2. quantumcunque augeas inextenſorum numerum, quod ex iis coaleſcit, ne hilum quidem propius accedit ad rem in longum, latum & profundum extenſam, quam ſi duo aut tria ex iiſdem acceſſerint. Qua enim ratione cogitur & efficitur duo ita congruere ut nihil alterius extra alterum exſtet, illa etiam ſuadetur tertium eodem modo cum primis duobus convenire, quartum cum tribus, quintum cum quatuor & ita porro in infinitum. Superior igitur ratio a Mathematicis diſciplinis petita non ſolum nihil juvat Galilæum, verum etiam ejus ſententiam falſitatis efficaciſſime arguit. Ex quo demum concluditur noſtram demonſtrationem nullatenus infirmari ab iis quæ doctiſſimus Philoſophus objecit.

5 Videndum eſt autem an labefactetur ab iis aliis quæ tum vete-

veteres tum recentiores Epicurei contradixerunt. Hi enim Philoſophi aliam viam iniere, quo adverſus allatam demonſtrationem ſe tuerentur; & commenti ſunt duo vel plura inextenſa ſe quidem non tangere ſecundum diverſas partes, ut ajunt, reales, ſe tamen contingere in diverſis aſpectibus atque faciebus, ita ut in uno puncto inextenſo non ſint quidem plures partes reales, ſed plures tantummodo facies in quibus a pluribus punctis dextra, ſiniſtra, ſurſum, deorſum & in locis interceptis tangi poſſit, & in quarum una ab uno tantum puncto tangatur. Quod ſuaderi poteſt ex eo quia ſummus ex. gr. anguli cubi vertex eſt punctum penitus inextenſum, & nihilominus plures in ſingulis tribus planis initium illo ducentibus in longum extenſæ lineæ proficiſcuntur; quod eſſe non poteſt niſi plures ſint in eo puncto facies unde omnes illæ lineæ ad loca diverſa contendunt.

6 Verum qui fieri poſſit ut punctum aliquod in aliis atque aliis aſpectibus atque locis a pluribus punctis tangatur & nihilominus inextenſum ſit, nullo pacto intelligi poteſt. Nam hujuſmodi facies ſi aliæ atque aliæ ſint, & ad plagas diverſas aſpiciant, & a diverſis punctis extenſum facientibus tangantur, invicem diſtent neceſſe eſt; fac enim punctum aliquod, uti circuli centrum, undequaque tangi ab aliis proximis punctis, quæ in hac ſententia & cum illo & aliud cum alio extenſum componerent. Nemo non videt inter punctum, quod dextram centri faciem tangit, & inter illud, quod e regione ſiniſtram contingit, intercepta eſſe in gyrum alia puncta quæ alias inter ſiniſtram & dextram facies contingunt, quæque inter ſe & cum duobus modo expoſitis punctis verum extenſum in gyrum componunt. Finge nunc id quod fieri poteſt, punctum dexteram tangens in orbem torqueri ſiniſtrorſum ita ut & ſemper centrum contingat & in loca ſingulorum punctorum gradatim ſuccedat; Profecto hujuſmodi punctum antequam ad ſiniſtram perveniat tempus aliquod impendet; propterea quod extenſum percurrere debet. Cum igitur toto eo tempore ſingulis momentis diverſas centri facies in dextram atque ſiniſtram contingat, hujuſmodi facies inter ſe diſtent & faciant extenſum oportet. Quod enim tempore percurritur, aliquorſum extendatur neceſſe eſt. Quo ſolutum manet id quod fuit objectum, & nova, ut reor, demonſtratione confectum id quod hoc loco mihi unice propoſitum eſt: extenſum ex in-

ex-

extenſis nequaquam componi . Nam quod negant partes reales eſſe in iis ex quibus extenſum fit , in eo me adverſarium minime habebunt , qui partes re ipſa diſtinctas non eſſe in veris continuis infra conficiam , modo illamet eadem extenſionis nequaquam expertia fateantur .

7 Ad id quod additum fuit reſpondeo , mihi quoque puncta omnino inextenſa in extenſione probari , atque in ea re paulo intra ex profeſſo verſabor . Verum ex iis extenſum nequaquam componitur ; nam ſubſtantia , uti eſt corpus , conſtare non poteſt modis , quales ſunt hujuſmodi puncta utpote ultimus limes extenſi , & illius aut eximum initium aut ultimus finis . Quare cum hæc , v. gr. in angulis cubi, puncta nihil extenſionis & longitudinis linearum habeant , & aut ex iis lineæ incipiant aut in eadem deſinant , neceſſe non eſt ut plures habeant facies ex quibus omnes illæ lineæ oriantur . Siquidem extenſio cubi ab iis non diſtinguitur tamquam a partibus, ſed ſolum tamquam res a ſuo modo & initio , nec , ut infra conficiam , eſt aliquod aliud punctum quod cum eo proxime cohæreat, & veluti pars cum parte faciat extenſum, ut hactenus tamquam Philoſophus demonſtravi .

§ 16 Aliæ Demonſtrationes.

Nam plures aliæ ſunt ex Matheſi ſumtæ demonſtrationes , quarum unam aut alteram hoc loco proponam . Si itaque ex punctis inextenſis extenſum coaleſceret , ex pluribus vel finitis vel infinitis punctis ſuperimpoſitis linea componeretur , ex pluribus lineis ſuperficies , & ex pluribus ſuperficiebus ſolidum corpus . Hoc conſtituto ſit in aliquo plano deſcriptum parallelogrammum ABDC (*Fig. 1. Tab. 1.*) cujus latus AB ſit minus latere BD, ducaturque diagonalis AD . Si AB ex punctis ſive finitis ſive infinitis coaleſceret , itemque AD , ex omnibus punctis rectæ AB , v. gr. E, G, duci poſſent rectæ lineæ & quod ad latitudinem indiviſibiles & inextenſæ ES, GH, quæ in totidem puncta S , H rectæ AD inciderent . Quamobrem tam in AB quam in AD foret æqualis ſive finita ſive infinita multitudo punctorum & quidem æqualium ; cum enim ſingula ſint inextenſa , aliud alio majus eſſe non poteſt, nec majus ſpatium occupare . Aliter ſi alterum alteri imponeretur , quod majus foret , aliqua parte minus excederet , & ideo contra id quod ponitur , plures partes extenſas haberet . Sed ſi totidem ſunt puncta in AB quam in AD & quidem æqualia , ex quibus re-

ctæ A B , A D tamquam ex partibus coaleſcerent , rectam A B rectæ A D æqualem eſſe oporteret . nam ubi partes ſunt omnino eædem , multitudine ſcilicet & magnitudine æquales , ibi compoſita eadem & æqualia exſiſtant neceſſe eſt . Pugnat autem cum principiis per ſe notis , & cum iis quæ ab Euclide & ab omnibus Geometris oſtenduntur , latus A B eſſe æquale diametro A D , propterea quod hæc eſt major latere B D & ideo multo major latere A B , quod minus latere B D ſumtum eſt . Idque multo magis conſtat ex eo , quod latus B D produci poteſt & quamtumvis majus latere A B ſumi , qua in re eadem manente lateris A B longitudine augetur quidem diameter A D & quibuslibet partibus major fit latere A B , & nihilominus puncta totidem & æqualia in utroque exſtare eodem argumento conficitur . Quamobrem lineam, & ideo quamlibet extenſionem ex punctis conſtare clariſſime pugnat. Q. E. O.

Similiter oſtendi poteſt planum ſive ſuperficiem ex lineis non poſſe componi . Nam inter parallelas A B , C I (*Fig.* 2.) ſuper eamdem baſim A E ducantur duo parallelogramma A C H E, A G I E , quorum alterum perpendiculare , alterum vero obliquum . Ex Geometricis conſtat alterum alteri eſſe æquale . At ſi ſuperficies ex lineis conſtaret, obliquum AGIE majus eſſet perpendiculari ACHE . nam quot lineæ rectæ, v. gr. SV , ex punctis rectæ AE, v. gr. S, duci poſſunt ad CH parallelæ lineæ AC, totidem parallelæ lateri A G duci poſſunt ad GI , v. gr. SZ . Cum itaque quælibet SZ in parallelogrammo obliquo ſit major quælibet S V in recto, ſi tam parallelogrammum obliquum ex rectis A G, SZ, EI & reliquis interceptis conſtaret , quam rectum ex rectis lineis A C, S V, E H, parallelogrammum A G I E majus foret rectangulo ACHE ; quod pugnat cum Euclidæa certiſſima demonſtratione , qua ſpatii æqualitas inter hujuſmodi figuras oſtenditur .

2 Mirum eſt quot excogitarint effugia quo ab his anguſtiis evaderent , in quæ ab allatis atque ab aliis ſimilibus e Matheſi depromtis demonſtrationibus conjiciuntur contrariæ ſententiæ propugnatores . Verum quo magis ſe ab his expedire conati ſunt , eo ſe in intricatiores laqueos induerunt . Cujus dicti ut veritas conſtet , aliqua ex his effugiis proponam . Atque in primis nonnulli magnas huic materiæ tenebras offudere trita illa dictinctione ſenſus mathematici & phyſici, & Geometris omnia tamquam mathematice & abſtracte vera aſſenſi

ſunt,

Digitized by Google

ſunt, nihil vero phyſice, atque re ipſa, propterea quod Geometræ, ut ajunt, extenſionem tamquam a rebus extenſis divulſam contemplantur, & in ea puncta omni extenſione carentia, lineas omni latitudine, & ſuperficies omni profunditate conſiderant, quæ omnia phyſice vera non ſunt. His generatim conſtitutis ad propoſitam difficultatem reſpondent eam inniti punctis & lineis & aliis, quæ a Geometris ut vera ponuntur, quæ tamen a veritate multum abhorrent.

3 Verum hanc de punctis, lineis atque ſuperficiebus diſputationem pauliſper ſepono. Ad præcludendum Adverſariis effugium id unum ajo, quamquam in quantitate extenſa hæc omnia non forent, tamen ab iis negari non poſſe qui extenſum ex inextenſis componi volunt. Siquidem unum ex hiſce inextenſis eſt punctum, aut occupat ſpatii punctum omnis extenſionis expers, plura, quorum aliud alii recta impoſitum ſit, lineam rectam omni latitudine carentem conſtituunt, & plures lineæ juxta ſe poſitæ & in rectum diſpoſitæ planam ſuperficiem facere debent. Quamobrem quis ex iis qui hanc ſententiam defendunt, inficiari poteſt inter eaſdem parallelas quæ ſint veræ rectæ, duo vera plana ſuper eadem baſi poſſe duci, & ex omnibus baſis veris punctis ad latera oppoſita utriuſque veras rectas perduci, aut ducta vera diametro in recto oblongo parallelogrammo, ex latere, quod diametro ſit minus, poſſe ex totidem veris lateris punctis totidem veras lineas rectas ad totidem vera puncta diametri produci? Hoc autem conceſſo quis non videt illa abſurda conſequi, quæ nos inde concluſimus? Quamobrem ſaltem in eos qui extenſum inextenſis conſtare volunt, dictæ Matheſeos demonſtrationes quammaxime valent. Quod in præſenti ſatis ſuperque nobis eſt, qui nihil hic ſtabilire, ſed hoc ſyſtema tantummodo evertere contendimus.

4 Hoc effugio ita præcluſo alterum ſibi paravit doctiſſimus Auctor, quod ita ſe habet. Obliqua linea AD (*Fig.* I.) eo plus tendit a D verſus B, quam a B verſus A, quo linea BD eſt major linea BA. Ergo non quodlibet punctum lineæ DA diſcedit a B verſus A, ideoque in linea DA puncta a B verſus A paria non ſunt punctis a D verſus B, ſed aliquæ ſunt in DA minime lineæ a linea DB æquidiſtantes. Et paulo infra. Unde ſi linea DA longior eſt linea BA, in DA ſunt partes quæ non pergunt ſecundum BA, ſed per aliam viam, ſcilicet ſecundum DB. His poſitis facile infert lineam ex. gr. GH, quæ ducatur parallela BD, plura in

AD

AD longiori quam in AB breviori puncta occupare, ſcilicet in loco H lineæ AD congruere cum parva illa lineola quæ a latere DB æquidiſtat.

5 Quo argumentum inde a nobis petitum facile dilueretur, ſi prima in hac concluſione bene confecta fuiſſent. Verum quia hæc male conſtituta fuerunt, nihil roboris e noſtra ratione decedit. Sed antequam id planum faciam oſtendendum ſuſcipio dari poſſe rectam AD quæ nullis lineolis rectæ DB parallelis conſtet, idque tum in ſententia Zenonis, tum in ſyſtemate laudati Auctoris, qui licet puncta Zenonica explodat, tamen in extenſione inextenſa admittit ſive, ut ipſemet ait, extrapoſitiones quæ ſint omnis extenſionis expertes, & ex quibus juxta ſe collocatis extenſio componatur. Itaque intelligantur deletæ omnes lineæ, & ſola puncta A & D ſub oculos mentis cadant. Nonne a D uſque ad A puncta ita ſemper imponi directo poſſunt ut nulla lineola exſiſtat quæ alteri rectæ ſit parallela, a qua tota AD deflectit? Nam qua de cauſſa a puncto eodem inextenſo D duæ rectæ DA, DB angulum ADB facientes ſaltem incipere poſſunt, niſi quia eidem puncto D alia duo puncta quorum alterum recta tendit verſus plagam A, alterum verſus B, ſuperimponi queunt quæ diverſas lineolas rectas ſibimet minime parallelas una cum puncto D conſtituant. nam cum ab uno puncto incipiant & duobus tantummodo coaleſcant, ſi parallelæ forent, invicem omnino congruerent & ad nullum angulum concurrere poſſent. Manet igitur duas illas lineolas angulum facere & nullatenus alteram ab altera æquidiſtare. Hoc poſito nonne patet quemadmodum duæ lineolæ rectæ ex duobus ſingulæ punctis factæ ſunt; ita extremis harum punctis alia directo puncta ſuperaddi poſſe, quæ rectas lineolas cum prioribus congruentes, & ideo nulla ſui parte ſibimet parallelas componant, idque ob eamdem rationem uſque ad quælibet puncta A & B? Hoc autem facto num a Philoſopho negari quit a puncto quolibet A ad rectam DB tertiam quamdam rectam AB per adjectionem punctorum poſſe duci, quæ ad perpendiculum eidem inſiſtat? Quibus omnibus conſtitutis nemo non videt a quolibet puncto lateris AB veras lineas duci poſſe ad quælibet vera puncta diametri AD, ideoque noſtram rationem ad evertendam ſententiam continui ex punctis compoſiti neque ab effugio laudati Auctoris labefactari.

6 Cujus rationis pondus cum alii Philoſophi ſe ſuſtinere non poſſe

poſſe viderent, miſſa directa reſpondendi methodo, quæ in duobus ſuperioribus reſponſis adhibita fuit, ad obliquam ſe converterunt, ut onere cum Adverſariis diviſo ipſi minus premerentur. Dixerunt enim etiam in eorum ſententia qui extenſum continuum ex inextenſis componi negant, ex punctis lateris AB totidem lineas duci poſſe ad totidem puncta diametri AD, & icciroo hinc conſequi idem abſurdum quod inde elicuimus. Quamvis enim rectæ AD, AB ex punctis non componantur, tamen cum puncta ſint rectarum fines, ipſæ rectæ ſint æquales oportet ſi totidem ſint puncta in utriſque. Nam ubi fines omnes, qui poſſunt excogitari, ſunt æquales, ibi etiam inter res, quæ iiſdem terminantur, æqualitas intercedat neceſſe eſt. Quamobrem ratio, quam inde petivimus, in utramque valet contradictionis partem, cumque ex duabus contradictoriis altera vera ſit, altera falſa, conſequens eſt in ejuſdem concluſione quidquam vitii ſubeſſe tametſi perſpici ſatis non poſſit.

7 Ab his ſe facile expediunt nonnulli, qui nulla vera puncta & omnis extenſionis expertia, & ideo nullas veras lineas ſine ulla omnino latitudine poſſe in continuo extenſo aut deſignari aut percipi neque a Deo contendunt. Nam cum apud ipſos tam latus AB quam diameter AD latitudinem aliquam habeant, ſi æqualis tametſi minimæ latitudinis ponantur, rectæ æqualis pariter latitudinis ES, GH minus ſpatium occupabunt in latere AB cui ad rectos angulos inſiſtunt quam in diametro DA, cui ad obliquos. Nam perpendiculares SE, HG dum ab interiori extremitate lateris AB ad extimam percurrunt, breviſſimam viam capeſſunt; dum vero oblique ES, GH ab altero extremo latitudinis diametri AD ad alterum tranſgrediuntur, eo longiorem viam tenent quo incidunt obliquius, & eo magis oblique incidunt, quo diameter AD latere AB longior eſt. Ex quo conſtat qui fieri poſſit ut diagonalis AD ſit major latere AB, quia videlicet ſingulæ partes extenſæ S & H ſingulas partes extenſas E & G magnitudine excedunt.

8 Hoc reſponſo adverſariis omnino ſatisfieret ſi verum id eſſet quod ſumitur, nulla puncta omni extenſione & nullas lineas omni latitudine carentes poſſe deſcribi. Verum quia ſententiam hujuſmodi tamquam alienam a veritate refutabimus infra, ideo hic ad aliam reſpondendi rationem noſmet convertimus. Et dicimus demonſtrationem æqualitatis diametri AD & lateris AB valere quidem in eos qui rectas AD, AB ex in-

ex-

extenſis componi volunt ob rationem quam in anteceſſum expoſuimus, non autem in illos, qui inextenſa quidem admittunt, ſed non tamquam partes ex quibus extenſum componatur, & ſolum ut modos & terminos, quibus extenſum definitur. Nam in priori ſyſtemate proxime nulloque alio intercepto poſt punctum inextenſum G invenitur punctum aliud E quod cum primo cohæret & extenſum facit, itemque poſt H proxime invenitur aliud S & poſt S & E alia proxime & gradatim occurrunt uſque ad A, ex quibus totæ rectæ G A, H A coaleſcunt. Quare ſi ſingula puncta in utraque ſint æqualia & totidem numero, totam rectam AG ex iis coalitam æqualem toti rectæ A H ex æqualibus coalitæ æqualem eſſe oportere nemo non videt. At cum in noſtra ſententia puncta ſint tantum modi & fines rei extenſæ, & duo fines ſine ulla intercepta re, quam utrimque definiant, eſſe non poſſint, iccirco poſt punctum G ſumi quidem poteſt punctum E in infinitum ſemper proximius G quam alia omnia quæ antea ſumta fuerint, numquam tamen ad punctum E proxime cohærens cum G perveniri poteſt, eo quod nullum eſt hujuſmodi punctum, ſed ſemper aliqua minima recta G E inter utrumque ex iis quæ deſignata & intellecta fuerint, interjiciatur oportet. Idem eſt de punctis H & S, quod ſemper aliquam rectam HS interpoſitam habent. Atqui lineolæ ſingulæ interpoſitæ HS, utpote quæ oblique incidunt in rectas ES, GH, majores ſunt ſingulis lineolis GE; ergo & recta HA ex illis compoſita rectam GA his conſtantem excedat neceſſe eſt.

9 Nec vero ex eo quod ductis quibuslibet rectis ES, GH totidem in AB puncta E & G deſignari poſſunt quot in AD, argui poteſt puncta & fines in AD æqualia eſſe punctis & finibus in AB. nam non iccirco totidem definiri queunt, quod omnia unius ſint æqualia numero omnibus alterius; id enim plane falſum eſt, propterea quod in AD & SH multo plura ſunt quam in AB & EG. Sed eo quia cum tam in EG minori quam in SH majori infinita ſint, & nihiloſecius ad nulla duo proxime vicina perveniri poſſit, in neutra linea ad finem deſignationis punctorum accedi quit. Et revera quantumcumque rectas EG, SH diviſeris, ES, GH propius admotis, ſemper reliqua SH major erit reliqua EG & majus in longum ſpatium occupabit & pluribus finibus atque punctis definietur.

10 At enim ſi res ita ſe haberet, Methodus indiviſibilium Cl. Cavallerii, quæ omnibus Geometris nunc probatur, non parum videretur labefactari. nam quum in ea Methodo lineæ ex punctis,

ctis , ſuperficies ex lineis , ſolida ex ſuperficiebus conſtare ponantur , duarum quantitatum æqualitatem ſe demonſtrare Geometræ putant , ſi quot in altera ſunt elementa eidem aut lineæ aut ſuperficiei parallela , ſive eidem lineæ aut ſuperficiei recta ; totidem in altera reperiri poſſunt , quæ & prioribus æqualia ſint, & ab eadem linea aut ſuperficie æquidiſtent , ſive eidem lineæ aut ſuperficiei ad perpendiculum inſiſtant. Ex. cauſſa rectangulum ACHE (*Fig.* 2.) æquale oſtendunt parallelogrammo AGIE, propterea quod ſi quælibet recta DI parallela baſi CH & ad perpendiculum AC perpendicularis uſque ad T punctum lateris EI parallelogrammi AGIE producatur, ſemper DI rectæ LT æqualis deprehenditur . Jam vero etiam ad rectas AB , AD (*Fig.* 1.) totidem rectæ ES, GH ad eamdem rectam AB perpendiculares & ab eadem AC æquidiſtantes duci poſſunt quæ ex rectis AB, AD totidem puncta abſcindunt . Ergo ſi Cavallerii Methodus bona eſt , ut revera bonam putant etiam ii qui continuum ex indiviſibilibus ſive inextenſis componi negant, rectam AB rectæ AD eſſe æqualem inde concluditur, atque ideo manet difficultatem contra Zenonicos inde petitam in eorum etiam Adverſarios valere, atque ideo ab iiſdem prius ſolvendam quam aliis enodandam objiciant.

11 Hanc ego difficultatem eo libentius propoſui, quod in ejuſdem ſolutione exſequi incipiam quod in hac de quantitate diſputatione in primis propoſitum habeo. Nam præter illa quæ a Philoſophis tractari ſolent , in animo eſt nonnullas intricatiores a Mathematicis uſurpatas Methodos ad examen revocare , non quod de illarum veritate dubitem , ſed in eum finem ut nodos aliquos extricem qui negotium faceſſere ſolent, ut quomodo ſint accipiendæ & quatenus in iis verſari liceat oſtendere nitar, ut denique ad illam ſtatus mathematici a phyſico diſtinctionem vel eliminandam, vel prout par eſt explicandam, ontologicis etiam principiis earum principia fulcire, & utrorumque concordiam probare contendam . Itaque P. Dechales lib. 1. Indiviſibilium in ea ſententia eſt puncta, ex quibus in Indiviſibilium Methodo lineæ componi dicuntur, eſſe ipſa in ſe vere extenſa , ſed quæ ſi ad lineam cujus ſunt partes, referantur, rationem habeant minimi puncti & omni veluti extenſione carentis; propterea quod minora & minora quantum quis voluerit & in infinitum ſumere poteſt . Unde conſequens eſt etiam lineas aliqua latitudine & ſuperficies aliqua profunditate præditas in eadem Methodo ſumi , tametſi habita ratio-

tione ſuperficiei, illæ tamquam omnis latitudinis expertes, & habita ratione ſoliditatis, hæ tamquam omni profunditate carentes percipi poſſint. Id vero Dechales eo conſilio ſe facere profitetur, ne methodum mathematicam, quam apud omnes certiſſimam eſſe opus eſt, cum difficultatibus hypotheſum, in quibus variant Philoſophi, implicet. Nam ſi puncta omnis extenſionis & lineæ omnis latitudinis & ſuperficies profunditatis expertes aſſumerentur, res in ſyſtema recideret a nobis & a multis aliis exploſum Zenonis, qui extenſionem ex punctis inextenſis componi arbitratur.

12 Sed enim vel hic doctiſſimus Auctor accipit puncta finita & lineas finitæ latitudinis, nec non ſuperficies finitæ profunditatis, quæ ſcilicet ad quantitates ex illis coalitas finitam rationem habeant & ex quibus numero finitis eædem componantur, vel hæc omnia elementa ſumit veluti infinite parva, ex quibus nimirum in infinitum multiplicatis quantitates coaleſcant. Si primum, nulla eſt in methodo Cavallerii figurarum æqualitatis demonſtratio, & eſt, ut ajunt, mera petitio principii. Nam ſi lineæ DI, LT (*Fig.* 2.) ex quibus numero definitis parallelogramma æqualia ACHE, AGIE coaleſcunt, ſuam latitudinem finitam habeant, non ſunt niſi parva quædam parallelogramma, alterum rectum, alterum obliquum ſupra æquales baſes & inter eaſdem parallelas conſtituta. Non igitur ſumere potes hæc eſſe æqualia inter ipſa, ut æqualitatem majorum ACHE, AGIE quæ conſtant iiſdem, inde conficias, niſi æqualitas parallelogrammorum quæ inter eaſdem parallelas & ſuper æqualibus baſibus poſita ſint, tibi aliunde conſtiterit. Aliter peteres tibi dari ut demonſtratum id ipſum quod demonſtrandum aggrederis. Reſtat ergo ut quod hoc ſæculo magis perſpicuum factum eſt, Cl. ſua tempeſtate Philoſophus, elementa quantitatum infinite parva ſumſerit, ſi ad ſuas quantitates referantur. Quod fieri non poteſt niſi ab eo qui mathematicis demonſtrationibus aſſentitus qualibet quantitate minorem in infinitum haberi poſſe pro certo habeat. Hoc autem defendi nequit niſi difficultatibus diſſentientium Philoſophorum impliceris, & adhuc propugnatum ab aliquibus ſyſtema Zenonis finitorum in qualibet quantitate punctorum explodas. Quamobrem exemplo tuo doces Philoſophorum diſſenſum ſuſdeque habendum, cum aliquid certis & evidentibus matheſeos demonſtrationibus conficitur. Jam vero iiſdem cogitur & efficitur in re extenſa vera

ra

ra puncta omni extenſione, veras lineas omni latitudine, veraſque ſuperficies omni profunditate carentes exſtare & deſignari; quemadmodum infra planum fiet rationibus tum mathematicis tum philoſophicis, & illa præſertim numquam ſoluta & numquam ſolvenda quod, ſi cubum cubo imponas, alter alterius libramentum ſine ulla omnino profunditate tangit, quam ſuo loco latius explicabimus. Quamobrem contraria quorundam Philoſophorum opinio Mathematicis obſtare non poteſt, quominus in methodo Indiviſibilium vera puncta, lineas & ſuperficies adhibeant, ſi modo elementis ita ſumtis id quo Cavallerius ſpectabat in oſtendenda figurarum & ſolidorum æqualitate & aliis proportionibus conſequi poſſint. Re autem vera hujuſmodi elementa ad hunc finem obtinendum accommodata ſunt non quidem ipſa per ſe, ſed ſi quidquam aliud notum ante ponatur. Quo conſtituto eadem ſumere poſſumus tamquam extenſa ſive finita ſive infinite parva.

13 Eſt autem hujuſmodi. Parallelogrammum quod a duabus rectis ad rectum angulum concurrentibus in ſe invicem ductis fit, eſt maximum omnium quæ ab iiſdem rectis ad quemcumque alium angulum ſive acutum ſive obtuſum concurrentibus producitur. Sit enim rectangulum ABCD (*Fig.* 3.) factum ex duabus rectis A B, B C rectum angulum AB C facientibus. Dico eſſe majus tum quolibet A B c *d* quod fit iiſdem rectis A B, B c quemlibet acutum angulum ABc facientibus, tum quolibet A B H d facto ex iiſdem rectis A B, B H quæ ad quemlibet obtuſum A B H concurrant; itaque conficio. Cum BC, B c ſint æquales & angulus BCD rectus, punctum extremum c uſque ad DC pervenire non poterit. Quare c *d* parallela rectis AB & DC abſcindet ex A D minorem A O & ex B C minorem B E, ſi uſque in E producatur; & formabuntur duo triangula A O *d*, B E c æqualia, ut ex laterum A *d* & B c, A O & B E, & angulorum *d* A O, c B E æqualitate aperte concluditur. Unde rectangulum A B E O erit æquale parallelogrammo A B c *d*. Sed rectangulum A B E O eſt minus rectangulo ABCD; deficit enim toto rectangulo OECD. Ergo rectangulum A B C D eſt majus parallelogrammo A B c *d*, tametſi utrumque ex rectis æqualibus conficiatur. Idem oſtendetur de quocumque alio parallelogrammo A B H d.

14 Quoniam vero communis rerum menſura debet eſſe id quod eodem ſemper modo eoque uno ſe habet, & anguli obliqui infiniti eſſe poſſunt, rectus autem unus tantum eſt, ideoque & rectangulum unum eſt & idem manet: hinc pro communi menſu-

menſura omnium parallelogrammorum æqualium quorum rectæ diverſos angulos faciant, rectangulum aliquod iiſdem æquale ſumetur.

15 Jam vero ex æqualitate modo oſtenſa triangulorum AO*d*, BEc perſpicuum ſit parallelogramma omnia conſtituta ſuper baſim AB & inter eaſdem parallelas *d*E, AB eſſe æqualia rectangulo inter eaſdem parallelas & ſuper eadem baſi conſtituto, ideſt facto ex eadem baſi AB ducta in perpendicularem BE quæ ex vertice ſive ex aliquo puncto E in hanc baſim ducatur. Quamobrem alterum in alterius locum ſine ullo errore ſubſtitui, & utrumque tamquam ex lineis rectis baſi AB parallelis & ad latus BE perpendicularibus compoſitum ſumi poterit.

16 His ita conſtitutis ad Methodum Indiviſibilium veniamus, & de illius veritate in triplici illa poſitione linearum experimentum capiamus. Primo itaque cum rectæ ſine ulla omnino latitudine ſumuntur, parallelogrammum obliquum AGIE æquale eſt rectangulo ACHE (*Fig.* 2.) ſuper eamdem baſim AF interque parallelas eaſdem AB, CI conſtituto non ob eam cauſſam præciſe quod totidem in utroque duci poſſunt rectæ æquales baſique parallelæ, & ad latus AC ad baſim rectum perpendiculares v. gr. DI, LT, ſed quia conſtat aliunde & notum a Cavallerio ponitur tam rectangulum ACHE quam parallelogrammum AGIE eſſe æquale producto ex baſi AE in latus AC baſi rectum, atque iccirco eſſe æqualia inter ſe. Atque id in cauſſa eſt cur hic celebris Mathematicus pro fundamento & cardine totius methodi poſuerit omnia utriuſque quantitatis elementa a baſi æquidiſtare oportere. Hoc enim fit ut in elementum ad baſim perpendiculare ad rectos angulos incidant, atque ideo quantitates ex iis coalitæ facto ex baſi in perpendiculum æquales exſiſtant. Id vero in omnibus aliis hujuſce methodi demonſtrationibus ſemper obſervatur. Atque hinc intelligitur cur ad oſtendendam parallelogrammorum ACHE, AGIE inæqualitatem in hac hypotheſi, qua veras quidem lineas ſine ulla penitus extenſione in continuo poſſe deſignari, ex iis tamen tamquam ex partibus continuum haud conſtare volumus, nihil valeat id quod in contraria hypotheſi extenſi ex inextenſis compoſiti numero hujus § 1 concluſimus. Nam cum parvum rectangulum ASVC æquale ſit facto ex baſi AS & perpendiculo SV, non tamen parvulum parallelogrammum AGZS illi reſpondens eſt æquale facto ex baſi eadem AS in latus obliquum

SZ

SZ ob hanc ipſam cauſſam, quod obliquum eſt, ſed illo minus exſiſtit. Unde etſi quælibet recta SZ in parallelogrammo ſit major qualibet recta SV in rectangulo, nihilominus alterum alteri eſſe poteſt æquale, ſi aliunde id effici queat, & quia efficitur, revera eſt. Cum enim, ut toties adverti, continuum ex inextenſis & planum ex veris lineis non componatur, æqualitati omnium duarum quantitatum inæqualitas non officit, nec æqualitati æqualitas præciſe prodeſt, quia rectæ ex. gr. DI, LT æquales ſunt, ſed id juvat quod utrumque parallelogrammum ADIE, ALTE facto ex eodem perpendiculo AD in baſes æquales DI, LT eſſe æquale aliunde cogitur & efficitur.

17 Id vero nobis rationem ſuppeditat diluendi quod ab Adverſariis num. 10. fuit objectum, explicandique cur ſalva methodo indiviſibilium, etſi rectæ ES, GH (*Fig.* 1.) ad eamdem baſim AB perpendiculares & ab eodem latere CA æquidiſtantes per totidem in utraque recta AB, AD æqualia puncta inextenſa tranſeant, tamen inter rectas eaſdem AB, AD æqualitatem intercedere ab eadem methodo non conſequatur. Deeſt enim in hujuſmodi rectis ratio, ut ajunt, *formalis* qua parallelogrammorum quæ ſuper eadem baſi & inter eaſdem parallelas conſtituta ſunt, æqualitatem oſtendimus. Siquidem in lineis nulla eſt quantitas facta quæ ex duabus invicem ductis coaleſcat. Unde quemadmodum in parallelogrammis ACHE, AGIE (*Fig.* 2.) habenda non eſt ratio ejus quod quælibet recta SZ in obliquo ſit major qualibet recta SV in recto, quia facto ex AS in SV non eſt æquale parallelogrammum obliquum AGIE: ita in oſtendenda aut æqualitate aut inæqualitate rectarum AB, AD (*Fig.* 1.) pro nihilo haberi debet omnium quæ in utraque deſignari poſſunt, punctorum æqualitas, propterea quod eædem rectæ nulli propemodum facto æquales ſunt.

18 Liquet igitur methodum indiviſibilium in prima hypotheſi nihil detrimenti capere ex eo quod rectæ AB, AD non ſint æquales, tametſi totidem in utraque puncta æqualia in infinitum deſignari poſſunt. Nunc videamus utrum in aliis duabus idem accidat. Primo itaque ſi velimus omnia elementa DI, LT (*Fig.* 2.) utriuſque parallelogrammi ACHE, AGIE eſſe extenſa finitæque & æqualis latitudinis: tunc bona quidem eſt Indiviſibilium methodus, non tamen ipſa per ſe tantum, ſed ſi ex ſupra oſtenſis jam confectum requirat, & ponat in anteceſſum quodlibet parvum rectangulum DI eſſe æquale reſpondenti parvo paralle-

logrammo L T. Cum enim in utroque totidem numero & æqualis latitudinis ſumi poſſint, & ex iis ut extenſis parallelogramma majora reapſe componantur; ſummam omnium unius quantitatis ideſt rectangulum ACHE ſummæ omnium alterius ideſt parallelogrammo AGIE eſſe æqualem rite concludi poteſt. Hoc autem cadit etiam in alia minima parallelogramma in longitudinem ducta SV, SZ; nam cum ſint inter eaſdem parallelas AB, CI & ſuper eadem baſi S, æqualia eſſe, & ideo etiam ſummam omnium eſſe oportere conficitur.

19 Qua in hypotheſi latæ rectæ ES, GH (*Fig.* 1.) minima quidem parallelogramma in utraque recta AB, AD æqualia abſcindunt, utpote quæ ſuper æquales baſes & inter eaſdem parallelas limites ſcilicet parvi parallelogrammi ex cauſſa ES ea conſiſtere intelliguntur & ſub oculos ponuntur, ſi hæ parallelæ & limites parallelogrammi ES ſchemate diſtinguantur, ſed quorum alterum S ut obliquum altero E ut recto longius eſt, atque ideo in longitudinem AD longiora latera habet.

20 Hæc omnia in tertiam etiam hypotheſim valent. nam excepta magnitudine etiam parallelogramma infinite parva percipiuntur ut vera parallelogramma ex quibus majora coaleſcunt. Sed quia methodus infinite parvorum ſuas habet peculiares difficultates quas infra pro virili parte examinabimus, hic longiores non erimus, & quo finem his animadverſionibus imponamus, illud tantum monebimus in methodo indiviſibilium elementa infinite parva tum eſſe potiſſimum uſui, cum non omnia figuræ alicujus elementa æqualia ſunt ut in parallelogrammis contingit, ſed aut creſcunt aut decreſcunt ut in triangulis & in figuris curvilineis accidit. Tunc enim factum ex duabus quantitatibus, quo methodum Cavallerii præſertim inniti ſupra docuimus, non eſt id quod ex baſi in totum figuræ perpendiculum fit, ſed coaleſcit ex ſumma omnium factorum quæ ex elementis baſi parallelis in perpendicula infinite parva ſingulorum parallelogrammorum, quæ ſunt infinite parva, producuntur.

21 Sed de his alibi enucleatius. Nunc antequam ab hoc loco diſcedam, illud adverto mea ſententia in methodo Cavallerii primo non ſupponi elementa quæ ſint quantitates infinite quidem parvæ ſed ejuſdem ſpeciei ac illa quæ ex iis elementis conſtare ponitur, ſed quantitates diverſæ ſpeciei, ſcilicet veras lineas inextenſas tamquam elementa ſuperficierum, & veras ſuperficies tamquam elementa ſolidorum; ne ſcilicet in eo offendat quod dici-

dicitur petitio principii , ut ſupra monuimus . 2. præter æqualitatem ſingulorum elementorum in duabus quantitatibus , & æqualem numerum, etiam opus eſſe ut eodem modo ex utraque parte diſpoſita ſint , quo illarum æqualitatem eadem unica methodo monſtrare poſſimus . Nam cum poſitis his tribus æqualibus in utraque quantitate omnia omnino eadem ſint & nullum propemodum diſcrimen inveniri queat , eaſdem eſſe æquales aperte conſequitur. Atque hac ratione conficitur æqualitas duorum rectangulorum aut parallelogrammorum quorum anguli æquales, quæque inter eaſdem parallelas & ſuper æqualibus baſibus fuerint conſtituta ; deficiente vero eadem diſpoſitione ut in rectangulo & parallelogrammo obliquo, vel in duobus obliquis quorum anguli ſint inæquales , nihil hac methodo præciſe confici poſſe; propterea quod deficit præcipua immo unica ratio æqualitatis, quæ in eo poſita eſt ut omnia utrobique eadem ſint. Quo ſatisfit propoſitæ difficultati. Nam in rectis A B, A D (*Fig.* 1.) puncta in recta A B & puncta in recta A S ſimiliter diſpoſita non ſunt ratione habita rectæ E S .

Quod ſi regeras neque in rectangulo A C H E & parallelogrammo æquali A G I E (*Fig.* 2.) rectas D I , L T eodem modo eſſe diſpoſitas , nihilo tamen minus Cavallerii methodo eorum æqualitatem oſtendi , reſpondebo illud hac præciſe methodo non demonſtrari ſed pro demonſtrato haberi , quod alia ratione , ut planum fecimus, conficiatur .

§ 17 Syſtema P. Buskovik

Ex quibus omnibus compertum ſit reſponſis quæ hactenus a Philoſophis excogitata fuerunt, non poſſe infirmari allatas rationes quibus continuum extenſum ex inextenſis componi nequire probavimus. Verum Diſſertationis de lumine , quæ anno 1748. Romæ prodiit ex Typographia Komarck , Cl. Autor , quem ſcimus eſſe doctiſſimum P. Buskovikium S. J. in Collegio Romano Matheſeos Profeſſorem , 2. parte aſſentitur quidem continuum extenſum ex inextenſis conſtare non poſſe, ſed ſimul negat dari poſſe id quod ſit eodem tempore continuum & extenſum , & corporum extenſionem tamquam minime continuam defendit. Cujus Auctoris ſententia accuratius exponenda eſt . Primum itaque numero 4. ponit omnia materiæ elementa ſive puncta *prædita viribus quibuſdam , quæ ipſa determinent ad accedendum ad ſe invicem vel recedendum a ſe invicem pro diverſa diſtantia eorumdem* , & præſertim in minimis intervallis vires eſſe

expultrices & majorem acceſſum impedientes, haſque vires in diſtantiis infinite parvis infinitas in repellendo evadere, adeo ut nulla vi impreſſa finita duo hujuſmodi puncta uſque ad mutuum contactum compelli poſſint. Quorum omnium ingenioſam affert rationem num. 41. & ſeq. de qua mihi alium in locum integrum ſervo. Deinde num. 8. qualia ſint hæc puncta explicat his verbis. *In primis oportet prima materiæ elementa eſſe puncta indiviſibilia & inextenſa, nec ullam eſſe utcumque exiguam materiæ particulam perfecte ſolidam & omnino continuam. Si enim aliqua eſſet hujuſmodi particula, jam partes contiguæ ob vim repulſivam, diſtantia illa minima..... in infinitum imminuta, auctam in infinitum, a ſe invicem recederent, & ex ipſa hypotheſi partium contiguarum contiguitas ipſa deſtrueretur. Diſtant igitur neceſſario a ſe invicem omnes particulæ materiæ utcumque exiguæ, & prima ipſius materiæ elementa partes ſibi contiguas non habent ex quibus coaleſcant, ſed ſunt puncta indiviſibilia & inextenſa a ſe invicem per aliquod intervallum disjuncta.* Ex eo vero quod vis expultrix in acceſſu punctorum ad ſe invicem major fit & in acceſſu ad ſolam diſtantiam infinite parvam, ſive quoad ſe viciſſim contingant, infinita evadit, num. 10. ducit rationem impenetrabilitatis eorumdem, quia ſcilicet quælibet finita vis uni impreſſa verſus alterum punctum a vi expultrice contraria ſemper creſcente extinguitur antequam ad contactum perveniat. Unde concludit his verbis. *Quare ad hoc ut puncta illa compenetrentur, ſive idem ſpatii punctum occupent, infinita vi opus erit, quam ſolus Deus poteſt exerere, adeoque ipſe ſolus poterit corpora compenetrare.* Unde efficitur in ſententia Buskovikii continuum ex punctis inextenſis non poſſe conſtare eo quod ipſe diſerte fatetur puncta inextenſa ubi ad contactum pervenerunt, compenetrari. Ad extenſionem quod attinet ſic illam planiſſime explicat num. 13. *Extenſionem mathematice continuam nos in corporibus nuſquam admittimus, ne in minimis quidem eorumdem particulis, cum admittamus puncta prorſus indiviſibilia diſperſa per ſpatium extenſum in longum, latum & profundum; ſed ubique admittimus extenſionem tantum phyſice continuam. Continuum autem mathematicum reale admittimus in motibus tantum, imaginarium autem in ſpatio & tempore. Hinc materiæ diviſibilitatem in infinitum non admittimus, nec quidpiam contra noſtram ſententiam pugnant Geometrica argumenta, quæ omnia innituntur extenſioni mathematice continuæ. Nam ſi aliqua materiæ maſſa habeat per longitudinem*

diſ-

diſpoſita, exempli gratia puncta 11., *poterit quidem longitudo illa eadem ſecari in partes quodlibuerit. Sed ubi ſectionum & partium numerus excreverit, jam non ipſa materia ſecabitur, ſed ſpatiola omni materia carentia. Si ea puncta diſtiterint ad æqualia intervalla, habebuntur* 10. *intervalla terminata iis* 11. *punctis. Si biſſecetur illa longitudo; ſectio tranſibit per ipſum intermedium punctum, quod non ſecabitur, ſed erit in ipſa linea ſecante, quinque intervallis remanentibus utrinque in ſingulis ſegmentis. Si ſingula ſegmenta ſecentur iterum in partes quinas; lineæ octo ſecantes ea bina ſegmenta tranſibunt ſingula per ſingula ex reliquis* 8 *punctis. Sectiones ulteriores per nullum punctum tranſibunt. Segmenta* 20 *terminabuntur punctis materiæ; cum nimirum ſingula puncta intermedia terminent bina ſegmenta hinc inde, extrema autem puncta ſingula unicum; reliqua omnia ſegmenta nullum materiæ punctum continebunt, nullo terminabuntur. Si alia ratione inſtitueretur diviſio, puncta poſſent ſingula ſingulis ſegmentis contineri, ita ut undecim tantum ejuſmodi ſegmenta continerent aliquid materiæ, reliquis purum ſpatium imaginarium continentibus*. Hactenus P. Buskovik, cujus theoria multæ in hoc de quantitate continua negotio difficultates ſolvuntur.

2. Inter alias difficultates evaneſcet ea quam §. 15. num. 1. propoſui. Nam ſi ex. gr. recta AD (*Fig.* 1.) conſtaret ex 100. inextenſis punctis, non repugnat breviorem rectam AB ex totidem eſſe compoſitam, dummodo minima vacua intercepta inter ſingula puncta rectæ AB ſint tanto minora, quam vacua pariter intercepta inter ſingula rectæ AD, quanto recta AB eſt brevior altera AD. Ex eo vero quod ſingulæ rectæ GH, ES & aliæ infinitæ æquidiſtantes a BD ſecant rectas AB, AD, non efficitur totidem eſſe in utraque linea puncta, propterea quod ratione habita rectæ AD poſſunt plura puncta interſectionum incidere in ipſamet puncta ex quibus eadem coaleſcit, quam ratione habita rectæ AB, in cujus vacua incurrere poſſunt.

3. Ut quid ſentio de ſyſtemate tam ſubtiliter excogitato doceam, primum adverto extenſionem ita explicatam ſolum eſſe apparentem, nihilque ſolidi quodque extra noſtras ſenſationes exſiſtat, complecti. Nam illa minima vacua inter duo quælibet puncta interpoſita reipſa extenſa non ſunt, nam ſi, ut §. 9. probavi, actu extenſum non eſt vacuum quod inter duos cubiculi parietes continetur, tametſi exterioribus finibus

extenſis quodammodo terminetur, multo minus extenſum erit inane quod nullos alios habet fines niſi duo inextenſa. Quoniam vero nec in punctis inextenſis vera extenſio eſt, inde ſequetur corpus ex iis ſe non contingentibus coalitum vera extenſione carere. Quare corporum extenſio erit apparens, & quædam ſpecialis in noſtra mente excitata ſenſatio, ſive idea ab aliis diverſa quibus afficitur. Jam vero quod Deus corpora tali pacto compingere potuerit, & nihilominus eaſdem extenſionis ſenſationes in noſtra mente excitare, ego inficias non iverim, qui pro certo habeo poſſe Deum ipſum per ſe in anima operari quæ adminiculo corporum nunc operatur. Verum neque negari poteſt ipſum potuiſſe iiſdem omnino ſenſationibus colorum, ſaporum, ſonorum, aliarumque rerum aſpectabilium, quibus nunc afficimur, animam noſtram pulſare, tametſi nullum corpus, ut quidam Philoſophi vaticinantur, exſtaret. Attamen nullus ſanæ mentis affirmat rem ita eſſe & jure ac merito. Nam cum duo ſint principia quibus noſtrarum cognitionum innititur certitudo, ſenſus, unde eſt omnium idearum origo, & ratio ſeu vis mentis ad illas ideas attendentis eaſque inter ſe comparantis, quod conſtanti ſenſuum experientia firmatur, ab omnibus tamquam certum & exploratum admittitur, niſi id eſſe non poſſe ratio quædam evidenter concluſa ſuaſerit. Nam ſi propter quaſcumque ſubtiliter excogitatas in contrarium rationes, quæ difficultatem aliquam non adeo clare ſolvendam faciant, nobis extorqueri ſinamus quod perpetuo & conſtanti ſenſuum teſtimonio roboratur, quotumquodque erit certum ac ratum in Philoſophicis Diſciplinis? Quamobrem hac uſi methodo, quæ nunc regnat in Scholis, omnibus præter aliquos paucos, quibus non philoſophari ſed ſomniare & optare placet, in eo convenit quod corpora vere exſiſtant, tametſi ex altera parte Deus ſine diſpendio ſenſationum animæ noſtræ aliter facere potuerit, & ex altera non ſint leves in contrarium rationes, quæ tamen rem non plane efficiunt & cogunt. Jam vero hoc eodem conſtanti ſenſuum teſtimonio comperimus actualem corporum extenſionem. Quare niſi citatus Auctor illam haud poſſe in rerum natura conſtare plane conficiat, profecto ob rationes quaſdam ſubtiliter excogitatas mihi illam eripi & aliam apparentem obtrudi non ſinam, non patiar, non feram. Nam in ea quam ex ipſo attulimus, ratione nihil momenti eſt ad oſtendendam im-

impoſſibilitatem extenſionis realis continuæ. Nam data vi repellente inter duo quælibet elementa corporum, quæ in ratione inverſa diſtantiarum augeatur, ajo, quo partes continui ſe repellant viciſſim atque disjiciant, opus eſſe ut ſint hujuſmodi partes in continuo reipſa diſtinctæ tamquam partes, finibuſque propriis circumſcriptæ: Illas autem in vero continuo non reperiri invicta ratione paulo poſt conficiam, oſtendamque ſingula primitiva corpuſcula proxime a Deo creata, ex quibus ſenſibilia corpora componuntur, tametſi in longum, latum & profundum extenſa, eſſe vere aliquid unum parteſque non habere realiter diſtinctas, nec in partes eadem a ſumma Dei potentia poſſe ſecerni. Quare in ſingulis primitivis corpuſculis nec oſtenditur eſſe vis repellens qua illorum virtuales partes ſe disjiciant, & licet foret, idonea tamen non eſſet quantumvis infinita ad eaſdem disjiciendas. Ita fit ut impoſſibilitas extenſionis continuæ ab homine non probetur evidenti ratione. Ergo cum eodem ſenſuum teſtimonio extenſio nitatur, vera philoſophandi methodus eam ut admittamus ſuadet. Sed quatenus hæc vis repellens ſit admittenda, alias docebimus.

4. At enim P. Buſkovikius ſic ſenſuum teſtimonium infirmat num. 54. *At illud evidens eſt ſenſus non de Mathematico continuo, aut contactu, in quibus intervallum eſt nullum, ſed de phyſico, ubi intervallum non cadit ſub ſenſus, teſtimonium præbere, quorum ſecundum nos etiam admittimus qui primum negamus*. Id equidem concederem ſi vera extenſio de qua ſenſus teſtificantur, poſſet exſiſtere ſine continuitate & ea ratione quam Auctor proponit. At qui dici poteſt vera extenſio ad quam efficiendam concurrunt ex altera parte duo aut plura inextenſa, & ex altera interpoſitum vacuum, quod eſt pura potentia extenſionis & Attributum Dei, in quem nulla cadit extenſio? Deinde quid erunt hæc puncta inextenſa niſi ſubſtantiæ extenſionis expertes? Id enim eſt ſubſtantia quod ipſum per ſe exſiſtere poteſt, cujuſmodi ſunt hæc puncta quæ ab homine in Philoſophiam inducuntur. Jam vero ſi plures ſubſtantiæ inextenſæ poſſunt componere corpora quæ in ſenſus incurrunt, non video quin etiam plures animæ corporis elementa eſſe queant. Iis enim poterit eam vim impertiri qua pro ratione diſtantiæ vel ad ſe mutuo accedant vel ſe mutuo fugiant, ex quo uno omnium corporum proprietates ille deducit. Quare illud quod ex pluribus animabus coaleſcet, erit verum corpus

 utpo-

utpote donatum iis omnibus qualitatibus quæ in idem conveniunt. Ab hoc autem amplexando mens nimium abhorret: inde enim conſequeretur nullum eſſe ſubſtantiale & abſolutum diſcrimen inter corpus & animam & unice poſitum eſſe in aliquo accidentali & relativo, in conjunctione videlicet plurium animarum, quæ ſuis viribus expultricibus atque attractricibus donarentur. Tertio ſi ſolis ſenſibus ſtemus, corpora continua apparent, unde ſenſuum teſtimonium eſt de extenſione continua. Quod vero ab altero ad alterum extremum corpora perfecte continua non ſint ſed aliquibus interrupta poris, ſive vacui ſint ſive pleni corpore quodam fluido & tenuiſſimo, ex aliis obſervationibus argumentando colligimus & evidenter oſtendimus. Nulla vero clara perſpicuaque ratione monſtrare poſſumus eadem neque ex minimis perfecte continuis coaleſcere. Quamobrem ex præſcripto methodi, quam in ſuperioribus innuimus, ſolam continuitatem totius corporis, in qua ſenſus falli perſpicuum ſit, explodere debemus, non vero continuitatem abſolute, in qua menti renuntianda ſenſus decipi nulla evidenti ratione concluſum eſt. Ergo maneat non ſolum extenſum continuum ex inextenſis componi non poſſe, in quo nobis convenit cum Buskovikio, ſed etiam eſſe poſſibile & in minimis corporum elementis reperiri.

5. Quod attinet ad explicationem diſcriminis inter extenſionem mathematicam atque phyſicam, nec non inter diviſionem in infinitum pariter mathematicam atque phyſicam, cum labente ſyſtemate unde oritur, ſe ſuſtinere non poſſit, aliam ſubſtituemus veriorem, & præſertim explicabimus quo ſenſu continuum in infinitum dividi queat.

6. Quæ omnia valent etiam in ſimplicia & inextenſa Leibnitii & Wolphii elementa adoptata a Domina du Chaſtellet, cujus rationibus infra ſatisfaciemus.

CAPUT QUARTUM

In extenſo ſunt puncta & lineæ quibus tamen non conſtat.

§. 18. Propoſitio

HActenus toti in eo fuimus ut extenſum continuum ex inextenſis ſive finitis ſive infinitis nequaquam componi ſuaderemus. Nunc reliquum eſſet ut in iis quæ contradicuntur

tur ſolvendis vires ingenii contenderemus. In hac enim materia percrebuit quædam valde inutilis opinio quæ non paucos a veritate abductos in tranſverſum egit, diſſentientes Philoſophos ſuam quoſque ſententiam invictis rationibus ita conficere, ut eo quod oſtendendum ſuſcipiunt, nihil magis certum & exploratum videatur, cum vero ad objectorum ſolutionem ſe conferunt, iis ſe implicare difficultatibus, ex quibus nulla ratione ſe expedire poſſint: Sed in præſenti ſatius judico reliqua prius conſtituere, quæ ex iis, quæ modo ſunt oſtenſa, conſequuntur, quam manus conſeram cum Adverſariis, tum ut ſeries theorematum, quæ ipſa inter ſe apta & colligata ſunt, planius ſub oculos cadat, tum quo in iis conficiendis ad refutationem objectorum nobis via muniatur. Atque in primis illud ſtatuo, quod cum allatas demonſtrationes ab objectis vindicabam, perpetuo poſui, eſſe in quantitate extenſa vera puncta ſine ulla omnino extenſione, veras lineas ſine latitudine veraſque ſuperficies ſine ulla profunditate. Nam plures ex iis qui adverſus Zenonicos nobiſcum in ſuperioribus conſentiunt, hæc omnia aſſentiri verentur, ne fracti argumento quod pro Zenonis punctis inde deducitur, ſe victos fateri debeant. Hoc autem argumentum, unde primam noſtræ enunciationis rationem petimus, hujuſmodi eſt. Si ſunt in extenſo hæc puncta inextenſa & deſignari poſſunt, exempli cauſſa a ſphæra perfecta quæ plani perfecti punctum inextenſum tangit, vel ab angulo cubi aut vertice coni, qui pariter planum in puncto contingunt, ſphæra, cubi angulo vel coni vertice ſupra illud planum ductis, lineam ex punctis inextenſis compoſitam deſcribi conſequeretur. Siquidem planum ſemper tangeretur & ſingulis motus momentis ſolum in puncto inextenſo. Quod cadit etiam in lineas, ſi ex. cauſſa latus aliquod cubi plano impoſitum veram lineam omnis latitudinis expertem in illo occuparet. Nam cubo ducto plani ſuperficiem ex totidem lineis quot tempore motus ſingillatim tanguntur, conſtare conſequens eſſet.

2. Hoc, inquam, eſt argumentum quod cum dictis Philoſophis ſolvi non poſſe videretur, in cauſſa fuit cur puncta inextenſa, & lineas omnis latitudinis expertes cane pejus & angue fugerent. Sed meo quidem judicio conſultius feciſſent ſi ad hanc exturbandam ſectæ Zenonicæ arcem vires conjunxiſſent nobiſcum. Nam illud effugere nequeunt, & velint nolint eo premuntur, atque refutare debent ſi volunt permanere in

ſen-

ſententia. Si enim corpus latæ ſuperficiei corpori latæ pariter ſuperficiei ut cubus cubo imponatur, quod profectò fieri poſſe nemo negabit, alter alterum tanget, præſertim ſi feceris alterum in alterum incurrere. Hic autem contactus vel fit in punctis inextenſis, vel in aliqua parte extenſa; ſi primum, jam teneo quod mihi potiſſimum hoc loco propoſitum eſt, & ex altera parte allatum quod adeo times Zenonicum objectum tibi diluendum eſt; ſin vero ſecundum, ajo partem illam extenſam quæ tangitur, eſſe non poſſe niſi ſuperficiem aliquam ſine ulla profunditate. Nam ſubſtantia cum ſubſtantia naturaliter penetrari non poteſt; ſuperficies autem corporea & profunda eſt ſubſtantia ſuis omnibus in longum, latum & profundum extenſionibus prædita. Quod autem aliqui dicunt partes exſtantes impoſitæ ſuperficiei in partes ſubjectas concavas ingredi, id nihil eſt; propterea quod nec partes immiſſæ tangere poſſunt niſi ſuperficiem extimam concavarum, atque inde nihil aliud efficitur, niſi non tangi ſuperficiem aliquam planam, ſed aut curvam & inflexam, aut irregularem & mixtam. Manet igitur in corporibus eſſe & poſſe deſignari ſuperficies aliquas ſine ulla omnino profunditate. Fac nunc aliquod corpus hiſce libramentis circumſcriptum per aliquod tempus moveri. Hac profectò ſuperficie, quæ profunditate caret & in profundum inextenſa eſt, circumſcriptum undequaque corpus ſuperficiei motæ & quantitati motus reſpondens toto motus tempore faciet, ſive locum & ſpatium in quo ſolidum cum triplici dimenſione conſtare poteſt, deſignabit; & nihilominus ſingulis motus momentis niſi ſpatii ſuperficiem omni profunditate carentem occupare non poterit. Jam vero non minus abſurdum eſt ſolidum ex libramentis in profundum inextenſis componi, quam libramentum ex lineis in latum, & lineas ex punctis in omnes partes inextenſis. Nam ſicuti puncta lineam facere nequeunt: propterea quod nec habent extenſionem in longum, qua una linea donata eſt; ita etiam nec lineæ poſſunt componere ſuperficiem, quia latitudine carent, qua ſuperficies ſunt præditæ, nec ſuperficies ſolidum utpote expertes profunditatis, quæ in ſolido eſt. Et ſimul ac dederis aut ſuperficiem ex lineis, aut ſolidum ex ſuperficiebus poſſe conſtare, illius argumenti, quod in eo poſitum eſt, extenſum ex inextenſis componi non poteſt, vim omnem infirmaris. Nam ſuperficies & lineæ quod ad faciendam extenſionem qua carent, perin-

rinde eſt ac ſi nullam haberent. & quibus rationibus inexten-ſum non poſſe facere extenſum generatim eviceris; iis nec ſuperficies ex lineis nec ſolida ex ſuperficiebus exſiſtere facile ſuadere potes. Quamobrem etſi puncta aut lineas in ſolido eſſe, aut poſſe definiri negaveris, tamen argumentum cujus cauſſa hæc inficiatus es, adhuc tibi ſolvendum reſtat, necnon expediendum quomodo ſuperficies ſingulis motus momentis ſemper ſpatium in profundum minime extenſum teneat, & nihilominus toto tempore motus profundum ſpatium percurrat atque deſcribat; & ejus quodammodo naturæ ſe accommodet.

3. Ceterum ex hujuſmodi ſuperficiebus non leve ducitur argumentum pro noſtra ſententia. Nam quibus de cauſſis ſuperficies extenſo concedendæ ſunt, iiſdem lineæ & puncta probantur. Nam primo libramentum ſine profunditate iccirco amplecti debemus, quod in ſolido finito ultimus extenſi limes exſiſtat neceſſe eſt. nam hæc enuntiata *incipit* & *deſinit* in ſolidum finitum vere & proprie conveniunt. Superficies autem profunda nec ultimus limes eſſe poteſt, nec in eam deſinere ſolidum aut ex illa ſumere initium poteſt. Siquidem profundæ extenſionis minorem adhuc in profundum partem ſumere poſſumus, quæ minori diſtet intervallo aut ab initio aut a fine. Atqui eodem penitus modo concludere licet planæ ſuperficiei & linearum ultimos eſſe limites, ſcilicet initia & fines, & in iis eſſe non poſſe niſi rectas omnis omnino latitudinis expertes, in his autem niſi puncta quacumque penitus extenſione carentia. Siquid igitur hæc ratio pro ſuperficiebus valet nullam profunditatem habentibus, etiam pro veris lineis & punctis valeat neceſſe eſt.

4. Deinde per alius ſupra aliud corporis impoſitionem quemadmodum ſuperficies, ita & rectas atque puncta poſſe deſignari compertum ſit. nam ſi perfecti cujuſdam cubi latus planæ alterius cubi ſuperficiei impoſueris, tum in ſuperiore tum in ſubjecto non ſe contingent niſi quædam rectæ, in quas nulla prorſus cadit latitudo. Si enim in ſubjecto non linea ſed latum aliquid deſignatur, etiam in latere cubi ſuperioris, cum latæ ſuperficiei ſe accommodet, latitudo quædam & ideo parva ſuperficies exſiſtet. Non erit ergo, ut poſuimus, cubus perfectus, in quo præter ſex æquales ſuperficies majores, etiam aliæ minores in ſingulis lateribus deprehenduntur.

5. At

5. At enim cubi & plana perfecta non poſſunt conſtare in rebus ipſis, ſed in mente tantummodo Mathematicorum. atque ideo nihil eſt, quod inde concluditur. Nam latera cubi quæ a plano ſubjecto tanguntur, nequeunt eſſe veræ lineæ rectæ omnis prorſus latitudinis expertes. Sed cum earum latitudo minui poſſit in infinitum, ratione habita latæ ſuperficiei cubi perinde habentur a Mathematicis ac ſi nullam haberent. Quæ ſententia quantum de Matheſeos præſtantia detrahat nemo non videt. Inde enim conſequitur nihil eſſe in hac diſciplina, quæ ceteroquin omnium certiſſima creditur, ſtricte verum & abſolute, ejuſque theoremata plus minus aberrare a veritate; prout puncta, lineæ, figuræ atque ſolida plus minus abſunt ab eo quod Mathematici aſſumunt & fingunt.

6. Quamobrem ut ſuus præſtantiſſimæ facultati honor conſtet, & ſimul ut hoc effugium Adverſariis præcludam, veras lineas in cubis aliiſque ſolidis exſiſtere poſſe monſtrabo, & in eo conficiendo vires ingenii contendam, propterea quod, ut alias etiam admonui, mihi in hac de quantitate diſputatione vel maxime propoſitum eſt difficultates enodare Matheſeos, quam utpote numquam apertæ falſitatis convictam certam exiſtimo maxime omnium, in quibus identidem aliqua falſa deteguntur. Primum igitur quæro utrum illa cubi latera ſint figuræ planæ an curvæ. Si primum aſſeras, ea latera habebunt alia latera quibus circumſcribuntur; de his autem rurſus interrogo utrum ea ſint veræ lineæ ſine aliqua latitudine, an figuræ latæ, ſive planæ ſive curvæ. Si primum, conſtat id quod propoſitum eſt. Sin autem ſecundum, ſumo primam illius partem, & ajo fieri poſſe progreſſum in infinitum ſi omnia ſubinde omnium laterum latera ſint parvæ ſuperficies planæ; quæ res & incurrit in illas difficultates quibus multitudo infinita obnoxia creditur, tametſi nos eas non tanti facimus ut ſuo loco expendemus; propterea quod omnia in infinitum latera ſunt minores atque minores eæque diverſo loco poſitæ ſuperficies revera infinitæ, & nihilominus ex parte id quod volumus efficit. nam latitudo finita in infinitum minuta in nihilum ſive potius in infinite parvum abeat neceſſe eſt; nec enim aliquid officit eam in infinitum dividi poſſe, id quod examinabimus infra. Siquidem ut finitum finita diminutione, ita infinitum infinita exhauritur, quia quemadmodum finitum finito, ſic infinitum infinito æquale fieri poteſt. Manet igitur

eorum

eorum laterum quæ in infinitum minuta ſunt , latitudinem nullam , ſive infinite parvam fieri . Atqui longitudo perſeverat nec ei quidpiam decedit , dum ſingulis vicibus de latitudine quidpiam detrahitur. Ergo latitudine evaneſcente , latera nihiloſecius longa ſunt. Quod eſt in extenſo cubo lineas ſine ulla prorſus finita latitudine poſſe conſtare : ex quo ſequitur etiam perfectos Geometris cubos aliaſque planas figuras non eſſe negandas . Si enim perfectæ lineæ nequaquam repugnant , nec omnium aliorum perfectio cum aliquo vero principio pugnabit .

7. Quod ſi ad hujus argumenti vim eludendam ad alteram partem confugias ſuperioris dilemmatis , & ajas vel proxima planorum cubi latera , vel ſaltem quædam laterum latera eſſe curva , non plana , nihilo tamen minus eo quo non vis , revolveris. nam hæc curvilinea latera plano impoſita tangent ad ſummum lineam latitudinis omnis expertem. niſi velis aſſerere curvam ita plano aptari , ut latam in eo plagam occupet; quod maxime abſurdum eſt. Qua enim parte plano ſe accommodarent , ea non curva ſed plana forent , atque ita in id quod modo concludebamus , recideres . Dices fortaſſe convexum latus in concavam ſuperficiem incidere, eique aptari, vel contra. Sed nihil proficis ; nam ſi in ſubjecto plano ſunt aliquæ concavæ ſuperficies , etiam aliquæ vel convexæ vel planæ exſiſtant oportet , in quibus aliæ convexæ ad ſummum lineam tangant ; nam poteſt quidem ſolidum unica tantum ſuperficie convexa , uti ſphæra eſt , contineri , non tamen unica concava quæ nihil habeat aut convexi aut plani. Quod ſi ſuperficiem convexam alii pariter convexæ imponas , illæ multo minus aptari poſſunt quam planæ & convexæ; ſiquidem convexa a convexa plus recedit quam concava a plana. Quamobrem altera alterius vel punctum omnis extenſionis expers, vel ad ſummum lineam quavis latitudine carentem continget. Igitur quo te cumque vertas, in veras lineas Mathematicorum incurris.

8. Quibus conſtitutis etiam vera puncta reperiri in continuo probare facile eſt. nam uti ſolidi terminus eſt ſuperficies & ſuperficiei linea , ita linearum termini ſunt vera puncta. Deinde veræ lineæ nulla latitudine præditæ non ſe interſecant niſi in puncto cujuſcumque extenſionis experti , ut Euclides oſtendit, atque concludi poteſt etiam ex eo, quod ſaltem illæ quæ ad angulos rectos ſe invicem ſecant , nihil longitudinis , qua una exten-

tenſione donatæ ſunt, percurrant. Atqui eſſe in extenſo veras lineas jam confecimus, & eas ſe interſecare poſſe facillime demonſtrare poſſumus. Igitur cujuſcumque extenſionis expertia puncta in continuo deſignari queunt. Sed etiam propria ratione id confici poteſt. Nam ſi extremum cubici anguli verticem alterius corporis qualicumque ſuperficiei impoſuerimus, is in ea ſuperficie non tanget & deſignabit niſi verum & carens omni extenſione punctum. Nam ſi latum aliquod occuparet, non anguli vertex foret, ſed quædam ſuperficies aut plana aut rotunda; quorum utrumque refutari poteſt eo plane modo quem circa lineas uſurpavimus. Quo loco non video quænam peculiaris difficultas occurrat in intelligendo qui fieri poſſit ut ſphæra perfecta planum aliquod perfectum ſolum in puncto contingat. nam eadem propemodum eſt ac in anguli cubi cum plano contactu. Siquidem ſphæra & alia ſimilia corpora ſunt aggregatum angulorum infinite parvorum, & ſphæræ ſupra aliud corpus collocatione non poteſt proxime imponi niſi quidam vertex angulorum qui ubique ſunt.

9. Auctor cujus ſupra meminimus §. 15. num. 4. non dubitat affirmare tangentem in quovis circulo plus uno puncto contingere, hæcque contactus puncta eo eſſe plura quo circulus major eſt, atque ideo quemlibet circulum brevioribus vel longioribus pro ejus magnitudine rectis conſtare. Ex quibus conſequens eſt plana in ſphæris, quæ ex circulis coaleſcunt, latam aliquam partem contingere, & eo quidem majorem quo ſphæræ a majoribus circulis generantur. Sed utcumque hæc dici poſſint ab eo, qui nullum in quantitate punctum aut lineam ponit, bona ejus venia nego illius eſſe hanc ſententiam amplecti qui lineam punctis omnino inextenſis & juxta ſe poſitis conſtare vult. Nam ſi nulla eſt in linea latitudo, quid quæſo intereſt inter contactum circuli majoris cum plano ſive cum tangente interque contactum minoris cum eadem? Ais circulum majorem ad angulum magis acutum cum tangente concurrere, minorem autem ad minus acutum; interque linearum tam diverſorum angulorum contactum diſcrimen aliquod eſſe oportere. Quod confirmare potes ex eo quia nulla quantitas ab alio ad alium ſtatum omnino diverſum tranſit, quin paulatim ad eumdem propius accedat. Si autem lineæ rectæ quantumvis parum inclinatæ ſolum in puncto ſe mutuo tangerent, ad perfectum in omnibus punctis contactum qualis eſt, cum congruunt, momento tranſirent, quin

hic

Digitized by Google

hic contactus paulatim & ſenſim augeretur. Verum hæc fruſtra comminiſceris; nec enim tuæ cauſſæ ullo modo patrocinantur; nam quidemumcumque ſit angulus duarum ſe interſecantium rectarum, quæ ex punctis inextenſis conſtant, contactus in uno tantum puncto eſſe poteſt: fac enim duo vel plura ſe contingere puncta in utraque, non autem alia omnia, quia ſi omnia puncta congruerent, ſe invicem non interſecarent. Tunc illæ duæ lineæ non forent omnino rectæ ut ponimus, propterea quod qua parte pluribus punctis conſtante ſe tangerent, ea rectam unam, qua vero parte divaricarentur, ea rectas alias a communis ſegmenti recta deflectentes facerent. Quamobrem in hac ſententia nullatenus fieri poſſet, ut duæ lineæ penitus rectæ ſe ad acutos angulos interſecarent. Quod quantum a veritate alienum ſit tute ipſe videre potes. Reſtat igitur, ut duarum rectarum quantumcumque inclinatæ ſint, contactum in unico puncto eſſe fatearis. Nam quod attinet ad principium, quo id confirmabas, de quo alibi fuſius, hic breviter moneo illud quadrare in ea, quæ majora & minora fieri poſſunt, non autem in ea, in quæ acceſſiones & deceſſiones non cadunt. Nam ut exemplo utar ducto ab hac eadem re de qua agitur, ſi linea recta ab altera æquidiſtans verſus eamdem motu parallelo procedat, nonne momento a nullo contactu ad perfectum contactum & congruentiam pervenit? Sane ob eam cauſſam, quia contactus duarum rectarum, quæ parallelæ ſint, non poteſt eſſe niſi in omnibus partibus. Similedic de duabus, quæ ab interſectione ad congruentiam perveniunt. Præterquamquod angulus non eſt quantitas, ut alibi oſtendemus, ſed qualitas & rectarum affectio, in quam nimirum non convenit illud Principium, quod ad ſolas quantitates pertinet. Quo infirmatur ſententia laudati Scriptoris.

CAPUT QUINTUM

Omnes continui partes non ſunt actu diſtinctæ ut partes, & de diviſione continui.

§. 19. Propoſitio

MAnet itaque vera in extenſo puncta, veraſque lineas, atque ſuperficies poſſe deſignari. Sed cum hinc, ut initio capitis ſuperioris admonui, non leve argumentum ducatur

tur

tur adverſus ea, quæ contra Zenonem & Wolphium circa compoſitionem continuæ quantitatis ſtatuimus, ad viam illi ſolvendo muniendam aliud conſtituendum eſt circa partes continui quod ex hactenus dictis conſequitur. Scilicet extenſum continuum ex partibus conſtare non poteſt, nec partes eſſe poſſunt ejus principium, ſive ut ajunt, ratio a priori cur continuum exſiſtat. nam vel hujuſmodi partes, ex quibus extenſum continuum componi dicitur, ſunt extenſæ continuæ, vel inextenſæ; ſi inextenſæ, forent quidem principium extenſi, ſi hoc ex hujuſmodi partibus coaleſcere quiret; ſed quia nullatenus id poſſe fieri jam confecimus §. 14. & ſequent., partes continuum extenſum componentes eſſe inextenſæ non queunt. Sin autem extenſæ ſint, præterquamquod extenſum iiſdem coalitum non continuum eſſet, ſed potius contiguum, uti ſunt omnia corpora quæ in ſenſus incurrunt, quæque ex extenſis corpuſculis ſuos quibuſque limites habentibus, juxtaque ſe poſitis conſtant, nequeunt eſſe primum extenſionis principium & prima ratio a priori, cur res ſit extenſa. Siquidem adhuc reſtat inveſtiganda origo extenſionis, qua quæque illarum donatur. Nec enim mirum eſt extenſum aliis extenſis conſtare, ſive majus evadere, nec cum per ea, quæ jam imaginaris extenſa, alterius extenſi continui rationem reddideris, rem a capite ipſo arceſſieris. quemadmodum nec Athei cum ſubſtantiæ a ſe non conſtantis rationem petunt ab aliis ſubſtantiis, quæ pariter a ſe non conſtant, rem a principio repetunt, nec quod propoſitæ de origine rerum quæſtioni ſatisfaciat, & in quo Philoſophus acquieſcat, in medium producunt. Remanet igitur ratio quærenda extenſionis quæ in quælibet dictarum partium eſſe ſtatuitur. Quamobrem peto utrum ea reperiatur in aliis partibus, necne? Si minus, conſtat quod propoſitum eſt, extenſum continuum ex partibus non conſtare. Si etiam, rurſus quæro, utrum hæ ſecundæ partes ſint extenſæ, an vero inextenſæ. Quodcumque reſponderis, in alterutram incurris earum difficultatum, quibus te paulo ante implicuiſti. Quod ſi rejectis partibus inextenſis, utpote quæ ne hilum quidem te progredi ſinunt, ad extenſas iterum confugis, ut tibi latior evadendi aditus pateat, longius quidem procedes, ſed nullum tamen exitum habebis, nec te ex hujuſmodi tricis ac nodis expedies. Vel enim aliquando ſiſtis in extenſis partibus partium numero finitis, & hoc pacto numquam pervenies ad extenſionis principium, propterea quod quæ partes hoc finito

pro-

proceſſu ultimo a te deteguntur, adhuc extenſæ ſunt, & in aliis minoribus partibus in tua ſententia rationem extenſionis habeant neceſſe eſt, vel in hac partium ſerie uſque in infinitum imaginatione procedis, & hac alia ratione denuo ad partes inextenſas, ex quibus extenſum aliquod conſtet, revolveris. Nam infinita ſaltem diviſione partium in ſuas partes extenſum limitibus circumſcriptum exhauriatur oportet, & in partes abeat extenſione finita carentes vel omni, ſi undequaque diviſio fiat, vel aliqua ſaltem, ſi extenſum ſecundum aliquam tantum dimenſionem, ut parallelepipedum ſecundum longitudinem tantum, dividatur. Siquidem infinitis partibus, quæ ad ſummum ſunt in extenſo undequaque finito, infinita diviſio æqualis eſt §. anteced. num. *6.*, & quemadmodum motus totum aliquod extenſum finitum exhaurit, & ab altero ad alterum terminum penitus tranſit, quia ſucceſſivum continuum finitum continuo permanenti finito eſt æquale, ita etiam infinita diviſio extenſum in infinitas partes dividi potens exhauriat, & in partes finite inextenſas diſpertiat neceſſe eſt. Aliter enim ſi hæ partes, quas infinita diviſione habuimus, adhuc finite extenſæ forent, extenſum ex iis omnibus coalitum non parvum locum, ſed infinitum occuparet. Nec enim vim argumenti infirmares, ſi cum recentioribus Geometris eas quidem extenſas dixeris, ſed extenſione infinite parva primi gradus, ex quibus componitur finita quantitas, quæ ad quantitatem infinite parvam primi gradus rationem habet infinitæ. Nam cum in expendendis, ut infra faciemus, calculi differentialis & integralis difficultatibus oſtendemus, quatenus illæ infinitorum ſeries intelligendæ ſunt, ne cum veritate pugnent, liquido patebit ne hilum proficere, qui ad hæc infinite parva confugiet.

2. Sed fac ſingulas ex hiſce partibus eſſe adhuc extenſas: Quid tum? Multo magis te implicueris. Nam neque in infinito proceſſu diviſionis partium extenſi in ſuas partes ad fontem & ad primam cauſſam extenſionis deveneris, & etiamnum habueris ſingulas partes infinitas extenſas, quarum extenſionis rationem ſemper in infinitum in ante extenſis, quam extenſum componant, invenies. Reſtat igitur ut continuum extenſum ex partibus non conſtare, & partes non eſſe principium, & cauſſam a priori extenſionis fatearis. Nec enim nunc a te dici poteſt hunc in infinitum proceſſum repugnare. Nam ſi res ita eſt, cur ad infinitas, aut infinite infinitas partes recurris, quo rationem extenſi a partibus tamquam a principio repetas? Quamobrem aut

ſiſte in partibus numero finitis ſi hunc progreſſum inter ea, quæ eſſe non poſſunt, reponis, aut progreſſum inter ea, quæ eſſe poſſunt, repone, ſi in partibus finitis tamquam in iis, quæ extenſi haud ſunt prima ratio, non ſiſtis.

3. Dices fortaſſe eſſe quamdam mediam viam, qua incedam ut neque in partibus finitis acquieſcam, neque illum in infinitum proceſſum, qui eſſe non poteſt, admittam. Nam actu progredi in infinitum cum ratione pugnat, non autem potentia; quo poſito petes rationem extenſi a partibus, & partium ab aliis in infinitum partibus, quin ad ultimas & infinitas aliquando pervenias. Verum hoc effugium jam tibi præcluſum eſt iis omnibus, quæ hactenus diximus, quæque hac brevi ratiocinatione concludimus. Vel in diviſione continui aliquando pervenis ad partes partium inextenſas, vel quamvis te progredi intelligis, ſemper jam extenſas offendis? Si primum, iis omnibus argumentis urgeberis, quibus continuum ex inextenſis componi non poſſe confeci. Siquidem negare non potes rem componi ex iis partibus, in quas dividitur, præſertim ſi, ut a te ponuntur, ante diviſionem aliæ ab aliis diſtinctæ fuerint. Sin alterum, ſemper extenſionem ante partes, non partes ante extenſionem invenies. Nam vel ſi in infinitum progredereris non ſolum potentia, ſed etiam actu ſi fieri poſſet, nullas alicujus majoris extenſi partes invenies, quæ jam extenſæ non ſint. Si enim aliunde extenſæ non forent, rei extenſæ partes eſſe non poſſent. Igitur fieri nequit, ut extenſi vere continui rationem invenias in partibus, cum ante quaslibet, quas imaginari poſſumus, partes in extenſum aliquod iis partibus natura prius incurramus. Cum autem, ut apud omnes certum & exploratum eſt, res quæ diſtinctis partibus conſtat, in iiſdem cauſſam, & originem, & rationem a priori habeat, extenſum vere continuum ex partibus conſtare non poſſe concludendum eſt. Unde liquet id quod §. 2. demonſtrare polliciti ſumus, partes in omnem quantitatem minime convenire, quod tamen non facit, ut in extenſum non quadret generica quantitatis definitio; quia quamvis definitum aliquod extenſum partibus diſtinctis non conſtet, tamen ut conſequenti §. planum fiet, eſſe poteſt ſaltem aliquod aliud extenſum, quod illo ſit duplo, triplo, quadruplo &c. uſque in infinitum minus, ratione cujus idem definitum extenſum duobus aliis, vel tribus, vel quatuor vel &c. æquale, & ideo ex iis tamquam ex partibus coalitum intelligatur; tametſi revera non coaleſcat. §. 20.

Digitized by Google

§. 20. Corollarium.

Ex his conſequitur, cum eſſentia ſit id, quod primum in re eſt, partes eſſe non poſſe eſſentiam continui, cum ante omnes vel infinite minimas partes extenſionem inveniamus. Quam ad rem cum Philoſophi animum non adverterint, in irritum conati ſunt, & ſe in inextricabiles difficultatum laqueos induerunt. Non attendentes enim extenſionem eſſe illud primum, quod in ſolido extenſo, ſcilicet in corporibus eſt, quodque ideo nullam habet aut habere poteſt rationem intrinſecam cur tale ſit, ſed ſolum habere quit extrinſecam, quia ſcilicet tale a Deo proxime creatum eſt, toti in eo fuerunt, ut in intrinſecam, quæ nequit eſſe, rationem cur tale ſit inquirerent, & in partibus, ex quibus tamquam reipſa diſtinctis illud coalitum putabant, accuratiſſime inveſtigarent. Quod idem eſt, ac intrinſecam a priori rationem quærere, cur homo ex mente & corpore conſtet, cur domus ex pluribus partibus componatur, cur horologium ex talibus rotis atque ponderibus compactum ſit, cum hæc omnia ſint prima intrinſeca ratio eorum, quæ in eas res conveniunt, ipſa vero nullam habeant intrinſecam rationem, unde prodeant, ſed extrinſecam tantum in cauſſis, a quibus tali pacto conſtituta fuerunt. Deſinant ergo inveſtigare rationem intrinſecam a priori cur res ſit extenſa continue, & in eo conquieſcant, quod corpora tali extenſione donata ſenſibus percipiuntur, quodque talia a Deo primitus condita fuerunt. Sic enim ſe facile expe[illegible]nt a multis difficultatibus, quæ aliter inenodabiles forent, ut ex iis quæ mox differentur, liquebit.

§. 21. Objectum & Propoſitio.

At enim ſi hæc ita ſunt, qui fieri poteſt ut, quod nunc fere omnes Philoſophi volunt, & invictiſſimis rationibus a Matheſi petitis oſtendunt, quodlibet extenſum in partes uſque in infinitum diſpeſci queat? Nam ſi ante diviſionem partes in extenſo non ſunt, nec poſt diviſionem exſiſtent. Siquidem diviſio ut accidens partes uti ſubſtantias facere nequit, nec extenſum dividi poteſt, niſi in ea, quæ actu ſint. Cui difficultati quondam hac diſtinctione occurrebam. Fateor quidem diviſionem uti accidens ſubſtantiam partium non facere; tamen facere terminos partium, quibus eædem circumſcribantur & fiant. Nam ante diviſionem continui extenſi, uti eſſet cubus, non ſunt niſi termini communes, & extimi, ſex videlicet facies, quibus circumſcribitur cubus; partitione vero cubi in duas, ex. cauſſa, medie-

tates exſiſtunt alii termini, quibus medietas altera ab altera ſeparatur, quique cum antea ſolum potentia forent, poſt utramque reipſa, ſive ut ajunt, actu diſcriminant, qua nova terminorum generatione partes ex potentialibus fiunt actuales, numeroque diſtinctæ, non quia nova exſiſtat ſubſtantia, quam diviſio & motus, quo illa peragitur, efficere nequeunt; ſed quia novi fiunt termini, qui neceſſarii ſunt ad eum finem, ut illæ duæ medietates inter partes actu, numerumque facientes collocentur. Verum igitur eſt nihil poſſe diſpeſci niſi in ea, quæ ſint reapſe in eodem; ſed non eſt opus, ut quo modo ſunt ante diviſionem, eo ſint etiam poſt. Nam ſi in duas lamellas, ex. gratia, marmorea tabula ſecetur, hæque iterum conjunctæ nulla apparente rima formam integræ tabulæ referant, alio atque alio modo ſunt hæ lamellæ ante, & poſt diviſionem; ſiquidem ante arctiſſimum minimarum utriuſque molecularum vinculum eas inter ſe conglutinat, poſt autem altera quidem ad alteram appoſita eſt, ſed vinculo ſoluto etiam facile disjungi queunt. Ita in continuo extenſo in partes non diviſo illæ ſunt potentia ſive ſine finibus ſpecialibus, quibus contineantur: illo vero diſſecto reipſa inveniuntur circumſcriptæ propriis limitibus. Hæc olim commentabar, idque in gratiam Matheſeos, cujus pluribus theorematibus apud me certiſſimis communi ſententia deceptus potentiam extenſi in infinitas partes dividendi liquido oſtendi credebam.

2. Sed cum diuturniori rerum hujuſmodi meditatione errorem detegerim, aliam mihi viam in hujus difficultatis ſolutione ineundam eſſe putavi. Sed antequam id perficiam, prius oſtendendum eſt theorematibus Matheſeos minime confici ſolidum aliquod extenſum in partes dividi poſſe, ſed hoc unum quolibet extenſo minus atque minus in infinitum poſſe conſtare. Neque difficulter id liquidum fiet ſi aliquod problema, quo in hac re uti ſolent, ad examen revocemus. Ac primo veniat in mentem illius ſpatii quod inter tangentem & circuli peripheriam continetur. Nam ex eo quod circino duci poſſint infiniti circuli alii aliis majores inter tangentem & primi circuli circumferentiam, qui ſemper propius ad tangentem accedant, tametſi numquam congruere poſſint, & ex dicto ſpatio minorem in infinitum partem abſcindant, idem ſpatium in infinitum dividi poſſe concludunt. At quis non videt non conſequi ex his potentiam dividendi ſpatium ipſum ſolidum & extenſum, ſed ſolum conclu-

di

di fieri poſſe, ut minus ac minus infinities exſiſtat? Nam deſignatio & delineatio aliarum ſupra ſuperficiem alicujus ſolidi curvarum, quæ jugiter propius ad tangentem accedant, quod unum Geometræ oſtendunt, ipſæ per ſe minime perſpicuum faciunt ſolidum in totidem partes poſſe diſpeſci, niſi aliunde, ſcilicet ex natura ipſiuſmet extenſionis id concludatur. Siquidem lineas ſupra ſolidi libramentum deſcribere idem profecto non eſt, atque ſolidum ipſum in plures partes diſpeſcere. Bene vero liquidum faciunt non repugnare ſolidum extenſum quolibet dato extenſo minus, & a Deo poſſe creari ſolidum aliud, quod ſit medietas primi, tertium quod ſit medietas ſecundi, quartum quod tertii, & ita porro uſque in infinitum, tametſi nullum ex iis ſolidis in aliquas partes dividi queat. Atque ſi hac ratione intelligeretur celebris illa Epicureorum diſtinctio, qua volunt quodlibet extenſum mathematice dividi poſſe, non autem phyſice, explodenda non eſſet. Nam quolibet extenſo minus ac minus in infinitum poſſe dari & deſignari ex Matheſeos principiis certo concluditur, quod eſt extenſum Mathematice dividi; non autem ipſummet corpus ſolidum poſſe in partes diſpeſci, quod eſt phyſice. De illo vero uno Geometræ ſolliciti ſunt, utpote qui ad certitudinem ſcientiæ quam præ manibus habent, primâ tantum diviſione continui ſibi opus eſſe optime norunt.

3. Sed ut in viam redeam a qua pauliſper deflexi, linearum etiam æquidiſtantium proprietate quod propoſuimus, conficiendum eſt. Nam ductis parallelis BC, AD (*Fig.* 8.) & perpendiculari VR, a puncto B ad punctum quodlibet L ducatur recta BL, quæ ſecet rectam VR in G. Dico recta GV ſumi poſſe minorem atque minorem in infinitum. nam ſi producatur AL & ab angulo B recta ducatur BD ad quodlibet punctum D productæ AL; hæc alia recta BD rectam GV in puncto P inter V & G interjecto ſecabit, ideoque rectam VP minorem recta VG ex eadem VG abſcindet. Idem oſtendi poteſt de omnibus aliis rectis, quæ a B ad alia ultra D puncta rectæ AD productæ ducantur; cumque productioni rectæ AD nullus finis conſtitui poſſit, ut per ſe notum eſt, & ex infinitate vacui plane conficitur §. 12., nullum etiam finem minoris & minoris rectæ ex VG abſcindendæ invenire poterimus. Ex quo iterum patet nullam veram rectæ VG, & corporis extenſi, in cujus ſuperficie hæc linea exſiſtit, diviſionem in partes, ſed unam tantum minoris & minoris rectæ, & extenſi inter illas parallelas

rallelas conſtituti deſignationem oſtendi.

4. Mitto alia Geometriæ theoremata, quibus idem confici palam omnibus fiet, qui ad trutinam ea revocarint, & ſatius hic duco refutare id, quod ad modo expoſitam parallelarum demonſtrationem oggerunt ii, qui neque minorem in infinitum partem rectæ VG deſignari poſſe contendunt. Volunt enim tandem aliquando fieri ut, cum a puncto B ad punctum AD productæ remotiſſimum a B recta, ex. gratia, BD ducitur, punctum P cum V, & tota recta BP cum BV congruat. Quibus ut ſatisfaciam, peto an id velint accidere cum recta AD adhuc finita eſt, & punctum D adhuc intervallo finito diſtat ab R, an vero cum ſpatium inter R & D factum eſt infinitum. Si primum, ſuſtinere ſe non poſſunt adverſus id, quod etiam alibi diximus §. 16. n. 5. a B ad D punctum finite diſtans a B vere rectam lineam duci poſſe, & lineam BD, cujus pars BP cum BV congruat, reliqua PD a reliqua VC deflectat, nequaquam haberi poſſe pro recta. Sin ad alterum ſe convertant, præterquamquod incidunt in ſpatium reipſa infinitum, eodem revolvuntur, quod negant. Nam ſi ad hoc ut P congruat cum V, neceſſe eſt ut punctum D infinite diſtet ab R, ad infinita puncta inter R & D infinitæ lineæ rectæ a B duci poſſunt, quæ infinitas rectas a GV abſcindant, & eo quidem minores, quo ad BV propius accedunt. Quod idem eſt ac dicere recta GV minorem ac minorem in infinitum rectam poſſe deſcribi.

5. Manet igitur aliud nihil theorematibus confici Geometriæ, quam dato quocumque extenſo minus in infinitum haberi poſſe. Quo evertitur potiſſimum communis Philoſophorum hujus ætatis ſententiæ fundamentum in defendenda continui ſolidi uſque in infinitum diviſibilitate. Quamobrem Philoſophis per Geometriæ principia licet hanc in ſolido potentiam negare, ſive potius integrum eſt eam expendere ſuis principiis. Hæc autem mihi ſuadere videntur non poſſe ſolidum omnino continuum, ſive magnum ſit ſive exiguum, in aliquas dividi partes. Nam cum partes actu non ſint in extenſo, ut antecedenti paragrapho oſtenſum eſt, & ideo terminis propriis non ſecernantur, nego liquidum eſſe poſſe hos terminos inveniri, quibus ex potentialibus actuales evadant. Id enim perſpicuum nobis videtur ob illam præjudicatam opinionem ab ineunte ætate ſuſceptam, quod cum nullam partium in pluribus maſſis ſolidis diſtinctionem oculis videamus, eas omnino continuas credimus, & nihiloſecius in partes ſuis quaſque fini-

finibus undequaque diſcretas quotidie diſpeſci videmus. Verum ſi, quod Phyſici oſtendunt, omnia corpora, quæ in ſenſus incurrunt, exilibus moleculis ſuos jam quibuſque terminos habentibus eſſe coagmentata cogitaverimus, facile præjudicium hoc exuemus, & rem aliis rationibus examinandam atque penitus inſpiciendam judicabimus. Cum enim moleculas corporum ſolidorum vi quadam attractionis, unde hæc cumque oriatur, interipſas cohærere certum & exploratum ſit, nihil facilius quam ut, ſi quaſdam ex iis viribus vi cohærentiæ majoribus in contrarias partes impelli percipias, a mutuo complexu avellantur, itaque termini appareant, qui etſi prius exſiſterent, tamen ob partium contiguitatem ſub oculos non cadebant. At qua ratione contrariis hiſce viribus corpuſculi omnino continui partes avelli poſſint, & ideo termini, qui non erant, denuo conſtare non video. Nam ad hujuſmodi partes ſuis carentes terminis disjungendas vel quælibet minima vis ſatis eſt, vel nulla tametſi maxima. Cum enim partes vi quadam certa cohærent, planum eſt vim contrariam, qua ſeparentur, vi cohærentiæ aliquanto majorem eſſe oportere; quia vis vi major, aut minor, aut æqualis eſſe poteſt. At cum inter vim, & cohærentiam, quæ oritur ex eo, quod in continuo nullæ ſunt partes propriis finibus circumſcriptæ, non minus diſcrimen ſit, quam inter quantitates diverſi generis, ut inter lineam & ſuperficiem: quemadmodum lineam nec majorem ſuperficie, nec minorem, nec æqualem eſſe poſſe apud Geometras certum eſt, ita nec vis cum dicta cohærentia ullo ex his tribus modis comparari poteſt. Quamobrem ſi ad eam tollendam vis apta eſt, id proficiſci nequit ab aliqua definita ejuſdem quantitate, qua cohærentiam ſuperare poſſit, perinde ac quantitas aliam ſimilem quantitatem excedit, ſed a natura ipſius vis, quæ cum in qualibet vel minima reperiatur non minus, quam in maxima, vel quælibet minima vis non minus quam maxima ad illas partes ſeparandas ſatis eſſe deberet. Id vero propemodum alienum eſt a ratione, & experientiæ adverſatur. Non enim corpora majora conflata ex corpuſculis cohærere poſſunt majori vi, quam partes cohæreant eorumdem corpuſculorum. Nam quantademumcumque vis attractionis accedat, niſi ea, quæ ſe invicem trahunt, conſiſtentia ſint, & viribus externis obſiſtant; ſolidum atque conſiſtens & vi quacumque diſſolvi haud potens corpus non facient. Id quod alibi fuſius tractabimus. At experientia compertum facit multa eſſe corpora, quorum partes ita conglutina-

tæ ſunt, ut alias ab aliis avellere vel maxima vis in contrarias plagas vix potis ſit. Igitur non quæcumque intrinſeca vis corpuſcula omnino continua ſolvere poteſt, atque ideo propter ea, quæ modo confecta ſunt, nulla vel ſi maxima foret. Quanam vero alia ratione novi termini in extenſo continuo, uti eſſet cubus in duas medietates ſolvendus, fieri poſſunt, niſi viribus in contrarias partes, quarum altera prima medietas ſurſum, ex. gratia, pellatur, altera vero ſecunda deorſum? Nam cum termini ſint aliquid relatum ad rem, cujus ſunt termini, & ſolum poſito quodam abſoluto, uti eſt extenſum finitum, abſque alio ponantur, ipſi per ſe gigni non poſſunt, ſed ſolum vel creando extenſum, ſi non eſt, vel gignendo vim in extenſo quod exſtat, qua vi corpora ſenſibilia in medietates dividuntur. Nec enim hæc diviſio fieri poteſt per ſe ſine aliquo impetu, cum & ipſa inter ea ponatur, quæ ad aliquid ſunt, quæque ex ipſis rebus abſolutis ſolum exſiſtunt. Quæ igitur una ratio terminis conſtituendis partibuſque faciendis idonea eſt, illa in ſolido extenſo continuo id præſtare non poteſt. Ex quo demum conficitur hujuſmodi ſolidum in partes ſecari non poſſe, tametſi aliud in ipſo minus eſſe queat etiam in infinitum.

6. Fateor quidem alium excogitari poſſe modum extenſi dividendi non quidem in duas medietates, quarum utraque poſt diviſionem permaneat, ſed in eas, quarum altera duret, altera autem in nihilum a Deo convertatur, eo quod Deus primam conſervare pergat, non autem ſecundam. Verum ab Adverſariis peto utrum exiſtiment Deum poſſe alteram animæ partem ſubſtantialem conſervare altera in nihilum redacta? Procul omni dubio reſponſuros credo non poſſe, propterea quod nullæ ſunt partes reipſa in anima diſtinctæ, quarum altera conſervetur, altera perimatur. Quidni ergo eadem in continuum extenſum reſponſio valeat, in quo nullas eſſe partes reipſa diſtinctas inter ſe jam docuerimus?

7. Quibus una cum iis, quæ §. 19. ſtatuta ſunt ſatis viam munivimus ad ea ſolvenda, quæ ex Leibnitio & Wolphio affert Domina du Chaſtellet §. 120. citati libri pag. 106., quæque in ſummam redacta ita ſe habent. Quemadmodum numeri compoſiti ratio ſufficiens non invenitur niſi in unitatibus, quæ numerus non ſunt, ita rei compoſitæ & extenſæ ratio ſufficiens reperiri non poteſt niſi in ſubſtantiis ſimplicibus & inextenſis. Qui vero ait corpora eſſe extenſa, quod atomi, ex qui-

quibus coaleſcunt, extenſæ ſunt, nullam extenſionis rationem affert, & perinde eſt ac ſi diceret eſſe extenſionem quia eſt. Nec reſpondendum eſt extenſionem eſſe in numero eorum, quæ corpori neceſſaria ſunt, quorum proinde alia ratio ſufficiens non deſideratur, propterea quod cum extenſa in partes ſecari contradictorium non ſit, indiviſibilitas atomorum eſſe neceſſaria non poteſt. Ex quo ſit in diviſione extenſorum ad res ſimplices tandem eſſe veniendum. Multo minus ad conditoris voluntatem eſt confugiendum, ut in ea rationem extenſionis inveniamus. Non enim hic quæritur ratio cur extenſio in hac rerum univerſitate conſtet, quod unum a libera Dei voluntate pendet, ſed cur eſſe poſſit, quod a principio contradictionis proficiſcitur.

8. Ut his ſatisfaciam, primum adverto duo eſſe genera eorum, quæ in rem compoſitam cadunt, alia enim ſunt in ſingulis partibus etiam ſeorſim acceptis, alia vero ſolum in iis, quatenus inter ipſas conjunctæ ſunt, reperiuntur. Unde prima a conjunctione partium non pendent, bene vero ſecunda, quæ proinde relationem aliquam inter partes ſignificent neceſſe eſt. Nam cauſſa, quæ pura relatio eſt, uti partium copulatio, non poteſt gignere niſi relativum effectum. Ex quo ſit, ut illa ſi in ſingulis partibus, aut in aliqua earum non ſint, nec in iis ſimul copulatis eſſe queant, qualis eſt vis motrix, quæ cum relationem inter partes ſibi non velit, a conjunctione partium ducere non poteſt originem, & ſi in ſingulis corporis particulis non ſit, neque in iiſdem copulatis reperitur. Hæc vero non in ſingulis ſeorſim acceptis, ſed ſolum in iiſdem copulatis utpote ex ipſamet conjunctione orta deprehenduntur, qualis eſt exercitus, qui non in ſingulis ducibus atque militibus, ſed in iiſdem conjunctis poſitus eſt; qualis eſt etiam numerus, qui exiſtit ex pluribus unitatibus, quæ unum aliquod facere intelliguntur.

9. His ex Ontologia prælibatis nemo non videt ſummam quæſtionem eo revolvi, ut videamus an extenſio, quam in corporibus obſervamus, ſit ex primo genere, an vero ex ſecundo. Si enim ex hoc, compertum fiet extenſionem non reperiri in partibus quæ illam componant, ſed ex ipſamet earum conjunctione ortum ducere, quemadmodum numerus non eſt in ſingulis unitatibus, ſed ex earum conjunctione derivatur. Sin vero perſpicuum fiat extenſum ex partibus inextenſis com-

poni

poni non poſſe, conſtabit eamdem extenſionem ad primum referri, eamque non a partium copulatione proficiſci, ſed in iiſdem quantumvis exiguis ſine ulla a partium conjunctione dependentia reperiri oportere. Quod autem id perſpicuum fecerim ex §. 15. & 16. liquere arbitror. Hic ſolum hanc eamdem rem ſic preſſe concludo. Vel hæc inextenſa & ſimplicia ſe invicem contingunt, vel non. Si etiam, nihil unius extra alia eſſe poteſt, ut §. 15. monſtravi, ſin minus, uti vult Cl. Buskovikius, qualis eſt hæc extenſio, ad quam efficiendam puncta inextenſa & interpoſitum vacuum, quod pariter inextenſum eſt, concurrunt? §. 17. ſub finem. At enim extenſio hoc unum deſiderat, ut aliud extra aliud ſit, quod in ea puncta inextenſa Buskovikii, necnon in ſimplices & inextenſas Leibnitii & Wolphii ſubſtantias optime quadrat. Verum ſi hanc extenſionis notionem ad vivum reſecuerimus, hæc non ſubſiſtere comperiemus. Quid enim eſt aliud extra aliud eſſe, niſi aliud alio exſiſtere in loco? Quare ut elementa inextenſa alia extra alia ſint, neceſſe eſt plura loca prius exſtare ſive locum extenſum, in cujus alia parte ſit primum inextenſum, in alia ſecundum, quorum partium ratione habita hæc duo inextenſa extra ſe invicem conſtare dicantur. Cum vero ante corporum elementa non ſit niſi inane, quod extenſum non eſt, utpote pura recipiendi extenſa potentia, quæ in Deo eſt, ratione habita ejuſdem elementa nequeunt extra ſe invicem exſiſtere, nec id conſequi poſſunt ex eo, quod in Deo ſunt, propterea quod in eodem utpote inextenſo & maxime ſimplici omnia unum ſunt. Dices idem cadere in tua quoque elementa, quorum alia pars extra alias eſſe non poteſt, cum ante hujus elementi creationem non ſit hic locus extenſus, cujus diverſarum partium ſi ratio habeatur, partes ejuſdem extra ſe invicem exſtare dici queat, nec ejuſdem creatione fiat hæc partium extra poſitio, propterea quod in noſtra ſententia in vero primitivo extenſo continuo actu partes non ſunt, quarum aliæ extra alias eſſe affirmari poſſit. Fateor, cum hoc tamen diſcrimine, quod in Adverſariorum ſententia neque plurium corporis elementorum, quæ inextenſa ſint, creatione veram partium extra poſitionem obtineamus, ut oſtenſum eſt, in noſtra vero id conſequamur. Quod ut magis perſpicuum faciam, primum ajo dictam extenſionis notionem falſam & imaginariam eſſe utpote ortam ex duabus aliis pariter imagina-

nariis & falſis, ex notione ſcilicet, qua nobis ante corpora fingimus aliquod negative extenſum vacuum, cujus partibus aliis aliæ corporum partes reſpondeant, & ex eo quod pariter fingimus extenſum ex partibus actu diſtinctis componi; quorum utrumque cum a vero longiſſime abeſſe jam monſtraverimus, planum facit notionem extenſionis inde elicitam inter falſas & imaginarias eſſe ponendam. Quæ igitur eſt idea vera & realis extrapoſitionis partium in continuo extenſo? Ecce. Hæc partium extrapoſitio ob allatas rationes non cadit in unum tantum primitivum extenſum perinde, ac ſi foret ex genere eorum, quæ eidem abſolute & in ſe conſiderato convenirent, ſed in unum ratione habita alterius, quod primum contingat aut cum eo compenetretur, id quod fieri poſſe alias docebimus. Nam ſi ſe contingunt, patet eſſe in utroque id quod tangitur, atque id quod non tangitur, & aliud ab alio elemento perfecte diſtingui: ex quorum utroque ſequitur vera partium extra partes extrapoſitio. Quod ſi compenetrantur & aliud alio ſit minus, ut eſſe poteſt in infinitum quemadmodum ſupra docuimus, pariter aliquid majoris a minori non compenetrabitur, & veluti interius non tangetur. Quod ſimiliter veram utriuſque corporis extrapoſitionem ſecum affert. Immo hinc etiam conſequitur in uno continuo extenſo eſſe partes extra partes, non quidem actu ſed virtute, ideſt poſſe percipi tamquam ſi extra ſe invicem poſitæ forent. Nam uti quodlibet primitivum corpuſculum etſi revera unum & inſecabile, virtute tamen multiplex eſt, quia ut vidimus, pluribus aliis, quæ in infinitum minora condantur, eſſe poteſt æquale, ita ſi ad eadem plura ſimul collecta ipſi æqualia referatur, partes extra partes ſaltem virtute poſitas habere intelligi quit.

10. Quæ cum ita ſint, plane conſequitur primitivum extenſum non eſſe verum compoſitum, quod ex partibus actu diſtinctis iiſque inextenſis coaleſcat; & extenſionem ipſam eſſe primam rei extenſæ naturam atque eſſentiam. Cum vero ex ipſiſmet Wolphii certis principiis conſtet intrinſecam, cur eſſentia exſiſtat, rationem afferri non poſſe, eo quod cum ipſa ſit omnium, quæ in re ſunt, prima, a nullo alio interiori originem ducit, intrinſecam extenſionis rationem in partibus, ex quibus coagmentetur, fruſtra quæri concludendum eſt. Quare non, ut tacite Cl. Mulier objecit, principium petimus, cum

cum corpora, quæ in ſenſus incurrunt, eſſe extenſa dicimus; quod ex elementis extenſis conſtantur, eo quia extenſionis non continuæ, qualis in ſenſibilia corpora ex pluribus coalita cadit, ratio ſufficiens eſt extenſio elementorum continua, cujus exſiſtentiæ aliam a priorj non damus rationem, quam voluntatem Divinam, quæ illam e nihilo eduxit, a poſteriori autem ſenſuum teſtimonium, quod ut repudiemus nulla cogit evidens ratio, quæ veram extenſionem tamquam contradictoria complectentem oſtendat. Nam quod ultimo loco contra primitivorum corpuſculorum indiviſibilitatem ab illa affertur, jam refutatum eſt iis rationibus, quæ rem conficiunt. Quid enim certius neque a Deo poſſe fieri plures illius rei, quæ nullas habet, partes?

11. Quare cum Cl. Chriſtianus Wolphius in Coſmologia §. 181. primum corporum elementum definiat *principium internum corporum irreſolubile in aliud prius*, & deinde corporum elementa eſſe ſubſtantias omnino ſimplices probet hoc pacto: elementa corporum ea ſunt, ex quibus primum corpora conficiuntur; hæc autem ſi ex aliis ſunt compoſita, elementa non ſunt nec priora. Ergo ſubſtantiæ ſimplices ſint oportet: totum hoc aſſentiri non vereor, propterea quod optime quadrat in primitiva corpuſcula omnino continue extenſa, quæ proxime a Deo creata fuerunt, & ex quibus omnia hujus mundi corpora componuntur. Cum enim licet extenſa partes reipſa non habeant, nec ideo in partes reſolvi poſſint, veriſſime affirmari quit ea eſſe omnium prima & ſimplicia. Verum nego inde ab homine recte colligi eadem elementa non eſſe corpora, nec extenſa, nec figurata, nec magna. Nam etiam primitiva corpuſcula poſſe haberi pro primis vere irreſolubilibus corporum elementis, ex iis quæ hactenus diſputavimus, plane concluditur. Igitur ad corpora conſtituenda neceſſe non eſt ad illas monades, quarum natura prorſus ignoratur, confugere, nec quo corporum extenſio & impenetrabilitas explicentur, ad earum vim, qua ſingula in ſingula agunt & a ſingulis in ſingula reagitur, ita ut hac ratione copulentur, & ne ſe penetrent præpediantur, quemadmodum is docet ſect. 2. cap. 3. Coſmol.; qua doctrina contendit ſe non premi iis rationibus, quibus continuum extenſum ex punctis inextenſis non poſſe componi adverſus Zenonicos evictum eſt. Ceterum quæ hic & §. 17. adverſus Buſko-

kovikii ſententiam diſputavimus, in hanc poſſe torqueri adverto, ſi quis inter illa elementa aliquid poſſe interponi velit; Quod ſi cum Wolphio ita eſſe conjuncta arbitretur, ut nihil interjici queat, ſe contingant fateatur oportet. Quo conceſſo niſi velit partes tactas & non tactas ideoque extenſionem in iiſdem admittere, det etiam neceſſe eſt eadem prorſus congruere, quædemumcumque ſit vis, qua in ſe agunt viciſſim & reagunt. Si vero ponantur ſe contingere non ſubſtantia, ſed virtute, quam diffundant, ut alicubi videtur affirmare Leibnitius, quis non videt hanc diffuſionem virtutis & vis elementorum jam conſtitutum ponere ſpatium illud extenſum, quod ex iiſdem componi ſtatuitur?

12. Porro ex his, quæ hactenus diſputavimus, compertum ſit eos, qui a priſcis temporibus ad hanc uſque ætatem continuum extenſum ex inextenſis componi non poſſe defenderunt, ſuam ipſos cauſſam tueri, & adverſariorum impetum ſuſtinere potuiſſe, quod non viderunt id non quod ex hac ſententia conſequitur, partes ſcilicet actu diſtinctas in vero extenſo continuo non reperiri; quo uno omnia in clariſſima luce ponuntur, & alioquin inenodabilia adverſariorum argumenta ſolvuntur. Immo hiſce partibus exploſis arbitror diſſentientes Philoſophos in unam poſſe convenire ſententiam, quin a ſuis principiis revera deſciſcant. Nam Peripatetici, Carteſiani aliique plurimi, qui opinioni continui extenſi ex inextenſis nequaquam compoſiti aſtipulantur, ſartam tectam habent ſuam, quam mordicus tenent, ſententiam de diviſione continui in infinitum in eo ſenſu, quod extenſum continuum aliud alio minus in infinitum a Deo creari poteſt, quod ſatis ſuperque eſt tum ad vindicandas ab omni erroris aut imaginariæ hypotheſis ſuſpicione geometricas demonſtrationes, quæ potiſſimum homines ad id ſuſtinendum induxere, tum ad confirmandam præcipuam de compoſitione continui ipſorum opinationem. Epicurei vero & Zenonici, qui plures in ipſorum atomis & punctis aſpectus & facies viderunt, eademque inſectilia eſſe voluere, ægre non ferent noſtra corpuſcula primitiva, in quibus licet plures facies & aſpectus ſint, in quorum aliis tangi, in aliis non tangi poſſunt, tamen nullas habent actuales partes, & nulla virtute neque divina in eas ſecari poſſunt. Leibnitiani denique & Wolphiani in iiſdem corpuſculis eam habent ſimplicitatem, quæ ſatis eſt tum reddendæ ſufficienti ratio-

rationi extenſionis corporum, quæ in ſenſus incurrunt, tum aſſignandis iis, quæ pro vere primis & irreſolubilibus corporum principiis ſtatui poſſint: Ex quo apparet hic uſuvenire, quod non raro contingere ſolet, & in quæſtione de vacuo manu tetigimus, omnes digladiantes Philoſophos ex parte verum attigiſſe, ex parte autem aberraſſe ab eodem, idque fuiſſe potiſſimum cauſſam, cur hiſce litibus numquam finis imponeretur; ut valde ſperem nunc impoſitum iri, ſi omnes ea gloria contenti, quam in ſua quiſque particula veri defendenda aquiſierunt, alias cum illa aptas & copulatas, ut oſtendimus, amplexari non dedignentur.

§. 22. Scholion

Sed antequam ex hoc loco diſcedam, mihi excurrendum eſſe video in quemdam Ontologiæ locum, tum ut via muniatur ad aliud quod ex ſuperiori propoſitione ſum illaturus, & ad ea, quæ inpoſterum dicturi ſumus, facilius intelligenda, tum ut iis, quæ a Chriſtiano Wolphio in eumdem accurate diſputata ſunt, addamus nonnulla, quæ ſcitu neceſſaria ſunt & magno nobis uſui erunt ad evitandum Wolphianæ doctrinæ abuſum, & ad notandos errores qui ortum inde traxerunt.

num. 1. Definitio

Eſt autem hic locus de eſſentialibus attributis & accidentibus ac modis entium, cujus initium duco a definitione eorum, quæ dicuntur Prædicata neceſſaria entis, quæ ſalvo ente ab eodem abeſſe non poſſunt, ut tria latera a triangulo abſcedere nequeunt, quin triangulum corrumpatur. Contingentia vero, quæ ſine interitu entis in eodem eſſe & ab eodem abeſſe queunt, ut idem triangulum poteſt eſſe circulo inſcriptum & non inſcriptum quin triangulum intereat. Jam vero non omnia entis prædicata eſſe poſſe contingentia, ſed aliqua ſaltem eſſe neceſſaria oportere dilucidius eſt, quam ut multis debeat explicari confirmarique. Si enim omnia contingentia forent, omnia poſſent abeſſe ſalvo ente, uti ex definitione contingentium colligitur. Abſurdum eſt autem ſalvum ens permanere ſublatis omnibus, quæ in eo ſunt. Non igitur omnia prædicata contingentia eſſe queunt, ſed aliqua ſint neceſſaria neceſſe eſt.

num. 2. Definitio

Hæc autem prædicata neceſſaria ſunt duplicis generis; alia, quæ ab aliis intrinſecis non proficiſcuntur & eſſentialia vocantur,

alia

alia vero, quæ ab aliis intrinſecis tamquam a ſuis rationibus ſufficientibus originem ducunt, & attributa appellantur. Ex quo fit ut illa natura ſint omnium prima, nec a ſe invicem determinentur, & poſſint quidem ſimul eſſe, non autem ſimul neceſſario ſint, & rationem attributorum ſufficientem contineant, hæc vero ſint veluti ſecunda, & in eſſentialibus ſui rationem habeant.

num. 3. Propoſitio

His poſitis definitionibus primum dico rem poſſibilem in ſtatu poſſiblitatis conſideratam eſſe abſolute immutabilem ac neceſſariam. Nam id eſt abſolute immutabile, quod numquam ab alio in aliud tranſire poteſt. Sed res poſſibilis, quamdiu in ſtatu poſſibilitatis conſideratur, ab alio in aliud tranſire non poteſt. Siquidem rei nondum exſiſtenti antequam exſiſtentiam accipiat, reipſa nihil tribui & addi poteſt, nihilque demi quod prius inerat, nec ipſa res, utpote quæ non exſiſtit, deſtrui poteſt. Si quid vero addi vel detrahi poteſt, aut ſi quo modo interire, illud fieri quit ſolum in mente illius, qui hoc ens poſſibile cogitaverit; propterea quod aut ab illius cognitione in totum ſe avertit, aut ſaltem ab aliquo ex ejus attributis, ſi plura ſint, & aliud ſine alio in mentem incurrere, poteſt, aut aliam cum hujus rei notione notionem jungit. His tamen non fit quominus hæc eadem res in ejuſdem vel alterius intellectus cognitionem venire non poſſit. Quo intelligitur illius poſſibilitatem eamdem, quæ prius, manere. Ceterum, ſi locus hic pateretur, hujus veritatis oſtenſio potiſſimum ducenda eſſet ab immutabilitate divini intellectus, in quo cum res poſſibiles ante illarum exſiſtentiam, & ab æterno ſint; nec enim alibi quam in eo qui tunc ſolus erat, eſſe potuerunt, nec in ipſomet cognitionis ſtatu mutationem ullam ſubire poſſunt.

2. Quod vero eſt immutabile, eſt etiam neceſſarium ea neceſſitate, quæ immutabilitati reſpondet, ideſt hypothetice, ſi immutabilitas hypothetica ſit, abſolute, ſi eſt abſoluta; poſſibilitas autem eſt abſolute immutabilis. Eſt igitur etiam abſolute neceſſaria. Q. E. ſecundum.

num. 4. Propoſitio

Hujus autem poſſibilitatis omnia, quæ exſiſtunt, participant. Cum enim fieri non poſſit, ut idem ſimul ſit & non ſit, quæcumque exſiſtunt nullam contradictionem involvunt; ideoque etſi non ſemper exſtiterint, ſemper tamen poſſibilia fue-

fuerunt : & quamvis, ex. cauſſa, mille tantum anni ſint cum exſtiterunt ; tamen & ante bis mille & ante quatuor mille & ante octo mille , & ita porro, ſi ſemper magis ac magis cogitatione regrediamur , exſiſtere potuerunt.

num. 5. Propoſitio

Jam vero per hanc perque antecedentem enuntiationem unam ex eſſentialium notis in quolibet ente probamus exſiſtere , quædam ſcilicet prædicata in iiſdem eſſe abſolute neceſſaria . Nam vel illud ens abſolute neceſſario exſiſtit , quemadmodum ſolus Deus eſt , vel ſaltem abſolute neceſſarium eſt ut poſſibile ſit , & nullam contradictionem involvat. Sed quod eſt poſſibile, eſt neceſſario abſolute poſſibile. Ergo in quolibet ente ſunt prædicata abſolute neceſſaria.

num. 6. Propoſitio

Verum hæc neceſſitas in rei poſſibilis natura ſita , non eſt eſſentialium propria ; nam pertinet etiam ad modos , quod his quoque ſua eſt poſſibilitas , eaque ab omni æternitate immutabilis. Quare videndum eſt quænam ſit peculiaris ratio neceſſitatis , quæ in eſſentialia cadit , ſed non in modos. Qua in re non levis ſe mihi objicit difficultas ; nam cum res quædam ex pluribus eſſentialibus conſtat ; plura autem ſunt in omni ente etiam ſimplici , ut infra perſpicuum fiet , vel ais ea ſimul neceſſario eſſe , ita ut aliud ab aliis divelli non poſſit, vel negas. Si etiam , in eam incides difficultatem , quod deinceps nota carebis , qua eſſentiale internoſcas ab attributo. Si enim una neceſſario ſunt , id argumento eſt aliud ab alio proficiſci ac determinari , vel ſaltem ab aliquo tertio prædicato quod in illo ente ſit ; quo fieret, ut utrumque eſſet attributum ab alio determinatum , non eſſentiale. Nam quod ab altero non ducit originem , ſed aliunde , id ſine illo eſſe poteſt , ideoque cum eodem neceſſario non eſt. Sin autem minus , fortaſſe majorem plagam accipies , ut vites minorem. Nam ſi eſſentialia poſſunt ſimul eſſe , non tamen ſimul neceſſario ſunt , ut vult una ex eſſentialium notis , qui eſſentiale diſtingues a modo , qui pariter una cum eſſentialibus , cumque aliis modis eſſe poteſt, non tamen neceſſario eſt ? Nec medicinam afferes , ſi dixeris eſſentiale non ineſſe quidem neceſſario alterum in altero ; ineſſe tamen in re , quæ ex iis duobus componitur adeo, ut alterutro demto maneat quidem alterum ex eſſentialibus , non tamen res utroque conſtans , ex. cauſſa , intereunte corpore humano manet

net anima ſed non homo, qui anima & corpore conſtat. Nam hæc omnia omnino in modos etiam conveniunt. Siquidem modus modo, vel eſſentiali neceſſarius non eſt, bene vero rei ex utroque compoſitæ, ut ſi divulſeris aliud ab alio, eam rem corrumpas neceſſe ſit. Quæ difficultas pertinet etiam ad negotium internoſcendi differentias ſpecificas, ut vocant, ab accidentalibus. Nam res, quæ variis modis eſſe & determinari poteſt, dicitur Genus; hæc vero aut illa determinatio, ſive modus, quo res eſſe poteſt, differentia nuncupatur. Si igitur eſſentialia non ſimul neceſſario ſunt, qui differentiam ſpecificam & eſſentialem, quæ ſimul cum genere ut pars eſſentiæ cum altera parte ſpeciem eſſentialem conſtituit, diſtinguam ab accidentali, quæ in aliis eſſentialibus pariter neceſſario non ineſt? Atque hæc non bene ab Auctoribus explanata in cauſſa fuerunt, cur apud Ariſtotelæos præſertim in Phyſicis tot ſententiæ quot capita fuerint, quamplurimas corporum qualitates, uti fluiditatem in aqua, & ſoliditatem in auro, aliis in numerum differentiarum eſſentialium, aliis autem in numerum accidentalium referentibus. Quamobrem ut his difficultatibus ſatisfaciam, mihi opus eſſe video paucis oſtendere eam inter eſſentialia neceſſitatem intereſſe, per quam & a modis differunt, & cum attributis non congruunt. quod ita conficio.

num. 7. Animadverſio.

1. Genus itaque ſive id, quod variis modis eſſe & determinari poteſt, a ſtatu in quo non extat, ad ſtatum in quo exſtet, tranſire non poteſt, niſi cum aliquo ex iis modis, vel ſaltem cum eorum negatione. Nihil enim indeterminatum reipſa exſiſtere poſſe, contradictionis principio, per quod alterutrum ex duobus contradictoriis eſſe debet, plane conficitur.

2. Quamobrem ſi pluribus modis aliquid exſiſtere poteſt, non tamen conjunctim, quod alter alterius negationem complectatur, tunc ſi generatim & indeterminate loquamur, genus ad exiſtentiam traducendum neceſſario debet eſſe cum aliquo ex iis modis atque determinationibus, propterea quod aut cum hoc aut cum illo, ſive cum ejuſdem negatione illud conjungi neceſſe eſt, verbi gratia, ens vel eſt a ſe, vel non a ſe, ſive ab alio; item ens ab alio vel eſt ſubſtantia, vel non ſubſtanſtia, ideſt modus aut accidens. At ſi loquamur ſpeciatim determinateque, cum nullo ex iis determinate copuletur neceſſum eſt; quia ſi dixeris neceſſario copulari cum certo quodam

eorum in eum finem ut exſtet, alter jure inficiari poterit, quia poteſt eſſe cum altero qui primum excludat. Sin autem hujus alterius conjunctionem neceſſariam definite velis, convinceris te id falſo aſſumſiſſe, illo eodem primo modo, quem tute poſſe jungi faſſus es, cum eam connexionem ut neceſſariam obtrudere voluiſti. Ita ens ab alio nec determinate neceſſario exſiſtit per ſe, quia poteſt eſſe in alio; nec determinate in alio, quia poteſt exſiſtere per ſe, ut ſi tempore diluvii duo tantum equi fuerunt, albus & rufus; indeterminate quidam ex iis fuit ad equitandum neceſſarius, ſcilicet vel albus vel rufus; neuter tamen determinate, non albus, quia rufo, non rufus, quia poterant uti albo.

3. Fac itaque genus una cum ſuis determinationibus exiſtere: tunc vel illæ determinationes disjungi adhuc poſſunt a genere, quin genus intereat & in nihilum redigatur; vel non; propterea quod ſiqua demeretur, & genus & totum ens in nihilum abirent. Si primum, illæ determinationes ſunt modi aut accidentia generis, quia poſſunt abeſſe ſalvo genere, ideſt ſalva ſubſtantiæ generis exſiſtentia. Ita quamvis corpus vel moveri debeat, vel non moveri, ſive quieſcere; tamen quies & motus ſunt accidentia ſubſtantiæ corporeæ; quia quando movetur, poteſt adimi motus quin hæc in nihilum redeat; cum vero quieſcit, ſine detrimento ſubſtantiæ ad ſtatum motus redire poteſt. Hujuſmodi autem determinationes dicuntur accidentales differentiæ.

4. Sin autem ſecundum, illæ determinationes ſunt eſſentiales, & differentiæ ſpecificæ aut genericæ nuncupantur: quod ex altera parte ipſæ ſingillatim, & in individuo non proficiſcuntur & determinantur a genere, quia priuſquam cum eodem conjungerentur, & ſimul exſiſterent, idem genus poterat cum aliis exſiſtere; quo differunt ab attributis; hæc enim ſingillatim & in individuo determinantur ab eſſentialibus, & eſſentialia ſine iis definite eſſe nequeunt; ex altera parte poſtquam vinculum eſt aſtrictum, neceſſario inſunt, & avelli nequeunt ſine generis atque totius entis in nihilum abitione: quo diſcrepant a modis; nam hi queunt abeſſe, quin genus, & ens in quo inſunt, intereat, ex. cauſſa, ab ente non determinatur ſingillatim nec differentia *per ſe*, quia ens poteſt eſſe *in alio*, nec differentia *in alio*, quia poteſt eſſe *per ſe*. At ſi alterutra cum ente jungatur, uti *per ſe*, & inde exſiſtat ſubſtan-

ſtantia ; nec differentia *per ſe* ab ente , nec ens a differentia *per ſe* divelli poſſunt , quin utrumque pereat , & in nihilum redigatur. Tam enim arcto vinculo hæc duo copulata ſunt inter ipſa , ut quidvis potius præſtiteris , quam illorum nexum ſalvo alterutro diſſolvas .

num. 8. Objectio

At enim hæc doctrina nova aliquibus videbitur , & fortaſſe periculoſa , quod inde conſequens eſt, nec mentem in homine, nec Verbum Divinum in Chriſto ad eſſentiam pertinere ; nam utrumque poſſunt ab eo quicum junguntur , avelli , quominus hoc alterum pereat .

num. 9. Reſponſum

Ut huic difficultati ſatisfaciamus, animadvertendum eſt multa eſſe non eſſentialia & neceſſaria ſubſtantiæ , quia poſſunt ab illa divelli ſine ejuſdem interitu ; eſſe tamen neceſſaria accidenti , quod ſine interitu illius abeſſe nequeunt. Uti ſex plana quadrata & æqualia non ſunt neceſſaria corpori , quia corpus manere poteſt etiamſi angulis obtundendis illa figura corrumpatur ; ſunt tamen neceſſaria figuræ cubicæ , quæ ſine dictis planis eſſe non poteſt. Hinc eſt quod apud Phyſicos , quibus corpus contemplandum propoſitum eſt, ſint mera accidentia, apud Geometras autem , quibus quantitas atque figura , ſint ipſamet eſſentialia. Cum autem vinculum , quo anima & corpus aſtringuntur, ſit accidens , quia nec poteſt exſiſtere ipſum per ſe , & abeſſe poteſt ab anima & a corpore ſalvis utriſque ; homo eſt res coalita ex ſubſtantiis ſimul , ſcilicet anima & corpore , atque ex accidentibus , ſcilicet ex modo , quo hæc copulantur. Quare anima non eſt eſſentialis corpori, ſed homini tantum , idque non quatenus homo eſt ſubſtantia , ſed quatenus etiam ex accidentibus coaleſcit. Idem eſto judicium de Chriſto , habita tamen ratione eorum , quæ circa modum copulationis Verbi cum humana Natura fides docet. Sed horum eſſentialium connexionis neceſſitas ita ſtricta & arcta non eſt , quemadmodum ea, quæ ſupra a nobis tradita fuit. Nam , ex. cauſſa, inter *ens* & differentiam *per ſe* tam intima neceſſitudo intercedit , ut ſi in rebus ſpectentur, ſcilicet poſtquam conjuncta fuerunt , multi ex Philoſophis nullam reapſe diſtinctionem intereſſe putent. Ab hac autem valde procul eſt neceſſitudo connexionis mentis & corporis. Quoniam vero tantum intercedit diſcrimen , & diverſitas vocabulorum ad notionum diverſi-

tatem exprimendam inducta eſt ; quid ni duobus nominibus eſſentias , quarum neceſſitas alia atque alia eſt , ſignificabimus ?

2. Quamobrem eſſentia illa , in qua duo aut plura eſſentialia ita arcte connexa ſunt , ut nullum demi poſſit , quin totum ens in nihilum abeat , a me vocabitur eſſentia primaria & ſubſtantialis , vel etiam quantum ad connexionem neceſſaria abſolute ; numquam enim ſejuncta exſiſtere poſſunt , ex quibus illa componitur .

3. Altera autem eſſentia , in qua quidpiam auferri poteſt ſine corruptione quidem aliorum , ſi ſingillatim ſpectentur , non tamen ſine corruptione totius ex iis ſimul junctis coaliti , appellabitur eſſentia ſecundaria & accidentalis , atque hypotetice neceſſaria , quia ſcilicet ſub hac hypotheſi , ut totum permaneat , connexionem eſſentialium ejuſdem manere neceſſe eſt .

num. 10. Propoſitio

Explicato diſcrimine , quod intereſt differentias inter eſſentiales atque accidentales , aliud mihi diſtinguendum occurrit in iiſdem ipſis accidentalibus differentiis . Nam duo poſſunt eſſe genera eorum , quæ cum aliquo ente tamquam intrinſecæ , ſed mutabiles determinationes illius conjunguntur ; aliæ ſcilicet , quæ ita in illo ente ſunt , ut ſi abſint , alia intrinſeca determinatio quidpiam poſitivum & reale a poſitivo & reali priorum determinationum complexa ſuccedere debeat : aliæ vero , quæ ita ſunt aliquid poſitivum in ente , ut ſi abſint , aliud nihil poſitivum a poſitivo priorum diverſum , ſed negationem tantummodo ſuccedere oporteat . Sic habita ratione corporis , hæc aut illa figura ſunt primi generis intrinſecæ determinationes ; propterea quod primum neceſſe eſt aliquam earum eſſe in corpore , cujus finita extenſio limitem aliquem ſive figuram neceſſario deſiderat : deinde figura , ex. cauſſa , globoſa quidpiam affirmans & poſitivum includit , quod in plana non eſt : at ſecundi generis determinationes ſunt in eodem corpore vis motrix , & ejus privatio , item motus , & quies . Nam ſi in corpore vis motrix , & motus perimantur , in eorum locum nihil poſitivi ſuccedit , quod antea non exſtaret : quatenus enim quies ſignificat corpus eſſe in uno loco , id quidem poſitivum eſt & affirmans , ſed incluſum in motu , per quem corpus & in antecedentibus locis , & in illo ultimo fuit ; quatenus autem ſignificat eſſe in uno tantum , id quidem ſolum in quiete reperitur , ſed aliquid negans eſt , quia *to tantum* negat corpus in aliis eſſe locis .

2. Jam

2 Jam verò primi generis determinationes etſi ab eſſentialibus rei pariter divelli queant, ac illæ, quæ ad alterum genus referuntur; tamen illæ præ his eſſentiam majori neceſſitudine attingunt, ad eam propius accedunt, eidemque ſunt intimiores. Cum enim eſſentia primaria illius rei, ut reipſa exſiſtere poſſit, cum aliqua primarum eſſe neceſſario requirat, eæque ſingulæ ſint aliquod poſitivum, ſive a poſitivo, & ab ente aliarum diverſum: illa eſſentia ut reapſe exſiſtat, cum alio ente poſitivo conjunctionem neceſſario requirit. Igitur illa cum intelligitur primis determinationibus carere, in ſuo eſſe minus completa & perfecta eſt, quam cum percipitur ſecundarum expers; nam ex altera parte carere poteſt determinatione poſitiva ſecundi generis; ex altera poteſt habere aliam determinationem, quæ determinationi priori nihil niſi negans addat. Unde quit eſſe ſine alio ente, & aliquam negationem ſolum aſciſcere, quæ tantum abeſt, ut verum ens conſtituat, compleat, abſolvat, atque perficiat, ut potius aliquid de ente detrahat, illudque imperfectum faciat. Quod attinet ad exempla, res eſt in confeſſo apud omnes, qui volunt eſſe aliquam in corporibus inſitam cauſſam motus ab ipſo motu diſtinctam; de quiete non omnes aſſentientur eſſe aliquod negans; verum ſatis eſt ut illud concedant, quod probatum eſt, nihil poſitivi in eadem eſſe, quod in motu non ſit. De figuris autem mirum videbitur omnibus eas ad corpus ita intime pertinere. Verum ſuo loco res amplius declarabitur; illudque nunc generatim monemus momenta rationum a nobis in exemplis non poni, quæ ſolum ad illuſtrandas rationes afferuntur. Quare ſiquæ appoſita non ſunt ad id quod volumus exprimendum, per nos repudientur licet, & appoſitiora a Lectoribus ſubſtituantur.

3 Super hujuſmodi differentia determinationum accidentalium duas definitiones ſtatuimus, quibus eſſentiam ſecundariam, & hypothetice neceſſariam partimur in ſecundariam primi gradus, & in ſecundariam ſecundi. Secundaria primi componitur ex genere & differentia accidentali poſitiva, quæ non poteſt a genere avelli, quin alia ſuccedat poſitivum quidpiam a poſitivo abeuntis diverſum complexa. Secundaria ſecundi conſtat ex genere & ex differentia accidentali poſitiva, quæ poteſt abeſſe etiamſi alia ſolum negans ſubſtituatur.

4 Si quis autem ductus allata modo ratione has differentias accidentales primi gradus ad eſſentiam rei pertinere velit, &

ſpeciem eſſentialem conſtituere affirmet, non valde repugno, dummodo earum diſcrimen & a differentiis primariis, & abſolute neceſſariis, & a differentiis accidentalibus ſecundi generis tueatur. Retenta enim re, nihil refert hoc, aut illo nomine uti.

5 Quod vero pertinet ad differentias primarias, ratio allata in accidentalibus & ſecundariis non valet ad excludendas negantes, cum ex altera parte eſt differentia primaria poſitiva; quod etiam negans ſi ab ente divelli non queat, cum illo neceſſario connexa eſt, ideoque ad ejus eſſentiam primariam attinet.

6 Fateor tamen eam eſſe non poſſe differentiam nonniſi rei, quæ neceſſario aut negans eſt, aut ſaltem mixta ex poſitivo & negativo; quia rei omnino poſitivæ differentia etiam poſitiva eſſe debet.

num. 11. Corollarium

Porro ex hactenus dictis conſequitur plura eſſe in entibus tamquam partes ejuſdem eſſentiales atque præcipuas, quorum alterum ab altero non determinatur. Cum enim ex ſpecificis differentiis nulla determinate neceſſario in ente eſſe debeat, ſed aliquam tantum indeterminate cum illo eſſe junctam neceſſe ſit. num. 7. hinc aliqua tantum ex pluribus, nulla vero determinate differentia ab illo ente determinatur. Si enim una earum definite determinaretur, cum illo ente neceſſario foret conjuncta.

num. 12. Corollarium

Ex quibus, præter jam notatum diſcrimen modos inter & differentias eſſentiales, colligere potes etiam diſcrimen, quod inter eaſdem differentias & attributa intercedit. Nam differentiæ & attributa ab alio quodam intrinſeco entis attributo determinantur, ſed illæ ſolum generatim & indefinite, quod in eo ſitum eſt, ut aut hæc, aut illa differentia in ente neceſſario eſſe debeat; hæc vero ſingillatim definiteque, quod in eo poſitum eſt, ut hoc idem numero attributum in ente neceſſario eſſe oporteat.

num. 13. Propoſitio

Jam vero ſequitur ut aliam eſſentialium notam ad examen revocemus, ſcilicet an ſint quædam prædicata, quæ ab aliis intrinſecis non determinentur. Qua in re hanc propoſitionem oſtendendam ſuſcipio. Si prædicata entis abſoluta, ac diverſa numero finita ſint, v. gr. 10, 100, 1000. &c. aliquod ex iis ſui rationem in aliis intrinſecis non habet, ſive a nullo alio determi-

minatur. Nam primo ex iis prædicatis abſolutis, atque diverſis nullum a prædicatis relativis determinatur; cum potius hæc, ſi neceſſario ſint in ente, ab abſolutis determinentur. Deinde non omnia illa prædicata abſoluta ab aliis intrinſecis determinantur, ſed ſaltem unum nullam ſui rationem in aliis habet. Nam cum hæc abſoluta prædicata numero finita ponantur, vel nullum eorum ab alio pendet, quemadmodum ſupra monſtravi, vel ſi quod ab aliis pendet ac determinatur, v. gr. decimum a nono, nonum ab octavo, octavum a ſeptimo &c. ſaltem primum a nullo alio intrinſeco proficiſceretur; hoc enim intrinſecum non poteſt eſſe niſi relativum & abſolutum; atqui non determinaretur neque ab alio relativo, ut modo probavi, neque ab alio abſoluto. Cum enim omnia illa abſoluta, quæ in ente ſunt, vel proxime vel remote ab illo primo determinari ponantur; ſi & ipſum ab uno eorum determinaretur, foret ſimul determinans, ac determinatum; ſed nihil poteſt eſſe determinans ſimul ac determinatum; ergo a nullo prædicato intrinſeco proficiſcatur neceſse eſt.

num. 14. Lemma

Quod autem quodlibet intrinſecum entis prædicatum ſit aut abſolutum, aut relativum, ita probatur. Abſolutum eſt prædicatum entis in ſe ſpectatum; relativum eſt prædicatum, quod cum ordine ad aliud conſideratur; quodlibet autem prædicatum conſideratur vel in ſe, vel cum ordine ad aliud; nam quodlibet conſideratur vel in ſe, vel non in ſe; quandoquidem hæc duo ſunt contradictoria; atqui ſi conſideratur, ſed non in ſe, nihil aliud reliquum eſt, niſi ut cum ordine ad aliud ſpectetur; inter enim intrinſecum ens & extrinſecum nihil eſt interpoſitum. Ergo quodlibet entis intrinſecum prædicatum vel relativum eſt, vel abſolutum.

num 15. Propoſitio

Verum in ſuperiori propoſitione tantum in entibus, quorum prædicata ſunt numero finita, eſse oſtendimus illa, quæ ab aliis intrinſecis non determinantur. Nunc illud generatim de quolibet conficiendum eſt, itaque conficitur. Nam in quolibet ente ipſum eſse generatim eſt prædicatum a nullo alio determinatum; immo ipſum eſt fons & origo ceterorum, quæ idcirco in rem cadunt, quod illa eſt, ſive eſse poteſt, ideoque eſt primum omnium prædicatorum. Jam vero cum ente tamquam cum genere ad formationem entium particularium differentiæ copu-

landæ ſunt. Quare cum genus habeamus, quod eſt prædicatum omnium primum, etiam differentias habebimus, quæ, quantum pertinet ad differentias, erunt omnium primæ, atque ab aliis non determinabuntur. Sed genera, & differentiæ ſpecificæ ſunt rerum eſsentialia: num. 7. ergo in quolibet ente ſunt prædicata eſsentialia, quæ ab aliis intrinſecis non determinantur.

num. 16. Propoſitio

Hæc autem prædicata, quæ nec ab aliis intrinſecis prædicatis entis, nec a ſe invicem determinantur, ideoque ſimul eſse poſsunt, non tamen ſimul neceſsario ſunt niſi eatenus, quatenus ut ens exſiſtat, reipſa cum prædicatis genericis unam, aut alteram ex differentiis eſse oportet: num. 7. hæc, inquam, prædicata ſunt primum, atque præcipuum eſse ipſius entis. Nam vel alia prædicata intrinſeca cum his ita neceſsario connexa ſunt, ut iiſdem poſitis ab ente abeſse non poſſint, vel non ſunt ita neceſsario conjuncta. Sed quodcumque dicatur, prædicata enumerata ſunt primum, atque præcipuum eſse ipſius entis; nam ſi alia neceſsario inſunt, jam ab iis determinantur. Determinatum autem ſecundum obtinet locum poſt ens, a quo determinatur. Prius eſt enim ratio per quam res eſt, quam ipſa res. Ergo hæc prædicata ſunt primum ac præcipuum eſse ipſius entis habita ratione eorum, quæ neceſsario cum iis nexa ſunt. Rurſus hæc primum locum ſibi vindicant etiam ante illa, quæ neceſsario juncta non ſunt: quod enim neceſsario, & ſemper ineſse debet, nec ſalvo ente poteſt abeſse, id certe prius eſt, & magis intimum enti præ iis, quæ ſalvo ente queunt abeſse, cujuſmodi ſunt modi; præterquamquod, ut infra oſtendemus, poſſibilitates modorum ab eſsentialibus determinantur. Unde ratio modo allata pro iis, quæ cum ente neceſsario connexa ſunt, huc etiam valet.

num. 17. Propoſitio

Reſtat adhuc ut illam aliam eſsentialium notam, ſcilicet ab iis omnia alia, quæ neceſsario ſunt in ente, determinari, in hæc, de quibus egimus, prædicata convenire oſtendamus. Quod ultimum ita conficitur. Quæ in ente ſunt neceſsario, nec tamen eſsentialia, ſive ex primariis prædicatis ſunt, illa neceſsario cum ejus entis eſsentialibus ſimul eſse debent. Cum enim eſsentialia ſint primum atque præcipuum eſse ipſius entis. num. 16. ſi non forent cum eſsentialibus neceſsario connexa, nec illo in ente neceſsario invenirentur. Sed quæ non ſunt ex

pri-

primariis prædicatis entis, & nihilominus cum eſſentialibus ſive primariis neceſſario ſunt, illa ab his determinantur; ergo nihil aliud reliquum eſt, niſi ut hæc prædicata de quibus agimus, ab eſſentialibus determinata ſint. Omnia igitur illa, quæ in ente neceſſario ſunt, ab eſſentialibus determinantur vel proxime vel remote.

num. 18. Animadverſio

Dixi vel proxime vel remote, quo intelligeretur aliqua eſſe attributa, quæ ab eſſentialibus ita derivantur, ut inter ipſa atque eſſentialia nihil interponatur; ut in igne potentia calefaciendi proxime ab ignis eſſentia determinatur: alia vero, quæ idcirco cum eſſentialibus neceſſario connexa ſunt & ab iis determinantur, quia neceſſario conjuncta ſunt cum aliis prædicatis, atque ab iis determinantur, quæ prædicata cum eſſentialibus neceſſario nectuntur, atque ab iis determinantur; ita eſt in lapide potentia calefaciendi, quæ idcirco ab eſſentia lapidis neceſſario determinatur, quia neceſſario determinatur a potentia ſuſcipiendi colorem, quæ ab eſſentialibus lapidis proficiſcitur.

num. 19. Definitiones

Præter genericam attributorum definitionem celebris eſt attributorum in propria & in communia diviſio. Propria ſunt attributa, quæ ab entis eſſentialibus ita determinantur, ut non ſolum in illo neceſſario ſint, verum etiam illi ſoli, non aliis diverſis entibus conveniant. Communia ſunt attributa, quæ ab entis eſſentialibus ita determinantur, ut neceſſario quidem in illo ſint, ſed non illi ſoli, verum & enti diverſo conveniant.

num. 20. Corollarium

Quapropter prædicatum rei proprium ſit hujuſmodi oportet, ut ubicumque res illa eſt, ibi etiam attributum hoc reperiatur, & ubicumque attributum proprium reperitur, ibi etiam res illa ſit. Commune vero tale eſſe debet, ut quamvis ubicumque invenitur ens, cujus eſt attributum, ibi etiam illud ſit, tamen non ubicumque eſt hujuſmodi attributum, ibidem hoc ens inveniatur.

num. 21. Animadverſio

Verum hæ definitiones ita, ut in ſcholis facere conſueverunt, nudæ traditæ, nulli propemodum uſui Philoſophis ſunt, non quidem illam ob cauſſam, quod ex præſcripto legum definitionum confectæ non ſint, ſed quia per eas tantummodo

ſatis

ſatis in quoque caſu intelligi non poteſt quod cuique rei attributum ita inhæreat, ut illi ſoli conveniat, quod vero cuique rei ita inhæreat, ut in alias etiam diverſas cadat. Igitur etiam notæ tradendæ ſunt, per quas in uſu definitionis illud dignoſci queat. Perſpicaciſſimus Philoſophus Chriſtianus Wolphius hunc defectum prævidit in hac, atque in aliis plerisque ſcholaſticorum definitionibus, quas proinde ſteriles jure merito perſæpe vocavit, quod in demonſtrationibus propoſitionum conficiendis uſui non ſint. Quare cum ad univerſam Philoſophiam reſtaurandam animum adjeciſſet, hanc maxime ægram ac prope depoſitam ejus partem ſuſcepit, & definitiones accuratiores, atque ut ipſe vocat, *fæcundas*, quod multarum demonſtrationum quodammodo parentes ſint, in Philoſophiam inducere conatus eſt. Quemadmodum autem nullum cordatum Philoſophum puto dubitaturum, utrum illi in pluribus res ex voto ſucceſſerit, ita qui dubitet an aliquando in ſcopum non collimarit futurum arbitror neminem. Exemplo ſunt inter alia, quæ afferri poſſunt, attributorum propriorum atque communium definitiones, quas ut vulgarium definitionum defectum ſuppleret, Wolphius excogitavit. Cum enim, quæ attributa ab omnibus eſſentialibus determinantur, propria entis eſſe voluerit, §. *66*. Log. Wol., quæ vero ab aliquibus tantum, communia ejuſdem affirmarit §. eodem, profecto non optimam, ut infra oſtendemus, attulit medicinam, nec hanc materiam penitus eſſe aſſecutus videtur. Quod hic, & alibi contigiſſe homini exiſtimo, quia, pace tanti viri dictum ſit, de cujus laude quidquam detractum nolumus, nec velle debemus, qui noſtrorum in Philoſophia profectuum, ſi quid tamen profeciſſe videmur, illum uti primum auctorem cognoſcimus, quia inquam in ſolis propoſitionum demonſtrationibus acquievit, nec fere unquam in iis, quæ contradici poſſent, inveſtigandis refutandiſque verſatus eſt. Nam in Philoſophia, cujus quæſtiones intricatiores ſunt, & multo majoribus quam in Matheſi difficultatibus implicatæ, quamplurima occurrunt, quæ ſi ipſa per ſe conſiderentur, licet reipſa falſa & incerta, tamen ſpecie certitudinis ac veritatis ad animos noſtros facile obrepunt, ſi vero cum oppoſitis argumentis conferantur, qualia intus ſunt, dignoſcuntur. Quoties, poſteaquam jam mihi viſus eſſem propoſitionem aliquam ad evidentiam oſtendiſſe, dum quid contradici poſſet inveſtigarem, vel inveſtigatum refutare con-

ten-

tenderem, quoties inquam mihi contigit aut omnino mutare ſententiam, aut partim, aut ſaltem novis conditionibus eam determinare, id ipſis objectionibus exigentibus, quæ aut falſitatis, aut non ſatis accuratæ determinationis illam coarguebant? Illud idem opinor contigiſſet & Wolphio viro ceteroquin ingenii ſummi, atque in mathematicis ac Philoſophicis diſciplinis contriti, tum in aliis bene multis, tum in hac re, quam tractamus. Nam pro acumine ingenii profecto vidiſſet id, quod ejus definitiones evertit, quædam attributa propria ab aliquibus tantum entis eſſentialibus determinari, ut mox demonſtrabo.

num. 22. Propoſitio

Poſitis iiſdem eſſentialibus neceſſario poni debent eadem attributa, & poſitis iiſdem attributis poni debent eadem eſſentialia. Nam poſitis iiſdem determinationibus neceſsario poni debent eadem determinata; & poſitis iiſdem determinatis neceſsario poni debent eadem determinantia; eſsentialia autem ſunt determinantia, & attributa ſunt determinata num. 17; ergo ſequitur quod propoſitum eſt.

num. 23. Propoſitio

Hinc omnia illa attributa, quæ ab omnibus eſsentialibus entis determinantur, ſunt attributa propria illius entis; non tamen e contrario omnia attributa propria alicujus entis ſunt illa, quæ ab omnibus ejuſdem eſſentialibus determinantur. Quod ad primum attinet, res ita conficitur. Omnia illa, quæ alicui ſoli enti, non aliis diverſis conveniunt, ſunt attributa ejuſdem propria; num. 19; quæcumque vero ab omnibus entis eſsentialibus determinantur, illi ſoli enti, non aliis diverſis conveniunt. Nam ſi ab omnibus eſsentialibus determinantur, ubicumque ponuntur eadem attributa uti determinata, poni debent eadem eſsentialia uti determinantia num. anteced. Sed ubicumque ſunt eadem eſsentialia, ibi etiam eſt idem ens. nam eſsentialia ſunt primum & præcipuum eſſe ipſius entis, quod alia omnia, quæ in ente neceſsario ſunt, ſecum trahit. num. 16. Ergo ubicumque ſunt illa eadem attributa, ibi idem ens reperitur, quod unum & idem eſt ac illa attributa illi ſoli enti, non aliis diverſis convenire num. 20. Alterum autem in conſequentibus oſtendetur, poſteaquam aliqua ſcitu neceſſaria demonſtrata fuerint.

num. 24. Propoſitio

Differentia ſpecifica & eſsentialis niſi cum aliquo genere non

non poteſt exſiſtere ; nam differentia eſt determinatio rei , genus eſt ipſa res , quæ multifariam eſse & determinari poteſt num. 7. determinatio autem ſine re , cujus eſt determinatio , non poteſt exſiſtere ut ex ſe patet .

num. 25. Corollarium

Quare ſi differentia cum aliquo tantum genere exſiſtere poſſit , ſimul ac eſt illa differentia , etiam illud genus exſiſtat neceſſe eſt , ſive ubicumque differentia exſiſtit , ibi etiam genus exſiſtat oportet .

num. 26. Animadverſio

Non tamen continuo ſequetur e converſo ubicumque illud genus exſiſtit , ibi etiam illam differentiam exſiſtere ; cum enim genus ſit res , quæ multifariam determinari poteſt , cum alia differentia ſive determinatione exſiſtere poteſt .

num. 27. Propoſitio

His conſtitutis dico attributa , quæ determinantur ab aliquo tantum entis eſſentiali , quod ſit genus aut differentia , quæ cum alio quoque genere reperiatur , eſſe illi enti cum alio diverſo communia : quæ vero determinantur ab aliquo tantum eſſentiali , quod ſit hujuſmodi differentia , quæ in eo tantum genere exſiſtere poſſit , eſſe attributa propria illius entis . Nam attributa communia ſunt illa , quæ in alio ente diverſo eſſe poſſunt num. 19. ſed attributa primi generis in alio ente eſſe poſſunt ; cum enim ab illo genere aut differentia determinentur , ubicumque illud genus aut illa differentia inveniuntur , ibidem hæc attributa neceſsario reperiuntur ; in alio autem ente diverſo eſſe poſſunt tum genus illud , quia cum alia differentia a priori diverſa connecti poteſt ; tum differentia , quia cum alio genere conjungi quit ; ubi autem aut genus aut differentia diverſa ſunt , ibi eſſentialia , ſive ens ipſum primarium eſſe diverſum oportet . Hæc ergo attributa , quæ ab hujuſmodi genere aut ab hujuſmodi differentia determinantur , etiam in alio ente diverſo eſſe poſſunt , ideoque ſunt entis communia .

Sin autem hæc attributa determinentur quidem ab uno tantum eſſentiali , ſed quod ſit ea differentia , quæ in hoc tantum ente reperitur , ubicumque eſt eadem differentia , ibidem etiam ipſa neceſſario reperiuntur , & ubicumque ipſa ſunt , etiam illa differentia reperitur . Jam vero illa differentia cum eo ſolum genere eſſe poteſt . Ergo ubicumque illa differentia , & illud genus , ſive ens quod iis primario conſtituitur , reperiuntur ,

tur, ibidem hæc attributa ſunt; & ubicumque ſunt hæc attributa, ibidem illud genus & differentia, ſive ens ab iis conſtitutum inveniuntur. Hæc igitur ſecunda attributa ſunt entis propria.

num. 28. Corollarium

Ex quo fit perſpicuum non omnia, quæ ab aliquo tantum eſſentiali, proficiſcuntur, eſſe attributa entis communia, quemadmodum Wolphius affirmavit.

num. 29. Objectio

Verum aliquis fortaſſe cauſſam Wolphi ſuſcipiet, & homini vitio dandum eſſe negabit quod illi a nobis objectum eſt. Idque hac de cauſſa, quia falſum quidem eſt attributa propria eſſe illa, quæ ab omnibus eſſentialibus, & communia quæ ab aliquibus proficiſcuntur, ſi nomine propriorum intelligas ea, quæ huic ſoli enti conveniunt, nomine vero communium quæ in alia etiam diverſa cadunt, & poſteaquam hujuſmodi illorum definitiones tradideris. At ſi ad has voces definiendas primum accedens nomine propriorum intellexeris ea, quæ ab omnibus eſſentialibus proficiſcuntur, nomine communium, quæ ab aliquibus, quid in eo falſi eſt, quod reprehendatur, cum vere ſint & attributa quæ ab omnibus, & attributa quæ ab aliquibus tantum eſſentialibus derivantur; & vocum ſignificatus in hominum poteſtate ſit?

num. 30. Reſponſio

Sed præterquamquod in hiſce vocabulis definiendis ſi Wolphius ita fuiſſet verſatus, adverſus legem in Logica ſibimetipſi præſcriptam nimium a recepto verborum ſignificatu receſſiſſet, hujuſmodi effugium ipſe ſibi omnino præcluſit, dum iis definitionibus in demonſtrando uſus eſt, perinde ac ſi tum attributa ab omnibus eſſentialibus entis profecta in illud ſolum ens, tum attributa ab aliquibus tantum determinata in alia etiam diverſa convenirent. Si vero juvat etiam ad fontem erroris aſcendere, audiamus parumper quid pro ejus cauſſa poſſit urgeri.

num. 31. Inſtabis

Nam ſi Auctor ab una definitione ad aliam ſenſim & ſine ſenſu tranſiſſet quin illarum inter ipſas convenientiam demonſtraviſſet, ab omnibus jure ac merito culpandus foret. Sed cum id non fecerit niſi poſteaquam illa attributa, quæ ab omnibus eſſentialibus proficiſcuntur, in illud ſolum ens convenire, quæ vero ab aliquibus tantum originem ducunt, in aliis

etiam

etiam eſſe diverſis oſtendit : profecto dignus non eſt qui hoc nomine ab aliquo cordato viro male audiat. Alterius vero hanc attulit rationem ; nam de primo nihil attinet dicere quod in ea re mihi cum illo conveniat. Eſſentialia ſimul eſſe poſſunt, non tamen ſimul neceſſario ſunt num. 6. & 7. aliquod igitur eſſentiale hujus rei ſeorſim ab alio eſse poteſt, ideoque in alio ente una cum aliis eſsentialibus junctum reperiri. Quapropter etiam attributum quod cum illo eſsentiali neceſsario connexum eſt, in alio ente diverſo eſse poteſt : ut attributi communis natura requirit.

num. 31. Reſponſio

Verum illa eſsentialium nota & idea *eſſentialia ſimul eſſe poſſunt* non ſatis a Wolphio explicata, ſive ut ejus utar verbo, evoluta fucum homini fecit. Siquidem ex eo quod duo eſsentialia ſimul eſse poſſint, non tamen ſimul neceſsario ſint, tum primum ſine altero, tum alterum ſine primo exſiſtere poſse nequaquam conſequitur. Quamvis enim ſecundum ſine primo eſse non poſset, tamen ſi primum ſine ſecundo exſiſtere quit, dicta nota locum in eſsentialibus habet. Atqui genus ſine tali ſua differentia exſiſtere poteſt num. 7 ; aliquæ tamen differentiæ ſi exſiſtunt, cum illo genere ſolum exſiſtunt, & ſine illo eſſe non poſsunt. uti ens poteſt eſse ſine differentia per ſe, quia nimirum poteſt exſiſtere ens alia affectum determinatione, ſcilicet ens quod in alio tantum eſse poteſt; non tamen differentia per ſe ſine ente exſiſtere poteſt. Ex illa igitur eſsentialium nota & idea pro Wolphio nihil deducitur.

num. 32. Urgebis

Niſi forte dicatur nomine eorum, quæ ſimul eſse poſsunt, non tamen ſimul neceſsario ſunt, illa ejuſdem rei eſsentialia intelligi, quorum utrumque ſine altero conſiſtere poteſt ; ut in homine ſunt anima & corpus, in propoſitione ſubjectum, ac prædicatum, in ſyllogiſmo tria judicia quibus componitur. Qua in hypotheſi Wolphianum argumentum bene concluditur.

num. 33. Reſponſio

Verum ipſe Wolphius niſi majorem plagam accipere vult, ut leviorem repellat, numquam ad hanc reſpondendi rationem confugiet. Tunc enim genera & differentiæ ab eſsentialium numero per illum excludenda forent. Quod ab eo nec factum eſt, ut ex pluribus Wolphianæ Philoſophiæ locis colligi

ligi poteſt , nec ullatenus fieri potuit , quia cum hæc differentia a genere jam exſiſtente divelli non poſſit , quin genus deſtruatur , nec tamen a genere neceſsario proficiſcatur , quod genus cum alia eſse poteſt , inter ea quæ ſunt primarium eſſe ipſius entis enumeranda ſunt .

num. 34. Objectio

Aliud interea ſolvendum eſt argumentum , quod ſententiam impetit Wolphii ſimul & meam . Eſt enim hujuſmodi . Omnia unius entis eſsentialia etiam in alio ente diverſo eſse poſſunt ; non enim repugnat ut ad aliud ens componendum cum alio eſsentiali , cum alia ſcilicet differentia , quæ in primo ente non erat , omnia ejuſdem eſsentialia jungantur. Quapropter neque attributum , quod ab omnibus eſsentialibus profluit , unius entis proprium erit , ſed in aliis etiam diverſis eſse poterit .

num. 35. Reſponſio

Ut quantum fieri poteſt quæ objecta ſunt diluamus , illud in primis ſtatuimus , ens cujus omnia eſsentialia in alio ſunt , quodam negativo eſsentiali ſolummodo ab alio poſse differre ; ſi enim diſcrimen illius in poſitivo ſitum eſſet , non omnia unius eſsentialia , uti poſitum eſt , & uti poni oportuit ab Adverſariis ſi quid objicere voluerunt , in alio reperirentur ; alterius vero , quod præter eſsentialia prima aliquod etiam aliud complectitur , diſcrimen etiam in poſitivo conſiſtere .

2. Quo conſtituto examinandum eſt etiam cujus generis ſit illud eſsentiale , ſive illa poſitiva differentia , qua unum ens ab altero , quod ab eo ſolum negative differt , diſpeſcitur . Si enim hujuſmodi ſit , ut ab eo jam exſiſtente divelli non poſſit , quin omnia alia eſsentialia , quæ locum generis habent , illico intereant , tunc illa eſsentialis putanda eſt num. 7. Sin autem abſque aliorum eſsentialium interitu ab iis avelli poſſit , tunc ut accidentalis , atque ut modus entis habenda eſt .

3. Si hæc duo entia ſecundi generis differentia inter ſe diſcrepant , ea non ſunt ſaltem quantum ad eſsentiam , ſive ad præcipuum eſse diverſa , ſed eadem . Quo labefactatur oppoſitum argumentum . Attributum enim ab his eſsentialibus determinatum in pluribus quidem numero diſtinctis , ſed non eſſentia diverſis reperiretur . Quapropter illius eſsentiæ ſemper foret proprium , eique tantummodo conveniret .

4. Sin autem hæc differentia ſit ex iis , quæ ſine interitu generis

Digitized by Google

neris a genere divelli non poſsunt, tunc eſsentia illius entis, cujus eſsentialia omnia poſitiva in alio reperiuntur, non in iis ſolum eſsentialibus poſitivis ſita erit, ſed etiam in neganti, ſcilicet in negatione alterius eſſentialis & differentiæ, quicum ejus poſitiva eſſentialia in alio ente juncta ſunt, & ens aliud atque diverſum conſtituunt. Cum enim differentia ſit pars eſſentiæ, cumque hoc ens niſi per aliquod negans ab alio non differat, pars aliqua eſſentiæ illius in quodam negante ponenda eſt. Ut omnia poſitiva, quæ ſunt in belluis, naſci, creſcere, moveri, vivere, videre, ſentire, & imaginari in homine reperiuntur; ſed in eodem eſt aliquid amplius, ſcilicet intellectus & ratiocinium. Quare differentia eſſentialis, per quam bruta ab hominibus differunt, ſolum in negatione ratiocinii poſita eſt, alia ſunt loco generis, quod in alio ente ſimul cum alia differentia inveniuntur.

5. In hoc autem alio eventu verum quidem eſt omnia unius poſitiva eſſentialia in alio reperiri; non tamen omnia abſolute. Siquidem negatio, v. gr. ratiocinii, quæ eſt in brutis differentia eſſentialis, in alia ſpecie, ſcilicet in hominibus non reperitur. Quare nec attributa, quæ ab omnibus his eſſentialibus partim poſitivis partim negativis profluunt, in alio diverſo ente reperientur.

num. 36. Inſtabis

At enim negatio entis eſſentiam entis primario non conſtituit: Ergo negatio illius poſitivæ differentiæ, quæ in ſecundo ente ſimul cum primi eſſentialibus eſt, pars eſſentialium ejuſdem primi eſſe non poteſt.

num. 37. Reſponſio

Verum in hac materie id quod omnino & ſimpliciter ens eſt, ab eo quod ſimul eſt ens, & alterius entis negatio, diſtinguendum eſt. Ut ſi foret corpus in infinitum extenſum, quantum ad extenſionem eſſet ſimpliciter ens: corpus vero finitum v. gr. quatuor pedum eſt ens ſimul, & entis negatio: nam quatenus habet quatuor extenſionis pedes, eſt ens; quatenus ultra quatuor pedes non extenditur, eſt entis ſive majoris extenſionis negatio.

2. Quapropter illius, quod ſimpliciter & abſolute ens eſt, negatio entis inter partes ejus eſſentiales enumeranda non eſt. At entis mixti ex ente & non ente, ſcilicet entis partim poſitivi partim negativi, ipſa alterius entis negatio tamquam

pars

pars eſſentialis haberi debet. Nam inter illa quæ ens negativum primario conſtituunt, quæque ab aliis intrinſecis ejuſdem entis non determinantur, ipſa negatio collocanda eſt.

3. Cum vero illud ens cujus omnia eſſentialia poſitiva in alio ente ſunt, partim ſit poſitivum quatenus iis eſſentialibus conſtat, partim negativum quatenus alia alterius entis eſſentialia, & differentiam poſitivam non habet; mirum non eſt ſi eſſentia illius etiam in negatione hujus differentiæ collocetur. Ita in irrationalitate, quæ eſt ratiocinii negatio, partim eſſentia bruti poſita eſt.

num. 38. Urgebis

At enim illud negativum quod in illo ente eſt, cum ente neceſſario non cohæret; ideoque nec inter eſſentialia ponendum. Nam permanentibus aliis eſſentialibus poſitivis tolli poteſt de medio; quippe ad id præſtandum nihil opus eſt alio, niſi ut quæ poſitiva differentia in alio eſt, ad idem accedat. Re autem vera ad primi entis eſſentialia accedere poteſt. Cum enim hæc differentia cum iis eſſentialibus in ſecundo ente juncta inveniatur, neque cum iis pugnabit, neque cum primi eſſentialibus, quæ eadem eſſe ponuntur. Sed quidquid non repugnat ſive contradictionem non involvit, eſſe poteſt; ergo propoſita difficultas ſuam obtinet vim.

num. 39. Reſponſio

Verum nego fieri poſſe ut, cum hæc differentia poſitiva in eſſentialibus ſecundi entis neceſſario reperitur, nec, uti ponimus, ſine deſtructione eorumdem ab iis divelli poteſt; eadem ac ſimilis differentia ad eadem eſſentialia, quæ in primo ente jam exſtent, accedat. Si enim cum iis jam exſtantibus jungeretur, in primo ente poſſet ab iiſdem ſeparari, quominus hæc interirent. Quælibet enim determinatio quæ ad rem jam exſiſtentem accedit, poteſt ab eadem recedere quin ſaltem illa res in nihilum abeat. Si enim antea res abſque illa determinatione exſtabat, id argumento eſt ejus exſiſtentiam non eſſe cum exſiſtentia determinationis ita neceſſario connexam, ut per ſe eſſe non queat. In primo igitur ente ſine aliorum eſſentialium interitu illa differentia ab iiſdem avelli poſſet. Sed hoc ipſum pugnat cum eo, quod eadem differentia cum iiſdem eſſentialibus in ſecundo ente ita neceſſario copulata reperitur, ut ſine illorum deſtructione avelli non poſſit. Hæc enim duo entia eſſent eadem, & non eadem, quod repugnat; eadem, ut poni-

nitur, non eadem, quod eſſentia ſecundi tum in eſſentialibus utrique communibus, tum in illa differentia, quippe quæ neceſſario connexa eſt, foret ponenda; at primi ad eſſentiam illa differentia, utpote quæ ſine interitu entis ab eodem divelli poteſt, minime pertineret.

2 Ad rationem autem, qua ſuam Adverſarii opinionem tuebantur, dicimus illam differentiam poſſe quidem cum iis eſſentialibus eſſe aut non eſſe, antequam exſtent, non autem poſteaquam exſtiterunt. Si enim quo momento exſtare incipiunt, eo juncta cum iis reperitur, ita ſemper connexa manet, ut ſine totali illarum interitu abeſſe non queat num. 7. Si vero primo inſtanti abeſt, ita neceſſario abeſt, ut pariter ſine illorum interitu adeſſe non poſſit.

num. 40. Animadverſio

Atque ſic explicata natura tum eſſentialium, tum attributorum quædam ſunt notæ tradendæ, quibus alia ab aliis internoſcamus. Atque hæ notæ illæ eædem ſunt, quibus determinans, qualis eſt eſſentia, a determinato, quale eſt attributum, ſecernimus. Quod non ita facile eſt, propterea quod inter utrumque tanta connexio eſt, ut tam poſito determinante ponatur determinatum, quam poſito determinato determinans: idcirco accurate tractandum eſt de iis notis, quibus aliud ab alio diſtinguamus. In quo, ut ratione & via progrediamur, a definitionibus ordiemur abſoluti & relativi, quæ ad hanc materiem intelligendam conferent plurimum.

num. 41. Definitiones

Ens abſolutum eſt ens, quod ita per ſe eſt, ut ad idem intelligendum, nec aliud ens cogitare opus ſit, nec in ejus conceptu plura entia diſtincta tamquam partes & ſimul cognoſcere oporteat. Ita *eſſe* generatim eſt ens abſolutum, ut liquet; ita etiam *a ſe*, quia ad ens a ſe percipiendum aliud nihil percipi debet, quam ipſum *a ſe*.

2 Relativum eſt id, quod intelligi non poteſt, niſi plura & ſaltem duo entia ſimul cogitentur, nimirum inter ſe comparentur, & alius ad aliud reſpectus, proportio, ratio, ordo, ſeu quocumque alio nomine voces, conſideretur. Ita ens ab alio eſt aliquod relativum, quia non poteſt intelligi, niſi ſaltem duo entia ſimul cogitentur & comparentur; ſcilicet ens, quod eſt ab alio, & ens, a quo eſt. Ita etiam æqualitas, quod ejus ideam habere non potes, niſi alterum alteri æquale percipias.

num.

num. 42. Corollarium.

Quapropter abſolutum eſt unum ens in ſe ſpectatum, relativum eſt unum ens cum ordine & proportione ad aliud conſideratum. Sic ens a ſe, ſi ipſum in ſe cogitetur, abſolute conſideratur, ſi v. gr. cogitetur, quatenus eſt enti ab alio diſſimile, tunc inſpicitur relative.

num. 43. Scholion

Hic vero quiſquam haud ſcio, an vitio mihi daturus ſit; quod a notione abſoluti pluralitatem etiam illorum entium, quæ tamquam partes aliud intrinſecus componunt, excluſerim. An non communis ſententia fert hominem, ex. gr. quamvis corpore & anima conſtet, abſolute ſpectari, cum ut ens ex anima & corpore conſtans conſideratur, relative autem, cum eum ut Patrem, vel ut Dominum conſideramus?

2 Verum ſi quis ita ratiocinaretur, ei reſponderem mihi modo in animo fuiſſe tradere definitionem ejus, quod omnino abſolutum foret, ita nimirum, ut nihil includeret relativi. Jam vero ens ex pluribus diſtinctis compoſitum includit aliquid relativi, ſcilicet conjunctionem, quæ per omnes Philoſophos relatio eſt; propterea quod conjunctio percipi nequit, niſi ſaltem duo entia ſimul cogitentur comparenturque, ideſt ordo unius ad aliud intelligatur. Ceterum & ipſa relatio inter duas res poteſt tum ipſa in ſe ſpectari, cum illas ſolas duas, aut plures res, inter quas eſt una relatio, conſideramus, tum cum ordine & proportione ad aliam inter alias res, ſive duas, ſive plures relationem, quando videlicet ens relativum aliud cum alio mente conferimus. Quo fit, ut etiam ipſa relativa poſſint & abſolute, & relative ſpectari: uti homo, qui abſolute ſpectatur, cum ſolum ejus partes intrinſecæ conſiderantur, relative autem, quando idem cum proportione & ordine ad aliam rem, ſcilicet ad filium, aut ad ſervum conſideratur.

3 Verum ſi vere loqui velimus, hoc ens compoſitum, ut homo, non eſt abſolutum, cum relationem includat, ſed minus relativum alio, nimirum Patre & Domino, quod pauciores relationes includat. De quibus gradibus relationum ſunt ſequentes Definitiones.

num. 44. Definitiones

Relativum enim aliud eſt primi gradus, aliud ſecundi, aliud tertii &c. Relativum primi gradus eſt relativum, ſive ordo, qui inter duo omnino abſoluta intercedit, ſive eſt unius omni-

Digitized by Google

no abſoluti cum alio omnino abſoluto comparatio. Unde hæc relatio eſt ex primis, quæ in iis duobus entibus conſideratur, nec ullam aliam ante ſe poſtulat. Sic unitas altera alteri unitati æqualis eſt; unitas enim eſt aliquid omnino abſolutum, & æqualitas inter unitatem & aliam talis relatio eſt, ut aliam nullam ante ſe poſtulet.

2 Relativum ſecundi gradus eſt relativum, ſive ordo & relatio, quæ inter unam relationem primi gradus, & aliam intercedit; unde eſt relativum relativi: nam poſteaquam mens duas relationes cognovit, alteram inter duo entia, alteram inter duo alia, cognoſcere poteſt etiam relationem, quæ inter has duas relationes intercedit, ideſt utrum altera alteri ſit ſimilis, an diſſimilis, utrum ſit æqualis, an inæqualis. Sint, ex. gr. quatuor unitates; quemadmodum prima eſt æqualis ſecundæ, ſic tertia eſt æqualis quartæ: quare inter primæ cum ſecunda relationem primi gradus, & inter tertiæ cum quarta pariter relationem primi gradus alia relatio identitatis & ſimilitudinis reperitur. Quapropter relativum ſecundi gradus aliam relationem ante ſe requirit.

3 Relativum tertii gradus eſt relativum, ſive ordo & relatio, quæ inter unum relativum ſecundi gradus, & aliud relativum pariter ſecundi gradus intercedit. Unde eſt relativum relativi relativi. Quapropter relativum tertii gradus alias duas relationes ante ſe poſtulat, ut in ente ſint. Et ita porro relativum quarti gradus eſt relativum, ſive ordo & relatio, quæ inter duo relativa tertii intercedit. Quæ omnia illuſtrantur diverſis comparandi modis, qui inter quantitates inſtituuntur. Nam una quantitas eſt aliquid abſolute ſpectatum; ratio Geometrica inter unam quantitatem & aliam, quæ eſt modus, quo una quantitas aliam continet, aut ab alia continetur, eſt relativum primi gradus; proportio Geometrica eſt relativum ſecundi gradus, propterea quod in ea ratio inter primam quantitatem & ſecundam, quæ ratio eſt relativum primi, comparatur cum ratione inter tertiam & quartam, quæ pariter eſt relativum primi. Si vero fiant hæ duæ proportiones.

$$8 : 4 = 2 : 1$$
$$64 : 16 = 4 : 1$$

dicaturque ſecundam, quæ eſt quadrupla, eſſe æqualem quadrato primæ, quæ eſt dupla, tunc exſiſtet relativum tertii gradus. His conſtitutis hæc ſtatuo.

num.

num. 45. Propoſitio

Abſolutum eſt ratio ſufficiens, ſive determinans relativi primi gradus, & relativum primi gradus eſt determinatum; 2. Relativum primi gradus eſt determinans relativi ſecundi gradus, & relativum ſecundi gradus eſt determinatum. 3. Relativum ſecundi gradus eſt ratio ſufficiens, ſive determinans relativi tertii gradus, & ita porro. Nam quia res talis eſt in ſe ſpectata, idcirco tali modo ad aliam refertur, v. g. eſt eadem, atque illa, aut non eadem, ſimilis, aut diſſimilis, æqualis, aut inæqualis: abſolutum autem eſt res in ſe ſpectata num. 42. relativum primi gradus eſt eadem res abſoluta ad aliam abſolutam relata num. 44. ergo quia in re tale eſt abſolutum, idcirco in eadem eſt hujuſmodi primi gradus relativum; igitur abſolutum eſt ratio ſufficiens & determinans relativi primi gradus, & relativum primi gradus eſt determinatum.

Eadem ratione conficitur etiam ſecundum & alia; nam eo quod relativum primi gradus in ſe ſpectatum, ideſt quatenus relationem inter duo abſoluta ſignificat, tale eſt idcirco hanc, vel illam relationem habet ad aliud relativum, v. gr. eſt illi ſimile, vel diſſimile, æquale, vel inæquale, idem, vel diverſum: idemque dici poteſt de relativis aliorum graduum, ſi ad relativa gradus proxime majoris referantur; nam ſi hæc cum iis conferantur, ſunt quodammodo abſoluta, atque in ſe conſiderata.

num. 46. Animadverſio

Hic tamen advertendum eſt quaſdam in iiſdem entibus relationes exſiſtere, quarum alia ab alia non pendeat. Ita propoſitio univerſalis duas habere poteſt relationes alteram veritatis, quæ eſt prædicati cum ſubjecto convenientia, alteram ſimilitudinis cum alia, quæ pariter univerſalis eſt. Hæc autem ſimilitudinis cum alia, quod ad univerſalitatem pertinet, relatio a relatione veritatis non pendet; nam in genere propoſitionum univerſalium illæ ſimiles ſibi forent, quamvis altera vera eſſet, altera falſa.

num. 47. Propoſitio

Illud etiam pro certo ſtatuendum eſt, quodlibet relativum ab alio determinari & pendere. Quodlibet enim relativum talem ordinem & proportionem alius ad aliud ſignificat. Jam vero habere & ſignificare talem ordinem & proportionem alius ad aliud, potiuſquam aliam quamcumque, pendet, ac determinatur ab eo, quod illud ens, in quo relativum ineſt, in ſe

ſpectatum tale ſit potius, quam aliud; alioquin illud relativum ſine ratione ſufficienti foret. Ergo quodlibet relativum ab alio determinatur & pendet.

num. 48. Propoſitio

Nec minus indubium eſt relativum primi gradus ſine abſoluto intelligi non poſſe, nec relativum ſecundi ſine relativo primi, ideoque nec ſine abſoluto, nec relativum tertiis ſine relativo ſecundi, ideoque nec ſine relativo primi, nec ſine abſoluto, & ita porro nullum graduum remotiorum, & conſequentium relativum ſine relativis viciniorum & antecedentium intelligi quire. Quorum omnium univerſim ratio eſt, quia relativum eſt entis in ſe ſpectati cum alio ente in ſe ſpectato comparatio; num. 42. & 44. comparatio autem non poteſt intelligi, niſi quæ comparantur, ſeorſim intelligas, præſertim cum quod in quolibet ente intrinſecum eſt, ſit ratio ſufficiens & fundamentum comparationis.

num. 49. Propoſitio

Verum enimvero ſi omnia, quæ de ente abſoluto, & relativo dici poſſent, hic perſequi vellemus, numquam ad id, propterquod hæc præmiſimus, veniremus. Quare pluribus circa hanc materiem in locum commodiorem rejectis, res præſens exigit, ut notas, per quas determinans a determinato diſtinguatur, tradamus. Qua in re primum hoc oſtendendum ſuſcipio, ſi duo ſimul neceſſario ſunt, alterum alterius eſſe ſufficientem rationem, ſive determinans. Nam vel repugnat, & contradictionem involvit unum eorum eſſe ſine alio, vel non repugnat. Si etiam, datur ſufficiens ratio, cur fieri non poſſit, ut aliud ſine alio ſit, videlicet contradictio; ſed ſi fieri non poteſt, ut unum ſine alio ſit, intelligitur ratio ſufficiens, cur ſimul neceſſario ſint, quia nimirum oppoſitum contradictionem involvit, ſive eſſe non poteſt: Si non, igitur aliud ſine altero eſſe poteſt; quæ enim intrinſece non repugnant, eſſe poſſunt: ergo ſimul neceſſario non ſunt, quod eſt contra hypotheſim. Alio modo. Si ſimul neceſſario ſunt, oppoſitum, ideſt non eſſe, & unum eſſe ſine alio repugnat, ſive contradictionem involvit; ſed ſi unum eorum eſſe ſine alio repugnat, unum eorum eſt alterius ratio ſufficiens, atque determinans; nam repugnare non poteſt unum eſſe ſine alio, niſi unius conceptui repugnet alio carere. Sed in eo, quod unius conceptui carere alio repugnet, ineſt ratio ſufficiens, per quam cognoſcatur, cur unum ſine alio eſſe non poſſit, ideoque cur ſimul neceſſario ſint.

2. At

Digitized by Google

2. At enim fieri poteſt , ut duo ſimul neceſſario ſint, non propterea quod ratio ſufficiens in alterutro eorum ſit , ſed quia reperitur in alio tertio ente, quod una creare debet utrumque : nec eo quia conceptui unius eſſe ſine alio repugnet , ſed quia a conceptu abhorret entis alterius, quod ad utrumque ſimul ponendum ſua natura determinatum eſt .

3. Verum difficultati facile ſatisfit. Nam ſi ratio ſufficiens foret ſolum in alio tertio ente , cui unum ex his duobus ſine alio producere repugnaret , hæc duo ſimul quidem neceſſario forent , ſed neceſſitate tantum extrinſeca , non autem intrinſeca , illa nimirum , quam tertium ens ab iis diverſum inferret , quæque penderet ab eo, quod hujus tertii entis natura ita foret ad utrumque ponendum determinata , ut alterum ſine altero ponere eidem repugnaret : non autem illa , quam exigerent illa duo entia , quæque ab intrinſeca repugnantia , per quam contradictionem involvit aliud eſſe ſine alio , repeteretur. Quod nobis contrarium non eſt, qui in hac propoſitione de intrinſeca neceſſitate ſermonem habemus. Quamquam & illud negari poſſet hujuſmodi exſtare ens externum , quod abſolute neceſſario ſimul duo gignere debeat , tametſi nulla intrinſeca , & ab eorum natura petita neceſſitas hæc una devinciat. Cujus plena demonſtratio , ſi locus hic pateretur, duci poſſet ex ipſa Dei natura omnia liberrime producentis e nihilo , atque ideo plura gignere non coacti , niſi eorum intrinſeca & immutabilis neceſſaria connexio illud poſtulet .

4. Urgebis tamen : quamvis duo ſimul neceſſario intrinſece ſint , tamen non inde colligitur unum eorum eſſe rationem ſufficientem , atque determinans , aliud vero determinatum ; nam fieri poteſt , ut tam unum, quam aliud tamquam alterius ratio ſufficiens perinde accipi poſſint , propterea quod nullum habet majorem præ alio rationem, per quam præcipuas rationis ſufficientis partes ſuo jure ſibi adſciſcere debeat. Revera in corporibus nonne hæc duo ſunt neceſſario connexa , poſſe dividi in partes , & habere figuram , quæ in ultima ſuperficie ſita eſt ? attamen non eſt major ratio , cur aut diviſibilitas ſit ratio ſufficiens figuræ, aut figura diviſibilitatis .

5. Nego fieri poſſe , uti tam primum ſecundi , quam ſecundum primi ſit ratio ſufficiens , quia repugnat eamdem rem ſimul eſſe , & non eſſe ; atqui ſi tum primum ſecundi, quam ſecundum primi ſufficiens ratio eſſet, primum ſimul contineret id

quod ad ſecundum ponendum idoneum eſt, & requiritur, & non contineret; contineret, quia foret ratio ſufficiens, cur poneretur ſecundum; non contineret, quia immo ſecundum foret ratio ſufficiens primi, & contineret id, per quod primum poneretur: igitur fieri non poteſt, uti tam primum ſecundi, quam ſecundum primi ſit ratio ſufficiens. Idque præſertim verum eſt in iis, quæ neceſſario conjuncta ſunt, ſed non ita, ut eodem tempore exſiſtere incipiant & deſinant; ſed ita, ut alterum alteri proxime ſuccedat. Quod enim ante aliud exſiſtit, aliquid plus in ſe habet, per quod intelligi poteſt, cur ſit alterius ratio ſufficiens. Siquidem id, quod adhuc nihil eſt, rationem exſiſtentiæ alterius ſufficientem continere non poteſt. Ad allatam vero rationem concedo quidem non eſſe majorem, cur aut diviſibilitas ſit ratio ſufficiens figuræ, aut figura diviſibilitatis, proptereaquod neutra earum proxime aliam determinat, aut determinatur, ſed tantum ab alio tertio, a quo utraque earum determinatur. At nego, ſi proxime una earum ab altera determinaretur. Itaque in corporibus eſt trina in longum, latum, ac profundum finita extenſio, a qua proxime tum diviſibilitas in partes, tum figura determinatur, quia quod eſt finite extenſum, & neceſſario habet partes, in quas dividi poſſit, eo ſaltem ſenſu, quem §. 21. explicavimus, & figuram, ſive limitem extenſi, quo circumſcribatur: unde nec diviſibilitas figuram proxime determinat, nec figura diviſibilitatem, ſed idcirco ſimul neceſſario ſunt, quia cum eodem tertio neceſſario junguntur.

num. 50. Corollarium

Illud ſaltem pro certiſſimo tenendum eſt ex illis duobus, quæ ſimul neceſſario intrinſece ſunt, eo quod unius conceptui eſſe ſine alio repugnat, aut unum eſſe alterius ſufficientem rationem, atque determinans, aut utrumque ab eodem tertio, quicum intrinſece connexa ſunt, determinari.

num. 51. Corollarium

Nec minus illud verum eſt, ſi duo ſimul neceſſario intrinſece ſint, unum eſſe non poſſe omnino abſolutum habita alterius ratione: nam relativum eſt ordo unius ad aliud, quique non intelligitur, niſi ſaltem duo conſiderentur, ſed dependentia unius ab alio, quod eſt illius ratio ſufficiens, eſt aliquod relativum, ſcilicet ordo unius cum alio, & ſi duo intrinſece neceſſaria ſunt, vel unum eſt proxima ratio ſufficiens alterius, vel ab aliquo tertio, quicum intrinſece connexa ſunt, proficiſcuntur;

ergo

Digitized by Google

ergo ſi duo ſimul neceſſario ſunt, alterum habita ratione alterius non poteſt eſſe omnino abſolutum; nam vel proxime ab eo pendet, vel utrumque ab aliquo tertio: quo ſecundo caſu ſunt duo ejuſdem rei in ſe ſpectatæ relativa.

num. 52. Propoſitio

Porro ex hactenus dictis ſatis conſtare arbitror, quænam ſint notæ, per quas id, quod eſt alterius ratio ſufficiens, atque determinans a determinato internoſcatur. Nihilominus ſpeciali hac propoſitione magis enucleate illud exponendum aggredimur. Si duo ſimul neceſſario intrinſece ſunt, & unum eorum abſolutum eſt, aliud relativum, vel unum eorum relativum gradus minoris, v. gr. primi, aliud relativum majoris, v. gr. ſecundi, ſive uno verbo, primum, ſive intrinſece abſolutum ſit, ſive relativum, eſt res in ſe ſpectata, aliud vero eſt relatio ejuſdem rei cum alia collatæ; in his caſibus, & ſub his conditionibus abſolutum, ſive quod in ſe ſpectatur, eſt ratio ſufficiens, atque determinans, relativum autem, ſive comparatio ejuſdem rei cum alia eſt determinatum; nam cum ponantur hæc duo ſimul eſſe neceſſario, & intrinſece, vel unum eorum eſt ratio ſufficiens, & determinans alterius, vel ab eodem omnino intrinſeco determinantur; cum vero primum ſit aliquid abſolutum, ſive quamvis relativum, relativum tamen in ſe ſpectatum, ſecundum vero ſit ejuſdem abſoluti, ſive relativi in ſe ſpectati ad aliud relatio; primum eſt alterius ratio ſufficiens, atque determinans, ſecundum vero determinatum; ergo &c.

num. 53. Corollarium

Sin autem ſimul neceſſario intrinſece ſint, & unum alterius relatio non ſit; tunc ſaltem hæc duo ſunt relativa ejuſdem rei, quicum intrinſece, & neceſſario junguntur, duoque omnino abſoluta eſſe non poſſunt.

num. 54. Propoſitiones

Hæc vero, quæ a numero 40. circa notas, quibus internoſcamus determinans a determinato, diſputavimus, magno ſunt uſui Philoſophis ad diſtinguenda eſſentialia ab attributis; quem in finem in hac diſputatione verſati ſumus. Ac præſertim inde inferri poterit eſſentiam entis omnino abſoluti, cujuſmodi eſſe ſolum Deum in Theologia Naturali monſtratur, in aliquo omnino abſoluto eſſe ponendam, entis omnino relativi ſolum in aliqua relatione, entis mixti partim in abſoluto, partim in relativo, entis relativi primi gradus in relativo pariter primi gra-

gradus, relativi ſecundi gradus in relativo ſecundi gradus, & ita porro; hæc enim omnia ſunt in dictis entibus primum eſſe, primaque prædicata, quæ ab aliis intrinſecis non determinantur. Nam etſi, ex. cauſſa, relativum primi gradus proficiſcatur ab abſoluto; tamen abſolutum eſt extrinſecum reſpectu entis relativi; unde a nullo intrinſeco prædicato determinatur; generatim vero omnia attributa in aliquo relativo eſſe collocanda, ut ex comparatione definitionum utriuſque confici poteſt, & infra magis declarabitur, poſtquam de modis & accidentibus, quæ nunc explicare aggredimur, ex profeſſo diſſeruerimus.

num. 55. Definitiones

Tradita jam in antecedentibus definitione modorum, & accidentium reſtat, ut videamus quot generum ſint. Ac prima partitio accidentium eſt in abſoluta & relativa; abſoluta voco, quæ ita ſunt a re, in qua inhærent, diſtincta, ut nullibi quidem unquam poſſint ipſa per ſe exſiſtere, tamen ſunt aliquid rei jam conſtitutæ extrinſecus accedens non ſignificans puram inter unum & aliud relationem. Hujuſmodi eſt impetus, ſeu vis motrix in corporibus, in ſententia tamen eorum, qui volunt eumdem a motu tanquam cauſſam ab effectu diſtinctum exſtare in corporibus, quam ſuo loco invicta ratione efficiemus.

2 Relativa accidentia, quæque proprie dicuntur modi, ſunt ea, quæ relationem inter unum & aliud ſignificant, cujuſmodi eſt motus, qui eſt corporis ad ſpatium relatio, ut ſuo loco explicabimus.

num. 56 Definitiones

Alia eſt partitio modorum & accidentium in prima, ſecunda, tertia &c. ad quam liquido intelligendam via munienda eſt aliis definitionibus, & nonnullis etiam enunciationibus circa poſſibilitates modorum; quo nomine intelligo poſſibilitatem faciendi, aut recipiendi aliquid, quod neceſſario in ente non eſt, ſed abeſſe poteſt: ut in metallo eſt poſſibilitas liquefiendi, quæ liquatio non eſt ſemper in metallo; in igne eſt poſſibilitas liquandi metalla, qui actus liquandi non eſt ſemper in igne, ſed tunc ſolummodo cum metallis ſubjicitur.

2 Poſſibilitas primo alia eſt activa, quæ eſt poſſibilitas faciendi aliquid per cauſſam & rationem rei inſitam & intrinſecam; ut poſſibilitas liquandi in igne, qui eſt cauſſa cohibens

in ſe

in ſe efficientiam naturalem & ratione ſibi inſita liquat metalla : alia paſſiva , quæ eſt poſſibilitas recipiendi aliquid ab externa cauſſa ; ut poſſibilitas liqueſiendi in metallo , quod ab igne liquari poteſt .

num. 57. Definitiones

Utraque poſſibilitas explicata alia eſt proxima , ſive in ſtatu proximo , alia eſt remota , ſive in ſtatu remoto. Poſſibilitas in ſtatu proximo , cui ad conſequendum ſuum actum , ſive modum aliud nihil deeſt præter alterius rei ad alteram applicatio. Ita ignis habet poſſibilitatem activam proximam calefaciendæ manus , quod ad manum calefaciendam nihil requiritur aliud , niſi manus ad ignem admotio : ferrum vero jam expolitum utitur poſſibilitate paſſiva & proxima liqueſiendi , quia nil aliud deſideratur , niſi ut ignis ſubjiciatur .

2 Poſſibilitas in ſtatu remoto eſt illa , cui ad conſequendum actum & modum ſuum præter applicationem alterius ad alterum aliud quidpiam requiritur , ſive neceſſe eſt , ut in ea re ſit aliquis alius modus , aut accidens. Ita lapis frigidus habet potentiam in ſtatu remoto manus calore afficiendæ , ſcilicet ſi non ſolum ad manum admoveatur, verum etiam ipſe calorem, qui eſt aliud accidens , aquirat .

num. 58 Definitiones

Iterum has omnes poſſibilitates in alias duas diſpeſcimus ; quarum altera eſt abſoluta , quæ ut ſit in re non pendet ab aliquo modo & accidenti , ſed ab eſſentialibus proficiſcitur: ut in compoſito poſſibilitas diviſionis , ſive uno verbo diviſibilitas determinatur ab eſſentia compoſiti , ſcilicet a partium pluralitate : altera conditionata , quæ ut ſit in re , pendet a modo ; ex. cauſſa , in lapide poſſibilitas calefaciendi pendet a calore , qui eſt lapidis modus .

num. 59 Propoſitio

Quælibet modorum , & accidentium poſſibilitas ſaltem in aliquo ſtatu eſt attributum entis ; nam quod eſt poſſibile , id neceſſario abſolute poſſibile eſt ; num. 3. ergo cur ens poſſit aut illud accidens ſuſcipere ab alia re , aut in alia re generare , illud erit eidem enti , ſaltem in aliquo ſtatu , neceſſario abſolute conveniens. Non poteſt autem aliquid enti neceſſario abſolute convenire , niſi ab ejuſdem eſſentialibus determinetur ac profluat ; num. 49. eſt igitur illa poſſibilitas ſaltem in aliquo ſtatu rei attributum .

num.

Digitized by Google

num. 60 Propoſitio

Quare poſſibilitas conditionata erit quidem modus, ſi ſpectetur in ſtatu proximo, attributum vero, ſi in aliquo ſtatu. Nam in ſtatu proximo non eſt in ente, niſi adſit ille modus, a quo pendet. Cum ergo modus non ſemper neceſſario inſit, nec illa poſſibilitas ſemper neceſſario inerit. Sed præſente modo illa poſſibilitas eſt in ſtatu proximo, cum, v. gr. lapidi jam calido nihil aliud deſit ad conſequendum actum ſuum, niſi lapidis ad manum admotio. Conſtat igitur poſſibilitatem conditionatam in ſtatu proximo eſſe modum.

2 Alterum autem ita conficitur. Quælibet poſſibilitas ſaltem in aliquo ſtatu ab eſſentialibus determinatur, eſtque illorum attributum; num. 59. Igitur etiam poſſibilitas conditionata in aliquo ſtatu eſt attributum.

2 Sed adverſus dicta objici poteſt ex Wolphio, §. 158. Logicæ, omnes poſſibilitates conditionatas eſſe modos, quia non intelliguntur ineſſe rei, niſi poſito quodam ejus modo. At me tacente liquet ex dictis id eſſe verum, ſi ſtatum illarum proximum conſideremus, non vero, ſiquem tantum, ſive proximum, ſive remotum. Nec aliud ſenſiſſe puto ingenioſiſſimum Auctorem. Unde ſi quid peccavit, peccavit ſolum in præceptum ab ipſo traditùm, & ſæpiſſime inculcatum §. 39. Proleg. in Philoſophiam accurate definiendi conditiones, ſub quibus quodque prædicatum de re quadam enuntiatur.

3 Quod ſi quis nihilominus pro contraria ſententia ſtare vellet, hac uti poſſet ratione ad id, quod reſpondimus, infirmandum. Si poſſibilitas conditionata foret attributum in aliquo ſtatu, eam ab eſſentialibus proficiſci oporteret: non autem proficiſcitur; nam, ex. cauſſa, potentia ſecandi in ferro obtuſo pendet a poſſibilitate ſuſcipiendæ aciei; quæ poſſibilitas non eſt ferri eſſentia. Sed hoc argumentum valde infirmum eſt; ut enim aliquid ſit cum eſſentialibus neceſſario copulatum, atque ab iis determinetur, neceſſe non eſt, ut proxime procedat ab iiſdem; quippe ſatis eſt ut remote, ſive ut ab aliquo attributo, quod ab eſſentialibus proxime originem ducit. Re autem vera poſſibilitates conditionatæ proficiſcuntur ab aliquo attributo, nempe ab aliqua poſſibilitate abſoluta, quæ inter attributa numeranda eſt. Loco exempli ſit poſſibilitas conditionata ſecandi in ferro, quæ pendet ab illa poſſibilitate abſoluta, qua ferrum acui poteſt, ſive attenuari in aciem; quemadmodum enim

modus,

modus , uti ſectio pendet a modo , uti ab acie ; ita poſſibilitas modi non pendet a modo , ſed a modi poſſibilitate , ut potentia ſecandi a potentia recipiendæ aciei. Hæc autem altera poſſibilitas eſt attributum , utpote quod a ferri eſſentialibus oritur ; nam quia talis eſt ferri natura ; idcirco exacui poteſt , itaut fiat aptum lignis cædendis. Manet igitur poſſibilitatem conditionatam ab abſoluta ortum ducere , atque ideo ab eſſentialibus .

4 At enim hæc etiam altera poteſt eſſe conditionata , nempe a quodam alio modo profecta. Ita ferrum poteſt fieri lignis cædendis aptiſſimum : ſed hos gradus illud faciat oportet . Primo temperandum eſt , ſcilicet candens in aqua frigida immergendum ; quo pacto fit chalybs ; ferrum enim non temperatum mollius eſt, quam ut lignis cædendis aptiſſimum ſit. Dein optime exacuendum communi & omnibus noto artificio . Tum vero dicto muneri quammaxime idoneum eſt. Duo hic ſunt modi , acies accommodata ſectioni & temperatio , quia non ſemper inſunt in ferro. Poſſibilitas autem recipiendæ aciei, quæ ſit idonea ſectioni , eſt conditionata , quia pendet etiam a modo , ſcilicet a temperatione , quia ferrum aciem cædendis lignis aptiſſimam ante recipere nequit, quam in aqua frigida candens refrixerit. Cum vero poſſibilitas conditionata ſecandi pendeat a poſſibilitate ſuſcipiendæ aciei ; hinc liquido patet poſſibilitatem conditionatam ab alia conditionata pendere . Nulla eſt igitur ea ratio , quam modo attulimus pro noſtra ſententia .

5 Verum illud idem exemplum ferri , quo impetimur, nobis viam pandit ad id refellendum, quod contradictum eſt. Si enim ultra poſſibilitatem , qua ferrum acui poteſt , alium etiam gradum feciſſemus , ad poſſibilitatem abſolutam perventum fuiſſet, nimirum ad poſſibilitatem recipiendæ temperationis, quæ ab eſſentialibus oritur ferri , quæque idcirco facit , ut etiam poſſibilitas recipiendæ aciei , & per hanc potentia ſecandi altera minus , altera magis remote proficiſcantur. Ad hoc enim , ut quidpiam cum eſſentialibus copulatum neceſſario ſit , non eſt opus , ut inter illud , & eſſentialia unum tantummodo intercipiatur , quicum proxime conjungitur ; ſed poſſunt quantumvis multa intercedere , modo omnia vi neceſſitatis colligata conſerte contexteque ſibi aliud alii ſuccedant .

6 Sed iterum adverſarii premunt ; itaque diſſerunt. Si poſſibilitates conditionatæ , aut proxime , aut remote ab aliqua abſolu-

ſoluta, & ab eſſentialibus orirentur, in aliquo ſtatu, ſaltem in remoto forent rei neceſſariæ, ab eaque divelli non poſſent. At in nullo ſtatu neceſſariæ ſunt, non in proximo, ut nos oſtendimus, & quia poſſunt eſſe in remoto; non in remoto, quia poſſunt eſſe in proximo. Ita in ferro priuſquam acuatur, eſt poſſibilitas ſecandi in ſtatu remoto; ſed in eo ſtatu neceſſaria non eſt, quia poteſt abeſſe, & revera abeſt, cum ferrum acuitur. Rurſus ferrum acutum utitur poſſibilitate ſecandi, & quidem in ſtatu proximo. At hæc abeſſe poteſt, & revera abeſt, cum ferri acies obtunditur. Tenetur ergo poſſibilitatem in nullo ſtatu eſſe neceſſariam.

7 Verum in hoc objecto non eſt niſi verborum luſus, qui fucum facere poteſt incautis. At ſi meminerimus diſtinctionis determinati & indeterminati, quam num. 7. ad oſtendendam neceſſariam differentiarum cum genere connexionem uſurpavimus, & exempli duorum equorum albi & rufi, quorum neuter definite eſt neceſſarius ad equitandum, aliquis tamen indeterminate neceſſarius eſt: continuo tricas hujuſmodi diſſolvemus. Inde enim facile intellectu eſt poſſibilitatem conditionatam in nullo quidem ſtatu definite neceſſariam rei poſſe putari; debere tamen in aliquo ſtatu indeterminate.

8 Nec inde tamen efficitur, quod adverſarii ſuſcipere poſſunt, ut aliquo evadant, nec ſe omnino his rationum laqueis indui ſinant, eas poſſibilitates potius ad claſſem differentiarum eſſentialium eſſe referendas, quam ad claſſem attributorum; propterea quod in eo congruunt cum differentiis, quod ab eſſentialibus indeterminate profluunt; contraquam accidit in attributis num. 7. Non, inquam, id efficitur: nam duo ſunt inter poſſibilitates & differentias lata diſcrimina. Primum in eo eſt, quod altera ex differentiis eſt omnino aliquid aliud ab altera; ut differentiæ *a ſe*, vel *per ſe*, ſi cum differentiis *ab alio*, vel *in alio* conferantur; at poſſibilitas in ſtatu proximo & remoto eadem eſt poſſibilitas, tametſi in diverſis ſtatibus conſiderata. Quod ſi regeras ens a ſe eſſe penitus idem, licet ſpectatum cum diverſis differentiis, quæ ſunt veluti ſtatus generis & entis, tamen altero diſcrimine res ad vivum reſecabitur: nam differentiæ ut ſemel cum genere conjunctæ fuerunt, ſine interitu totius rei amplius divelli non poſſunt num. 7. Id vero non cadit in ſtatus proximos & remotos, quorum quilibet poſtquam copulatus eſt cum ſua poſſibilitate, adhuc tolli poteſt, quominus

nus nec ens, nec ejus ſtatus poſſibilitas intereant. Ex quo efficitur poſſibilitates non eſſe numerandas inter differentias eſſentiales, ſed inter attributa, quæ ab eſſentialibus oriantur.

num. 61. Definitiones

Sed ut revertar quo ſpectabam, cum de hiſce poſſibilitatibus diſſererem num. 57. ex iis, quæ dicta ſunt in ſolutione objectorum num. 60. concluditur modos primos eſſe illos, qui ut ſint in ente, neceſſe non eſt, ut alius intrinſecus modus in eodem reperiatur; ut vero poſſint eſſe, pendent ſolum ab eſſentialibus: ſecundos, qui ut ſint in ente neceſſe eſt aliquem primum modum in eodem inveniri; ut vero poſſint eſſe, proxime pendent a poſſibilitate abſoluta modi primi, & inde remote in primo gradu ab eſſentialibus: tertios, qui ut ſint in ente, neceſſe eſt aliquem ſecundum modum, & ideo etiam aliquem primum in eodem exſiſtere; ut vero poſſint eſſe, pendent proxime a poſſibilitate conditionata modi ſecundi, remote in primo gradu a poſſibilitate abſoluta modi primi, remote in ſecundo ab eſſentialibus: quartos &c. ut percuſſio in corpore percuſſo eſt modus primus, quia ut corpus percutiatur, neceſſe non eſt aliquem alium modum in eo exſtare; ſed ſatis eſt aliud corpus in illud impingere, qui eſt modus alius corporis, videlicet extrinſecus. Quod vero poſſit ineſſe, pendet ab eſſentialibus; nam quia corpus eſt extenſum & impenetrabile, idcirco ab alio tangi & percuti poteſt. Impetus acceptio ab hoc alio eſt modus ſecundus; tangi enim & percuti debet antequam impetum ab altero accipiat; contactus autem eſt modus primus. Deinde a poſſibilitate contactus & percuſſionis, quæ eſt abſoluta, neceſſario fit, ut impetum mutuari queat ab alio: Quod vero ſecundum percutiat tertium corpus eſt modus tertius, quia præceſſerit impetus acceptio neceſſe eſt, quam aliud ab eodem percutiatur. Impetus autem acceptio eſt; ut diximus, modus ſecundus. Et ex eo, quod poſſit recipere impetum, quæ eſt poſſibilitas conditionata modi ſecundi, ſequitur etiam poſſe in aliud incurrere, & illud percutere.

num. 62. Definitiones

Hinc etiam conſequens eſt plures eſſe ſpecies poſſibilitatum, quæ conditionatæ appellantur. Alia enim eſt poſſibilitas conditionata remota in primo gradu, eſtque illa, quæ pendet ſolum ab abſoluta, & a modo primo; alia remota in ſecundo, quæ proxime pendet a remota in primo, & a modo ſecundo: alia

remota

remota in tertio, quæ pendet a remota in ſecundo, & a modo tertio, & ita porro. Exemplum ſume ab antecedenti numero.

num. 63. Corollarium

Ex quo facile intellectu eſt poſſibilitatem remotam in primo gradu fieri proximam, ſive in ſtatu proximo, cum in re eſt modus primus: poſſibilitatem remotam in ſecundo, cum eſt modus tum primus, tum ſecundus; remotam in tertio, cum ſunt modi primi, ſecundi, tertii: & ita de aliis.

num. 64 Corollarium

Antequam diſcedam ab hoc loco, in quo diſputavimus de poſſibilitate modorum, adverto rei, quæ actu ſit, eſſentiam in mera poſſibilitate cujuſdam modi non eſſe ponendam: nam res, quæ actu eſt, ſolis poſſibilitatibus modorum conſtare non poteſt; poſſibilitas enim modorum, qui abeſſe poſſunt, & aliquando abſunt, rem eſſe non ponunt; quod aliud eſt actu eſſe, aliud eſſe poſſe. Sed fundamentum & ratio ejus, quod eſſe poteſt, reponendum eſt in aliquo, quod actu ſit. Igitur eſſentia, quæ eſt prima omnium ratio, in eo quod actu eſt, non in eo tantum, quod eſſe poteſt, collocanda eſt. Hoc principio & aliis ſupra explicatis utemur ad eliminandas non paucas circa corporum eſſentiam opinationes, quæ poſt Carteſium ad Phyſicorum ſcholas obrepſerunt, quæque niſi ex eſſentiæ parum evoluta notione non potuerunt oriri. Tam evidenter in prima incurrunt principia, quæ hic expendimus.

num. 65. Propoſitio

Ac circa eſſentialia hæc primum ſtatuimus.

1 Cur definite exſiſtant, ſive actu ſint in ente, nulla intrinſeca ratio afferri poteſt: nam ante ipſa aliud nihil intrinſecum eſt unde oriantur, num. 2. niſi velis dicere differentias ſpecificas ſaltem indeterminate a genere oriri, atque ideo in genere indeterminatam ſui rationem habere, num. 7. Qua de cauſſa addidimus illud adverbium *definite*.

2 Hæc autem ratio repeti debet ab ente externo, ſi ab æterno non ſint a ſe. Nam quod aliquando non exſtitit, ipſum per ſe ſine ope alterius entis exſiſtere non poteſt; foret enim abſque ſufficienti ratione, nec ipſa eſſentia poteſt eſſe cauſſa, cur exſiſtant: nam eſſentia priuſquam exſtet, non eſt niſi mera poſſibilitas entis, quod ab aliquo intellectu, ſcilicet ſaltem a Deo poſſibile cognoſcitur. At poſſibilitas & nuda cognitio rei eam e nihilo non educit, nec ejus educendæ rationem ullam comple-

complectitur. Aliter omne poſſibile exſiſteret. Ergo cum nulla intrinſeca ratio ſit, ad externam & ad alterum ens confugiendum eſt.

3 Excipiendum tamen eſt ens a ſe. Nam eo ipſo, quod eſt a ſe, intelligitur & a nullo accepiſſe exſiſtentiam, ut ex ipſis liquet verbis, & ab æterno fuiſſe, ſive nullum cogitari poſſe vel minimum atque remotiſſimum tempus, in quo non exſtiterit. Si enim aliquando incœpiſſet exſtare, cum paulo antea non exſtabat, in illo ultimo puncto, quo a ſtatu poſſibilitatis ad ſtatum exſiſtentiæ tranſivit, ſibi exſiſtentiam tribuiſſet; eam enim uti ens a ſe aliunde habere non poterat. Id autem complectitur pugnantia; habuiſſet enim eodem modo exſiſtentiam, & non habuiſſet; illud, quia quod agit, & aliquid operatur, exſtat; nam ut commune fert Ariſtotelæorum axioma *operari ſequitur eſſe*: hoc vero, quia tribueret ſibi exſiſtentiam, quam non haberet. Si enim jam haberet, illam ſibi dare non poſſet. Quibus efficitur ens a ſe neceſſario exſiſtere & ab æterno, ejuſque exſiſtentiam ad eſſentiam pertinere, atque in eadem eſſe rationem intrinſecam cur exſiſtat.

4 Quod vero pertinet ad alias res, quarum exſiſtentia, neceſſaria non eſt, alia nulla ratio intrinſeca afferri poteſt, niſi ea, quæ definit cur ſimul eſſe poſſint, eaque ducitur a contradictionis principio, quod aliud alius negationem non includit.

5 Cur denique inſint attributa, ratio ſufficiens ab eſſentialibus petitur; ab iis etenim profluunt & determinantur.

num. 66 Scholion

Non parum momenti eſt in antecedentis numeri enuntiationibus, quarum ope a quibus cujuſque prædicati neceſſarii rationem petere oporteat, patefecimus. Quamvis enim dubium eſſe non poſſit inter Philoſophos; tamen neſcio quo pacto factum ſit, ut non ſemel rationes intrinſecas, ubi non ſunt, inquirerent, eaſque non invenientes in maximas difficultates inciderent. Sat erit unum afferre exemplum, quod præ manibus habemus, continui, de quo tanta inter Philoſophos luctatio eſt, ut expenſis graviſſimis rationum momentis, quibus contrariæ omnino ſententiæ ſuadentur, multi recentiores Philoſophi ſatius judicaverint ſuſtinere judicium, quam incurrere in aliquas ipſis inenodabiles difficultates. Verum mea ſententia fert omnium fere inextricabilium nodorum caput hoc unum eſſe, quod

extenſionis in longum , latum , atque profundum intrinſecam rationem , quæ non eſt , nec eſſe poteſt , quæſierint in partibus reipſa diſtinctis , quæ tantum abeſt , ut ſint aptæ componendo continuo , ut mentibus Philoſophorum , quæ illa imbutæ præjudicata opinione ad eam diſputationem accedunt , denſiſſimas tenebras offundunt , & eo ſenſim deducant , unde nullum exitum amplius reperiunt §. 20. Quod ſi continui & extenſionis ſolidæ tamquam primæ corporum eſſentiæ nullam intrinſecam rationem in partibus quæſiviſſent, multi eorum in vera ſententia Mathematicis innixa rationibus , quæ tam facile uti aliæ non poſſunt imponere , permanſiſſent , & multa ex contrariis præſidiis facile refutaviſſent .

Moneo tamen me non inficias ire ex attributis confici poſſe qualis ſit eſſentia : nam quemadmodum poſitis iiſdem eſſentialibus ponuntur eadem attributa, num. 69. ita poſitis iiſdem attributis neceſſe eſt poni eadem eſſentialia , quod eſſentialia ſunt determinantia , & attributa determinata. Sed tum demonſtratio dicitur a Logicis *a poſteriori* , & in ea mens ſibi quodammodo fingit attributa eſſe prædicata omnium prima , tametſi revera non ſint , idque mens ſciat .

num. 67. Propoſitio

Nunc autem videndum eſt , quænam ſint cauſſæ , unde modi oriuntur. Sed in anteceſſum illud primum oſtendo , quod præter eſſentialia attributa & modos nihil aliud eſſe poteſt in re . Nam quæ ſunt in rebus , vel ſunt neceſſaria ita , ut ſalva re abeſſe non queant , vel ſecus. Si ſecus , ſunt modi , vel accidentia. Sin autem neceſſaria , vel nullimode determinantur ab aliis intrinſecis , & ſunt eſſentialia , ſed generica , vel aliquo modo determinantur ; idque vel indefinite , & tum ſunt differentiæ eſſentiales, num. 7. vel definite , & ſunt attributa. Conſtat ergo omnia prædicata entis eſſe vel eſſentialia, vel attributa , vel modos & accidentia ; nam cum enunciationes contradictoriæ ſunt , alterutra neceſſario vera eſt. Ergo cum in tribus ſingulis membris allatæ demonſtrationis enuntiationes contradictoriæ ſint , ſequitur alterutram ſingulorum eſſe veram , atque ideo prædicata rei vel ad eſſentiam , vel ad attributa, vel ad modos pertinere .

num. 68. Propoſitio

Hoc oſtenſo conficiamus id, quod modo polliciti ſumus. Cur modi poſſint eſſe, ratio intrinſeca in eſſentialibus eſt vel proxime,

vel

Digitized by Google

vel remote ; nam omnes poſſibilitates modorum ſaltem in aliquo ſtatu ſunt attributa, num. 60. ſed cur ſint attributa, ratio in eſſentialibus eſt, num. 65. ergo eſſentialia rationem continent, cur modi in re poſſint eſſe .

num. 69. Propoſitio

Cur vero actu ſint in ente modi omnium primi , rationem habent ſolum in ente externo , quod illorum modorum eſt cauſſa. Nihil enim ſine ſufficienti ratione denuo exſiſtit ; modi autem hanc habere non poſſunt ipſi in ſe ; nihil enim quod aliquando non exſtat, per ſe poteſt exſiſtere ſine ope rei alterius . Eam igitur habere debent vel in aliquo intrinſeco prædicato illius entis , cujus modi dicuntur , vel in aliqua extrinſeca re . Aliud enim quod non ſit vel intrinſecum rei , vel extrinſecum, excogitari non poteſt ; ſed intrinſeca prædicata eam habere non queunt , non neceſſaria , ſcilicet eſſentialia & attributa ; ſecus enim amplius modi non forent , ſed attributa , quæ ab eſſentia vel proxime , vel remote neceſſario orirentur , non mutabilia ſcilicet ut alii modi ; ponuntur enim eſſe modi omnium primi , qui ab aliis modis minime oriuntur, num. 56. ſed præter eſſentialia , attributa , & modos aliud nihil in qualibet re ineſſe poteſt , ergo in nullo intrinſeco prædicato rei ratio eſſe poteſt , cur in ea ſint modi omnium primi. Reſtat igitur , ut quam ſufficientem rationem habere debent , eam in aliqua re diverſa ab illa , in qua futuri ſunt , habeant .

num. 70. Objectio

Sed hoc quamvis evidenter concluſum , in non leves difficultates incurrit. Et primo ad alicujus rei eſſentiam , aut ſaltem ad attributa pertinere poteſt vis , ſive conatus continuus & indeficiens mutandi ſtatum ; qualis in corporibus eſt gravitas , qua deorſum indeſinenter truduntur ; & ſi nihil ſubjectum ſit , quod motum impediat , infimum locum reipſa petunt. Jam vero corpus hac inſita atque eſſentiali vi gravitatis percitum ſtatum & locum jugiter mutabit , tametſi a nullo ente externo ſollicitetur ; & ſi motus deorſum impediatur , ut accidit cum manus lapidi cadenti ſubjicitur , is denuo exſiſtet ſine impulſu alterius corporis , modo tantum manum ſubducas. Conſtat igitur loci , aut cujuslibet ſtatus mutationem , quæ profecto modus eſt , ab aliquo intrinſeco , quod ad eſſentiam pertinet , oriri poſſe .

num. 71. Reſponſum

Ut huic objecto ſatisfaceremus, plura ex omnibus Philoſophiæ partibus principia nota eſſe deberent. Verum ex illis duo ſummis attingemus labiis, ne hic omnino deſideretur reſponſum. Primum eſt, in rebus finitis & modorum capacibus, quales ſunt corpora & animæ, & quæcumque a Deo ſubſtantiæ conditæ fuerunt, nullam omnino ineſſe vim tamquam partem ſtrictiſſime eſſentialem, quæque ab aliis divelli non poſſit, quin tota ſubſtantia intereat, num. 7. in ſubſtantia vero infinita, qualis eſt ſolus Deus, ineſſe quidem vim eſſentialem & inſeparabile principium agendi, non tamen in ea poſſe ullos exſiſtere modos. Quo ſoluta manet propoſita difficultas. Negatur enim cum corporibus, aut cum aliis quibuſcumque ſubſtantiis accidentium capacibus poſſe impetum, aut quamcumque vim arctiſſimo eſſentiæ primariæ vinculo colligari. Scio non paucos Philoſophorum huic refragari ſententiæ, Carteſianos quidem, quod ad animam pertinet, Leibnitii vero Wolphiique ſectatores etiam, quod attinet ad corpora; niſi fortaſſe naturam & eſſentiam non adeo ſtricto ſenſu, quemadmodum nos, acceperunt. Verum utcumque ſit, non eſt hujus loci has ſententias refellere. Quod ſi quo loco de his ex profeſſo tractaturi ſumus, eo non poterimus efficere, quæ modo propoſita ſunt, diſtinguendum erit inter illas eſſentiæ partes, quæ inertes ſunt, & quodammodo otioſæ, interque illas, quæ actuoſæ appellantur, quales ſunt vires, ſive juges & continui agendi ſtatumque mutandi conatus; nec non poſitæ enunciationis ſenſus hac conditione reſtringendus erit: niſi ſint ex iis modis, qui perennem ſtatus mutationem ſignificant, & a vi eſſentiali proficiſcuntur. Ceterum quod ad vim motricem corporum attinet, eam eſſe accidentalem in altera hujus Tomi parte oſtendemus.

num. 72. Propoſitio

His ita explicatis circa modos primos, facile erit illa etiam ſtatuere, quæ ad ſecundorum rationes ſufficientes attinent. Dico itaque modos ſecundos cur actu ſint in re, rationem habere in modis primis, quod eos neceſſario in eadem ante requirunt, quam in illa eſſe poſſint, num. 56. id tamen vel in iis ſolis, quod poſitis modis primis, ſtatim etiam ſecundi ponuntur; ut qui totam ſufficientem rationem in iis habent: quemadmodum motus, qui impetum corpori impreſſum ſtatim conſequitur, quin alio aliquo corpore externo opus habeat; vel

ſimul

ſimul in modis primis, & in alio ente, ſi quandoque accidat, ut primi requirantur quidem, non tamen omnem rationem ſufficientem ſecundorum contineant. Ut, ex. cauſſa, lapis ebulliat, primo calcinandus eſt; quod perficitur dum igne partes intimæ lapidis excoquuntur, conſumuntur, & atteruntur. Sed non ſimul ac peracta calcinatio eſt, calx effervefcit, tametſi hic modus lapidis ante deſideretur, quam idem lapis ebulliat. Sed aquæ mixtio, quicum fermentetur, neceſſaria eſt.

2 Quod autem de modis ſecundis habita ratione primorum dictum eſt, id valet etiam in tertios cum reſpectu ad ſecundos & ad primos; in quartos autem cum reſpectu ad tertios, ſecundos, & primos; & ita porro in alios longiori intervallo a primis diſſitos.

num. 73. Scholion

Si qui tamen ſint, quibus ea ſeries continuetur: habet enim etiam Philoſophia ſuas ſeries, ſed finitas ſaltem, dum verſatur in contemplatione qualitatum rei definitæ ac circumſcriptæ: imo ſeries iſtiuſmodi differunt a Geometricis, quæ in infinitum uſque continuari poſſunt. Ceterum quem uſum Mathematicæ progreſſiones præſtant, eidem aut valde ſimili eſſe videntur etiam Philoſophicæ. Nam quemadmodum ibi ex intuitu naturæ progreſſionis inter paucos numeros, qui ſub oculos veniunt, venimus in cognitionem qualitatis progreſſionis ceterorum omnium uſque in infinitum; ita in ſeriebus ad Philoſophiam pertinentibus idem conſequimur. Nam, v. gr. ex eo, quod ex dependentia ſecundorum a primis, & tertiorum a ſecundis, & primis, ac quartorum a tertiis, ſecundis, ac primis, naturam progreſſionis inter omnes alios vel ſi infiniti forent, perſpexi, idcirco etiam novi omnes alios ab iis omnibus, qui in ea ſerie præcedunt, pendere, ut hoc quaſi univerſali canone in quolibet modo, qui mihi ſe offerat, in poſterum uti poſſim. Id in cauſſa fuit cur ad exemplum Cl. Wolphii, qui nonnullas in Philoſophiam ſeries induxit, & præſertim pulcherrimam illam, & ad oſtendendam Divinæ Mentis profunditatem accommodatiſſimam de ſtatibus mundi, quorum primus continet rationem ſecundi, primus & ſecundus rationem tertii, primus, ſecundus, & tertius rationem quarti, & ita porro omnes antegreſſi conſequentium rationem habent, Tom. I. Theol. Naturalis, ad exemplum, inquam, Chriſtiani Wolphii & ſuperiores ſeries num. 56. 57. in hunc locum introduxerim, & multas alias in univerſam Philoſophiam ſim introducturus.

num. 74. Propoſitio

Nunc pergam ad illam celeberrimam quæſtionem, quæ adhuc mihi reſtat examinanda, de immutabilitate eſſentiarum, quam poſt inſignes Philoſophos Platonem & Ariſtotelem utriuſque ſcholæ Sectatores ad hanc uſque diem ad unum defenderunt. Sed cum eſſentias primarias a ſecundariis nequaquam diſtinxerint, nec ideo latum neceſſitatis, unde immutabilitas oritur, connexionis diſcrimen perſpexerint, non parum obſcure mihi in hoc verſati eſſe, & rem acu minime tetigiſſe videntur. Quod enim ad oſtendendam eſſentiarum immutabilitatem ab æterno ad rei poſſibilis naturam confugerunt, id quidem efficit eſſentias ita intellectas atque in ſtatu poſſibilitatis conſideratas immutabiles eſſe; propterea quod rem eſſe poſſibilem abſolute neceſſarium eſt, nec ideo poteſt aliter eſſe, aut ulli mutationi ſubjectum: hoc tamen non magis pertinet ad immutabilitatem eſſentiarum, quam accidentium atque modorum. Nam etiam hæc ab æterno poſſunt eſſe, atque ideo utuntur immutabili poſſibilium neceſſitate. Videndum eſt igitur utrum veræ & primariæ eſſentiæ habeant aliquid amplius, quo etiam in hoc ab accidentibus diſtinguantur. Qua in re ſic diſſero.

2 Primum eſſentia illius entis, quod exſiſtit a ſe, ideoque ab æterno, nec umquam interire poteſt, eſt omnino abſolute immutabilis, quod ad illa omnia, quæ in illud ens intrinſece cadunt, ſcilicet & quod pertinet ad exſiſtentiam, quia ſemper neceſſario habuit & habiturum eſt, & quod attinet ad modos, quia ut in Naturali Theologia conficitur, nulli propemodum in eo ſunt, & quod ſpectat ad alia intrinſeca omnia, quia nihil Deo addi, nihil detrahi poteſt. Igitur Supremi Numinis immutabilitas nulla omnino conditione reſtringitur, & quamlibet intrinſecam mutationem repellit.

3 At alia omnia, quæ a Deo condita ſunt, atque in nihilum, unde emanarunt, reverti poſſunt, primo intrinſecam in exſiſtentia mutationem ſubire queunt, quod illam nec ab æterno habuere, & quolibet momento amittere poſſunt. Deinde aliam etiam intrinſecam accidentium, quæ ad eſſentiam non pertinent; modo enim hoc accidenti, modo hoc alio affici poſſunt.

4 Reliquum igitur eſt, ut tota neceſſitas & immutabilitas ad eſſentiam pertineat; quæ duæ qualitates in hoc poſitæ ſunt, ut antequam eſſentiæ exſiſtentiam acquirerent, genus earum

cum

cum aliqua ſaltem ex pluribus differentiis ita neceſſario conjungi debuerit, ut nullatenus aliter eſſe potuerit, num. 7. quia nec genus ipſum per ſe, nec cum aliqua ex differentiis minime capacibus exſiſtere quivit: poſtquam vero genus & differentiæ eſſentiales copulatæ fuerunt, connexio tam neceſſaria & immutabilis eſt, ut nullum ex iis ſejunctum ab aliis permanere poſſit, nihilque detrahi queat, quin totum ens in nihilum redeat. Quamobrem eſſentialium priuſquam exſtent, connexio neceſſaria & immutabilis eſt, ſed indeterminate; ut vero exſtiterunt, determinate quidem utraque proprietate gaudet, ſed non omnino abſolute, uti copulatio eſſentialium entis a ſe, ſed tantum ſub hac hypotheſi & conditione, ſi ens in nihilum non abeat, ſi pars quædam ejuſdem exſiſtere pergat. Cum enim præter Deum, alia omnia in nihilum reverti poſſint, hoc ſane pacto etiam connexio tolli poteſt.

5 Quare cum omnes eſſentiæ dicuntur a Philoſophis omnino immutabiles & abſolute neceſſariæ, vel id intelligendum eſt de ſtatu poſſibilitatis, quod tamen non minus pertinet ad eſſentias quam ad modos, vel illud abſolute non ſtrictiſſime accipiendum eſt.

6 At enim etiam eſſentia primaria mutationi obnoxia eſt; quamvis enim ſub conditione a nobis adjecta tolli copulatio non poſſit; tamen genus poſteaquam cum aliqua differentia conjunctum eſt, aliam eſſentialem ſuſcipere poteſt, quin primam amittat. Ergo quamvis eſſentia primaria mutationem diminutionis ſubire nequeat; tamen adjectionis mutationem accipere poteſt.

7 Ad hæc concedo quidem eſſentiam jam conſtitutam, & exſiſtentem aquirere poſse novam accidentalem differentiam, quæ ſalvis ceteris rurſus abeſse queat; at nego illam eſse aptam ſuſcipiendæ novæ differentiæ eſsentialis & primariæ, quæ ſine rei totius & ſingularum partium interitu rurſus divelli non poſſit. Si enim ante exſtabat ſine hac differentia, id argumento eſt hanc in illa non eſse neceſsario. Quod ſi ita eſt, hæc iterum divelli poteſt, ſalva eadem re, num. 38. ſequitur ergo nihil eſsentiale primarium eſsentiæ primariæ addi poſse.

8 Atqui res contra ſe habet; nam, ex. cauſsa, ut ens copulatum eſt cum differentia primaria *per ſe*, & factum ſubſtantia, rurſus conjungi poteſt cum alia differentia primaria, qua conſtituitur ſubſtantia corporea, quæque eodem vinculo, quo

differentia per ſe, cum ente conjungitur. Fieri namque non poteſt, ut in corpore natura corporis intereat, & ſubſtantia perſiſtat.

9 Verum aliud eſt loqui de genere deque eſsentia priuſquam exſtent, & a mente ſolum ſpectantur abſtracta vel ab omnibus, vel ab aliquibus primariis & eſsentialibus differentiis, num. 7. aliud loqui de genere, atque de eſsentia exſiſtentibus. In hoc enim ſtatu copulata eſse debent cum omnibus iis ſive differentiis, ſive attributis, quæ neceſsario requirunt. Nam etſi mens facultatem habeat illa cogitatione ſejungendi, quæ ſimul neceſsario ſunt; reapſe tamen ea ſejunctio haberi non poteſt. Quamobrem ut genus & eſsentia ſemel exſtiterunt, aliud nihil abſoluta neceſſitate conjunctum aquirere poſsunt, eo quod ab initio cum omnibus neceſsario jungendis exſtiterint neceſse eſt. Nos autem hic diſputamus de eſsentiis primariis in ſtatu exſiſtentiæ, deque illarum in eodem neceſſitate & immutabilitate. Nam priuſquam exſiſtant, jam perſpicuum fecimus in eaſdem non cadere niſi vel neceſſitatem abſolutam, ſi poſſibilitas ſpectetur, vel ſi conjunctio, indeterminatam ſolummodo & ſimilem immutabilitatem, num. 7.

10 Ex quibus major etiam lux accedit iis, quæ diximus num. 38. dum verſaremur in hoc eodem objecto, quo illam enunciationem, quæ ab omnibus eſsentialibus entis determinantur, ſunt attributa illius propria, labefactare contenderunt. Id enim intelligendum de tota eſsentia rei jam exſiſtentis, in qua inſunt omnia, quæ neceſsario eſse debent. Quod ſi diſseramus de re, prout eſt in mente ſine aliquo eorum, quæ neceſsario inſunt, ſpectata, tunc haud quidem gravabimur dicere attributa, quæ ab omnibus entis ita abſtracti eſsentialibus proficiſcuntur, reperiri quidem in pluribus exſtantibus rebus, iiſque ſpecie primaria diverſis; ſed illud veriſſime ſubjungemus eſse nihilominus propria illius entis abſtracti.

11 Urgent adhuc adverſarii, & quam rationem num. 38. & ſuperiori attulimus, ſic infirmare conantur. Concluſio illa, qua efficis ſecundum cum primo junctum neceſsario in illo non eſse, eo quod antea primum ſine ſecundo exſiſtebat, non ita clara eſt, ut in dubium revocari non poſſit. Si quis enim tibi objiceret illud idem exemplum differentiarum, quæ antequam cum genere conjungantur, nulla definita neceſſitas certam aliquam illarum adigit ad hujuſmodi copulationem; ut vero con-

junctæ

junctæ ſunt , hæc definita neceſſitas ſupervenit ita , ut in nullius poteſtate ſit amplius differentiam a ſuo genere ſeparare : quid adverſus tua principia hiſcere auderes ? Siquidem inde efficitur copulationi poſſe accedere neceſſitatem, quæ ante non erat.

10 Quid quod ſi res aquirere non poteſt, quod rurſus amittere nequeat , nec amittere quit illud , quod aquirere denuo non poſſit ? Qua enim ratione primum probatur , eadem alterum probari poteſt. Nam idcirco negas differentiam , quæ ſupervenit , a genere divelli non poſſe , quia ſi genus ſine illa prius exſiſtebat , eamdem neceſſario non includit; ergo etiam negandum eſt id , quod ab ente detrahitur , non poſſe denuo ab eodem aquiri , quia ſi aliquando ſimul fuerunt , ſe mutuo non excludunt. Hoc autem generatim verum eſſe non videtur; nam multa ſunt , quæ amitti poſſunt , ſed amplius recuperari non poſſunt. Nec igitur verum eſt omnes differentias , quæ ab aliqua re denuo comparantur , ſalva eadem ſemper amitti poſſe , utpote quæ neceſſario non conjungantur cum aliis ejuſdem qualitatibus .

11 Ad primum hujus difficultatis caput dico latum eſſe diſcrimen inter genus , quod exſiſtit , interque idem genus , quatenus a mente percipitur. Genus enim , quod exſiſtit , eſt aliquod unum numero definitum ac ſingulare. Genus autem in mente eſt aliquod unum tantum in ſimilitudine, quæ inter plura ſingularia intercedit : ut ſubſtantia quatenus exſiſtit, eſt aut hæc, aut illa definita ſubſtantia vel ſpiritalis , vel corporea : at quatenus eſt in mente , avellitur a determinationibus diverſis , & ſignificat illa tantum prædicata , quæ in omnibus ſubſtantiis ſimilia ſunt , ſcilicet eſſe per ſe. Quid igitur mirum , ſi genus ita numero multiplex , & ſimilitudine unum cum nulla ex differentiis definite & neceſſario conjungi debeat ; poſtquam vero exſtitit , & unum definite factum eſt in hoc ſingulari , unum definite in hoc alio &c. ita neceſſario definiteque cum illa , quicum eſt , copuletur , ut ſalvum permanere , & ſimul ab eadem divelli non poſſit ? Non enim idem numero genus eſt, quod ante exſiſtentiam erga differentias ſolum habeat neceſſitatem indeterminatam , poſt exſiſtentiam autem neceſſitatem definitam. At ſi , uti volunt adverſarii , res aliqua exſiſtens poſſet denuo conjungi cum differentia , quæ amplius ſeparari non poſſet , eadem omnino ac numero res ante conjunctionem copulari cum ipſa neceſſario non requireret ; conjunctionem vero

ro perfectam in poſterum ut neceſſariam permanere poſtularet. Quæ duo ſimul pugnare confecimus ratione, quam hic adverſarii infirmare conati ſunt. Manet igitur rei, quæ exſiſtit, nihil novi accedere poſſe, quod amplius ſejungi non queat.

12 Quod ſi inde conſequitur nihil amitti poſſe, quod recuperari nequeat, ut in altero difficultatis capite oſtenſum eſt; id noſtram ſententiam minime evertit, quia verum eſt. Nam præter allatam rationem nulla exempla poſſunt afferri, quibus pateſiat aliquid poſſe a re divelli, quod omnino, abſoluteque impoſſibile ſit, ut iterum cum ea conjungatur. Nam ſi homines aut natura id præſtare non poſſent, non ideo diceretur abſolute impoſſibile, modo ab alio ente, ut a Deo fieri poſſet: poſſet autem, ſi aliqua ſe mutuo negantia non includeret. Quod ultimum addere volui, quia poteſt eſſe uſui refutandis rationibus, quæ ab aliquibus exemplis contra noſtram ſententiam peti poſſent.

§. 23. Propoſitio

Sed de his hactenus; nunc revertar ad id, cujus explicandi cauſſa in hunc ſalebroſum Ontologiæ locum excurri. Cum verum extenſum continuum nec ullas habeat actu partes, nec in eas dividi poſſit, quin totum intereat, ex iis, quæ ipſo antegreſſo ſcholio, & præſertim num. 7. diſſerui, ſequitur verum continuum extenſum, qualia ſunt primitiva corpuſcula proxime a Deo creata, habere ſuam primariam & ſubſtantialem eſſentiam conſtantem ex iis, quorum aliud ab aliis abſolute ſine omnium interitu divelli non poteſt, & ideo quodlibet ex iis vere & proprie unum eſſe, propterea quod neque infinita Dei potentia in plura diſpeſci poteſt, tametſi multis eſſe poſſit æquale, immo infinitis, ſi quodlibet ex his illo infinite minus ponatur. Ex quo fit, ut in corpuſculo primitivo veram & propriam unitatem etiam Mathematici habeant: unitas enim apud Mathematicos talis eſſe debet, ut alias æquales habere queat, quibuſcum copulata numerum conſtituat, & in partes etiam in infinitum diſpeſci, adeo ut ejus $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ pars &c. ſolum accipi poſſint. Hujuſmodi autem ſunt hæc primitiva corpuſcula; nam ex altera parte æqualia eſſe poſſunt, ex altera vero, tametſi quodlibet revera eſt unum, & in partes minime ſectile, virtute dividi poteſt in infinitum, quatenus alia in infinitum minora Deus creare poteſt §. 20. & 21.

C A-

Digitized by Google

CAPUT SEXTUM.

De Soliditate continui extenſi.

§. 24. Definitio & Propoſitio.

1. QUo poſito oſtendendam ſuſcipio ſoliditatem continui, cujus nomine intelligo illam partium conſiſtentiam, qua fit, ut extenſum figuram tueatur, & a corporibus incurrentibus comprimi nequeat, nec ea ratione, qua illius moleculæ tum continuæ, tum interiores ad centrum corporis accedant, & minus ac antea ſpatium occupent, ut cum veſcica inflata comprimitur, nec illa altera, qua dum pulſæ partes anteriores cedunt atque ſubſidunt, aliæ a ſiniſtris & a dextris poſitæ ſubſultant & elevantur, ut æquale ac prius compleant ſpatium, ſed alterius omnino figuræ, cujuſmodi ſunt aqua & aurum ipſum, dum malleo tunditur. Equidem ſcio quoſdam eſſe, eoſque magni nominis Philoſophos, inter quos olim Pater Lana in Magiſterio Naturæ & Artis Tom. I. Tract. 1. & nuper Cl. Molierius in libro Gallico, cui titulus *Leçon de Phyſique*, qui hanc ex natura rei extenſæ continuæ ſoliditatem conſequi negant & aſſerunt quamdam eſſe materiem ſimul fluidam, & omnino continuam, quæ quamvis in anguſtius ſpatium comprimi nequeat, tamen ictibus facile cedit, in omnes ſe vertit figuras, quoquoverſus cietur, & omnium corporum poros facillime permeat. Verum quia id vel ut hypotheſim ponunt, vel nullis, quæ fidem faciant, rationibus docent, ad meam ſententiam firmandam nihilominus accedo, & eo quidem libentius, quod inde conſtabit origo primitivæ corporum ſoliditatis, de qua Philoſophi recentiores inter ſe magnopere digladiantur, illudque eruetur eam, quæ a vi attractionis particularum oritur, haud eſſe primariam, ſed tantummodo ſecundariam, quæ aliam omnino diverſam in moleculis quadam vi cohærentibus requirit. Qua in re illud primo oſtendendum eſt extenſum continuum habere non poſſe motum aliquem inteſtinum minimarum partium, qualis eſt in arboribus, in aceto, aliiſque in fluidis, quo fiat, ut particulæ, quibus conſtat, aliæ aliorſum moveantur, hocque ſpeciali motu latæ ſitum in corpore mutent. Nam ad eum finem ut aliqua cujuſdam corporis pars ſeorſim moveatur, & in partem ab iis plagis, quorſum

ſum aliæ feruntur, diverſam, neceſſe eſt, ut ſuis illa finibus undequaque contineatur. Cum enim extenſum finitum ſuos terminos ſecum quocumque deferat, non poteſt, ex. cauſſa, ſurſum moveri, dum aliæ tendunt deorſum, quin termini illius ab aliorum terminis diſcreti ſint.

2 Quo conſtituto facile eſt inde extenſi continui ſoliditatem inferre, ut nullo ex dictis duobus modis comprimi poſſit; nam earum compreſſionum neutra fieri poteſt, quin particulæ extenſi motu inteſtino abripiantur in diverſas plagas ſurſum, deorſum, dextrorſum, ſiniſtrorſum, & quoquoverſus. Motus vero inteſtinus ſine diſtinctis atque diſcretis eſſe nequit terminis partium, quibus extenſum componitur: atqui partes continui extenſi terminis diſtinctis minime circumſcribuntur, §. 21. Igitur extenſa continua nullo ex dictis modis comprimi queunt, atque ideo perfecte ſolida ſunt.

3 Scio quid ad enervandam hujus argumenti vim reſponderi poſſit: aut motum inteſtinum compreſſionis ſine ullis propriis partium terminis poſſe conſtare, aut vi corporis comprimentis terminos ante non diſcretos poſſe diſcerni: nam quod ad primum attinet, ex eo quod in compreſſione quædam particulæ deorſum feruntur, quædam aliæ ſurſum, inferri nequit eas diverſis terminis definiri, propterea quod non recta, ſed in orbem in contrarias partes tendunt; dum vero corpora rotantur, aliæ partes aſcendere debent, aliæ vero deſcendere, quin a ſe invicem divulſæ ſint; ut contingeret in ſolida ſphæra, quæ torqueretur in gyrum. Verum etſi ad hunc compreſſionis motum neceſſum foret diſcretionem finium inter partes intercedere, antequam inde aliquid certo concludas, oſtendendum tibi eſt vim externam illius corporis, a quo aliud comprimatur, non ſufficere partibus diſcernendis, quod eſt alterum ex iis, quæ contradici poſſunt. Id enim adeo perſpicuum non eſt, ut inſtar evidentis principii aſſenſum ſine ulla demonſtratione extorquere debeat.

4 Verum ut ordiar a ſolutione primi, nego quidpiam convenire inter illum rotationis motum, quo partes omnes eumdem propemodum ſitum tuentur, ut accidit in converſione ſolidæ ſphæræ, interque illum alium, quo ſitus mutatio fit, ut evenit in contundendo auro, cujus partes alium aquirere ſitum ex mutatione figuræ liquido patet. Nam ille rotationis motus ſine ullo ſpeciali & inteſtino partium ſphæræ motu eſſe poteſt;

hic

hic autem nequaquam. Qui enim minimæ corporis partes ſitum internum & extimam figuram inde pendentem variare poſſunt, niſi aliæ ex iis ſeorſim ab aliis moveantur, & ideo ſuos peculiares terminos habeant, quibus undequaque definiantur? Quamobrem a converſione ſolidæ ſphæræ nihil peti poteſt, quod noſtram rationem infirmet.

5 Nec majus momentum eſt in altero, quod contradicebatur. Nam eſſentia & natura primorum corporum, quæ penitus continua ſunt, vel ſoliditatem firmitatemque deſiderat atque requirit, vel non. Si etiam, conſtat id, quod propoſitum eſt; quia tunc nullum perfecte continuum iis tamquam eſſentialibus carere poſſet. Sin minus; nego illis intrinſecam conſiſtentiam tamquam accidens poſſe ſupervenire. Hæc enim adventitia & extrinſeca ſoliditas aliunde proficiſci non poteſt, quam ex impetu aliquo, quo partes omnes ſe invicem trahunt, aut in centrum corporis, in quo coſtant, nitantur. Jam vero ex hujuſmodi impetu conſiſtentiæ ortus duci non poteſt, niſi ſingulæ partes jam aliquomodo ſint conſiſtentes, ut §. 21. num. 5. docui, & uberius alibi docturus ſum, & nunc quadamtenus concludi poteſt ex eo, quod fluidorum particulæ, quamquam in centrum telluris nitantur, nihilominus maſſa ex iiſdem compoſita mollis & fluida eſt. Igitur ſi conſiſtentia primitivis corpuſculis neceſſaria non foret ex eo præciſe, quod omnino continua ſunt, nullam aliunde extrinſecam aquirere poſſent. Extrinſecam, inquam, nam fateor poſſe Deum externam quamdam conſiſtentiam etiam fluido & molliſſimo corpori tribuere, quatenus vel e manu, ex cauſſa, in fluidum impingente ſtatim ac ad fluidi libramentum pervenit concurſum ad ejuſdem motum repente ſubtrahere poteſt, vel eidem contrariam vim æqualem imprimere; quorum alterutro fieret, ut corpus molle videretur conſiſtens, tametſi hæc ſoliditas non ex natura corporis mollis, ſed ab actione tantum divina & extrinſeca proficiſceretur.

6 Quidquod jam §. 25. num. 5. docui vim primitivis extenſis extrinſecus impreſſam ſatis non eſſe ad eadem in partes ſecanda, & partium terminos diſcernendos? Ex quo plane efficitur nec ſatis eſſe iiſdem extenſis comprimendis, cum ſine diſtinctione partium & terminorum compreſſio haberi non queat.

C A-

CAPUT SEPTIMUM.

De Tempore & Motu.

§. 25. Definitio.

ANtequam ad quantitatem ſucceſſivam, cujuſmodi eſt motus & tempus, gradum facerem, aliud mihi dicendum reſtaret de permanenti, quam hactenus examinavimus. Verum quia id alienum eſt a communi Philoſophorum ſententia, ad viam illi muniendam præſtat ante diſſerere de quantitate ſucceſſiva, & illa ſtatuere, quæ ſin minus omnibus, ſaltem majori & ſaniori parti Philoſophantium probantur, & ex quibus hoc aliud, quod hic veremur proponere, concludemus: præſertim cum hoc pacto ſub oculos rationem poſituri ſimus, qua in illud incidimus; quod cum in omnes partes valet, tum maxime ad artis inveniendi principia majori in luce ponenda, quam etiamnum factum fuerit. Ceterum, ut ad motum & ad tempus veniamus, quæ ſunt quantitatis ſucceſſivæ ſpecies, illud generatim animadvertere poſſumus, quod ſicuti plura generalem quantitatis ideam nobis exhibent, §. 1. plura vero ſimul conſtantia notionem permanentis ſubjiciunt, §. 3. ita plura, quæ ſimul non ſint, & quorum alterum exſtare incipiat, cum alterum deſiit, ſucceſſivæ notionem ſub oculos ponunt.

ARTICULUS I.

Diſſeritur ſpeciatim de motu.

§. 26. Scholion.

VErum ut huic obſcuriſſimæ materiæ lucem aliquam afferam, multa ex Theologia Naturali, aliiſque Philoſophiæ partibus in anteceſſum ponenda ſunt, quæ ſine illorum adminiculo, quæ hic diſſeremus, ſuis locis confici poterunt. Ac primo illud videndum eſt nullam in ente a ſe, quod eſt Deus, intrinſecam mutationem poſſe conſtare, nec in tempore, proptereaquod ab æterno fuit, & in æternum erit, nec in motu, quod eſt totus in toto loco, & totus in qualibet loci parte, nec in cognitionibus & volitionibus, quod omnia omnino ab æterno cognovit & voluit, nec denique generatim in nullis aliis intrin-

trinſecis, quod nullis accidentibus conſtat. Et quamvis ſex circiter mille abhinc annis animas & corpora e nihilo eduxerit, tamen omni intrinſeca abſoluta mutatione alius in aliud fuit expers, quod æterno conſilio æternoque actu ad res in tempore creandas relato uſus eſt. Unde tota fuit penes ea, quæ condita fuerunt, mutatio.

2 De quibus illud generatim ſciendum eſt ita omnia a Deo manare, ut non ſolum Supremi Numinis actione indigeant, quo primitus e nihilo fiant, quod per ſe clarum eſt; verum etiam ut ejuſdem continuatione opus habeant, quo perſeverent, & in nihilum non revertantur: ea ratione, qua lucis non ſolum ortus, verum & conſervatio ſolis præſentiam deſiderat, ut illo abeunte continuo lux omnis evaneſcat, perinde ac ſi numquam fuiſſet.

3 Hæc autem omnia, quæ a Deo manant indeſinenter, mutationibus obnoxia ſunt, ſubſtantiæ ſcilicet ſpiritales & inextenſæ ab alia in aliam ideam, ab alio in alium voluntatis actum tranſire poſſunt; extenſæ vero & corporeæ ab alio in alium locum migrare. Id tamen diſcrimen eſt inter hujuſmodi mutationes, ſi rem perſpiciamus intimius, quod quilibet ſubſtantiæ ſpiritalis actus idem ante permanet per aliquod tempus, quam alius in ejus locum ſuccedat. Quamobrem ſi ipſe ſpectetur per ſe toto illo tempore, quo perſeverat, ſimilis eſſe videtur creatæ ſubſtantiæ, quæ quamvis eadem ſit, tamen, ut duret, jugi ac perenni cauſſæ creantis auxilii indiga eſt. Nam ille quoque actus ſine cauſſa, a qua profluit, perſeverare non poteſt. Et quamvis ſubſtantia numquam deſinat, uti accidens ſpiritale deſinere & in aliud converti experientia comperimus; tamen id ab extrinſeco oritur, quod cauſſa externa numquam ſubſtantiam conſervare ceſſat, bene vero modum ejuſdem, non ab intrinſeco, quod etiam ſubſtantiæ poſſunt per parvum tempus durare, & aliæ in earum locum e nihilo educi.

4 At in corporum continuo motu jugis mutatio eſt, ſcilicet illorum de loco ad locum tranſlatio: quod nullus ne quidem minimus motus in eodem omnino loco eſſe quit.

§. 27. Definitio & Propoſitio.

Sed cum circa naturam, & definitionem motus non parvas turbas Philoſophi excierint, & in magnas undequaque difficultates incurrerint, hinc in expendenda hac de loco in locum tranſlatione, quam dedimus motui, diutius verſari operæ pretium

tium putamus. Qua in re valde difficile eſt generalem quamdam afferre definitionem, quæ in omnes motus locales conveniat. Motus enim corporis eſſe poteſt tum in vacuo, tum in pleno, idque in utroque dupliciter; nam vel vacuum eſt infinitum, in quo videlicet nulli ſunt aliqua parte termini, quibus circumſcribatur; cujuſmodi eſſet vacuum, in quo mundana moles ultra ſe nullum corpus extrinſecus habens moveretur; vel eſt aliquo termino definitum; cujuſmodi foret illud, quod inter duos cubiculi parietes aere & omnibus aliis corporibus eductis interciperetur. Item in loco, qui aliis corporibus plenus eſt, vel unum corpus tantum ab oriente, ex. cauſſa, verſus occidentem, ceteris quietis, movetur, vel una cum eo ſimul alia corpora circumpoſita feruntur, idque vel eodem verſus, vel in partem contrariam; quorum utrumque eſſe poteſt vel cum eadem celeritate, vel cum majori, aut minori. Quamobrem ad bonam motus definitionem generatim tradendam hæc omnia ſpectare neceſſe eſt, ut quadret in omnia, quibus vocabulum motus tribuendum eſt. Ad quem finem

1 Dico motum localem eſſe affectionem ſolidi extenſi, ſive uno verbo corporis, per quam corpus ſit proxime potens tangendi non ſolum plures alterius extenſi partes, ſed etiam aliam poſt aliam, idque ob rationem in ipſo corpore moto ſitam. Nam hæc definitio in omnes corporum motus optime convenit. Et primo cadit in motum corporis in vacuo; quia quamvis nullum aliud ſit corpus, cujus partes aliam poſt aliam contingat, proximam tamen ad illud obtinendum ipſum per ſe habet potentiam, cum ad eam rem nihil illi intrinſecus deſit, deſit tantum admotio cujuſdam alius corporis.

2 Cum vero corpus, quod moveri ponimus, aliis circumdatur, vel alia corpora utpote impetu carentia nullam hujuſce mutationis contactus rationem habent, vel aliquam. Si nullam, certum & exploratum eſt utramque definitionis partem in corpus, quod movetur, quadrare; nam revera alias, atque alias corporum circumpoſitorum partes gradatim contingit, & hujus mutationis contactus rationem habet totam in ſe: quo intelligitur alia corpora non moveri, tametſi corporis plures partes aliam poſt aliam contingant, propterea quod nulla mutationis contactuum ratio eſt in iiſdem.

3 Sin vero alia corpora ſibi hujus mutationis partem aſciſcunt, vel moventur eodem verſus, vel alio rſum; ſi eodem

ver-

verſus, & quidem eadem celeritate, ut eum arena ſimul cum navi, in cujus carina eſt, defertur, tunc verum quidem eſt hanc arenam alias corporum, quæ proxima ſunt, partes gradatim non contingere, diverſas tamen aliorum corporum, quæ navim circumambiunt, partes percurrit non proxime ſed remote, per extimas ſcilicet navis partes, quicum juncta unum veluti corpus facit. Quod ſi corpus eodem verſus ac alia circumpoſita, ſed majori, aut minori celeritate feratur, quatenus habet eamdem, perinde ac ſi cum iis unum, ut dixi, corpus conflaret, & contactum non mutat, niſi remote, ut explicavi, quatenus vero inæqualem, alias atque alias tangit gradatim etiam corporum proximorum partes, & quidem propter rationem in ſe contentam, ſi majorem habet velocitatem, propter rationem autem in aliis incluſam, ſi minorem.

4. Demum ſi alia corpora aliorſum, ſcilicet in contrariam plagam ferantur, ſive æquali, ſive inæquali velocitate, ſemper fit, ut novi ſubinde contactus exſiſtant, ſed non ſolum propter rationem, & impetum contenti corporis, verum & propter rationem, & impetum continentium. Quibus omnibus perſpicuum fit traditam definitionem ad omnes omnino motus locales ſignificandos pertinere; atque idcirco ab omnibus eſſe probandam.

§. 28. Objectio, & Reſponſio

At aliquis inquiet. Cum vacui ſpatii poſſibilitatem cum Epicureis defenderis, quidni cum iiſdem Philoſophis motum etiam definieris per corporis ad alias ſubinde hujus immenſi vacui partes translationem, præſertim cum in hac explicatione id commode cadat, quod rei mobilis naturam per relationem ad immobile, uti opus eſt, explanes. Nam locus intelligi debet immotus, antequam motum aliquem in eo percipias.

2. Sed mea ſententia eſt motum ad vacuum nullatenus poſſe referri. Nam vel illa poſſibilitas recipiendi corpora extenſa, de qua §. 8. & ſeq. diſſeruimus, conſideratur, in Deo, vel extra Deum; ſi in Deo, eſt quidem aliquid, ſcilicet immenſitas Divina, quæ potis eſt capere ac recipere extenſa, ſed cum Deus ſit totus in toto, & totus in qualibet parte, ea poſſibilitas nulla donata extenſione, quæ plura requirit extra ſe poſita, fingi poteſt. Sin vero extra Deum, nihil propemodum eſt, nec ulla eſt actualis extenſio, quæ in illum cadere poſſit, §. citato. Quum vero ceteroquin conſtet motum dici non poſſe transla-

tionem a loco ad locum, niſi ad locum extenſum referatur, cujus ſubinde partes corpus motum acquirat: ideo liquet etiam motum haud poſſe referri ad vacuum, ſive ad poſſibilitatem recipiendi extenſa, quatenus hæc in Deo reperitur. Deinde motus ut realis quædam mutatio, & relatio a vi reali profecta ad id, quod nihil eſt, referri non quit; ex quo etiam conſtat motum referri nequire ad vacuum, quatenus extra Deum eſſe ponitur; quod enim nihil eſt, tranſiri non poteſt. Nullo igitur pacto nomine loci, quem corpus motum percurrit, intelligi poteſt vacuum, nec ad illud motus referri. Nec enim habita ratione aut rei, quæ nullam actu extenſionem habet, nullaſque partes, quæ ſubinde percurrantur, aut puri nihili, quod omni proprietate, & ideo cujuslibet extenſionis expers eſt, naturam poſſumus percipere motus, qui locum extenſum requirit, ut ad eum referatur. Bene vero intelligere quimus indolem motus per illa duo, quæ poſuimus, per proximam ſcilicet potentiam novas ſubinde partes in extenſo circumambiente tangendi, & per rationem in ipſo corpore moto contentam, quorum altero motus percipitur, uti percipi debet, tamquam aut actualis relatio ad partes reipſa conſtantes, ſi corpus motum aliis corporibus circumdetur, aut habens proximam potentiam hujuſmodi relationis, ſi nulla corpora circumſtent; altero autem differentia corporis quieti & nullam mutationem ſubeuntis a corpore moto intelligitur. Ad quam differentiam ſi animum advertiſſent Carteſius ejuſque ſectatores, qui motum aliud nihil, niſi corporis de vicinia aliquorum corporum in viciniam aliorum translationem eſſe voluerunt, ſuam Philoſophis ſententiam facilius probaſſent. Quamquam aliquo modo ſe tueri poſſunt iidem, quod motum eſſe voluerint translationem corporis de vicinia eorum corporum, quæ quieſcentia conſiderantur, in viciniam aliorum. Iis enim verbis *quæ quieſcentia conſiderantur*, ſignificari videtur rationem translationis eſſe in corpore moto, non autem in iis, quibus idem circumdatur. Ex altero tamen capite peccat Carteſiana Definitio, quod Carteſius vacuum, & ideo motum in vacuo inter ea, quæ eſſe non poſſunt enumerans, corpus ſemper reipſa a vicinia in viciniam transferri arbitratur, itaque ſuam definitionem intelligi vult.

3. Quod vero Adverſarii adjecerunt, motum referri debere ad ſpatium immobile, & idcirco ad vacuum, non ad plenum, quod moveri poteſt, id lubens aſſentirer, ſi vacuum ſimul foret im-

immobile & extenſum. Non enim extenſio loci minus neceſſario requiritur in ea re, quæ a loco in locum tranſire, ſive indeſinenter illum mutare intelligitur. Sed vacuum, ut docuimus, inextenſum eſt ſive quia poſſibilitas recipiendi extenſa eſt idem ac Deus, & ejus immenſitas, in qua immobilitas quidem percipitur, ſed nullæ ſunt partes, quas mutare, ſeu quarum ab aliis ad alias corpus tranſire poſſit, ſive quia extra Deum hæc poſſibilitas nihil eſt, nullaque actuali extenſione, quæ immobilis dici poſſit, donatur. Igitur vacuum penitus ineptum eſt, ad quod motus referatur.

4. Quamvis autem ſpatium plenum moveri queat, motus nihilominus ad illud referri poteſt propter hoc, quod ratio aut proximæ potentiæ mutationis, aut ipſius mutationis contactuum in corpore moto non in aliis ambientibus, aliquo ex iis modis, quos ſupra definivimus, invenitur. Quod ad corporis moti a quieto diſcrimen intelligendum eſt ſatis. Quo loco attendendum eſt etiam ad diſtinctionem cognitionis abſolutæ quantitatis continuæ, & cognitionis relativæ, de qua diſtinctione fuſius alibi; nam ex eo quod cujuslibet quantitatis continuæ minor alia in infinitum eſſe poteſt, §. 21., ſequitur continuum cognoſci non poſſe quantum ſit in ſe, ſed ſolum quantum ſit ratione habita alterius continui. Hæc vero relativa cognitio motus optime acquiri poteſt, etiamſi motus non ad locum immobilem, qualis nullus eſt, ſed ad mobilem referatur, ut patet ipſum per ſe, & ex iis, quæ diſputabuntur, magis magiſque patebit.

§. 29. Definitio, & Objectio

Ex quibus etiam eruitur Definitio quietis. Scilicet quies eſt permanentia corporis quantum in ipſo eſt, in proxima potentia tangendi eaſdem circumſtantium partes, eo quod nullam in ſe rationem habeat alias poſt alias tangendi. Nec enim adverſus hanc definitionem facit, quod Carteſianis fuit objectum, hinc conſequi paxillum in alveo fluminis infixum & immotum moveri, quod alias atque alias aquæ circumfluentis partes ſubinde contingit. Id enim non accidit propter rationem, & mutationem aliquam, quæ in paxillo ſit, ſed propter rationem, & vim, quæ reperitur in aqua. Ex quo aquam mutari ac moveri, non autem paxillum concluditur. Nec difficultatem facere debet, quod paxillum novum contactum & realem locum acquirit. Siquidem exploratum eſt, novas relationes

in aliqua re poſſe exſiſtere, quin ea res ullam intrinſecam mutationem ſubeat, ſi modo alia res, ad quam prima referatur, mutationi fiat obnoxia. Ita ſi ſit unus tantum paries albus, nulli alii ſimilis eſt; ſi vero alius denuo exſiſtat, continuo ſimilis alteri fit ſine ulla intrinſeca ſuimet ipſius mutatione, eo quod alius paries ſolum mutatur. Ita ſi prope unum corpus quieſcens ad palmi diſtantiam alterum ponas, nova exſiſtit inter utrumque diſtantiæ palmi relatio; at nulla in quieſcente mutatio eſt, ſed tota in altero, quod admovetur. Ita ſe res habet in contactu, qui eſt nova non diſtantiæ, ſed viciniæ & contiguitatis relatio, quique idcirco in paxillo quieſcente ſine ulla ipſius mutatione mutari poteſt, ob id ſolum, quod aliæ atque aliæ aquæ partes ob rationem in ipſis ſitam paxillum alluunt.

§. 30. Objectio, & Reſponſio

Neque plus eſt momenti in illa ratione, quæ ex motu navis deſumitur, quæque in eo poſita eſt. Fac navim orientem verſus ita eadem ſemper velocitate ferri, ut quatuor temporis minutis ſecundis decem ſpatii palmos conficiat, laterem vero, qui ſupra navis tabulato ſit, occidentem verſus ita pelli, ut eodem tempore & eadem ſemper celeritate decem ſpatii palmos intra navim percurrat. Profecto hic later ne hilum quidem movetur, quia in eodem imaginario ſpatio manens nec ad orientem nec ad occidentem accedit, & quantum motu communi navis occaſum verſus defertur, tantumdem præciſe motu proprio ſe verſus orientem ſubducit. Nihilo tamen minus ſi motus & quies ita, ut nos fecimus, definirentur, motum illi tribuere neceſſe foret, proptereaquod alias atque alias navis & aeris partes ſubinde contingit, idque ob rationem, & vim, quæ in ipſomet latere ineſt. Verum, ut ajebam, non plus eſt momenti in hac ratione, quia corpus aliquod nullam habere mutationis rationem & vim, & duas æquales habere in contrarias plagas, quarum altera perimit alteram, perinde eſt. Vis enim, cui contraria vi & æquali prorſus obſiſtitur, corpus nullatenus movere poteſt. Res autem ita ſe habet in illo eventu lateris, qui ut ex iiſdem velocitatibus concluditur, a navi, cujus cum partibus copulatur, vim recipit verſus occaſum æqualem illi, quam aliunde ortum verſus accipit. Quamobrem quieſcere debet, ut Adverſarii argumentabantur, quod tota ratio mutationis contactus non in latere, ſed in navi eſt, quæ ad occidentem adnavigat.

§. 31.

§. 31. Definitio

Porro ex his etiam intelligi poteſt , quid ſit externus & verus omnis corporis locus ; ſcilicet eſt illa ultima corporum circumſtantium ſuperficies , qua nimirum corporis , quod in loco eſſe dicitur , partes extimæ continguntur . Cum enim vacuum ut nulla extenſione donatum non poſſit dici exterior corporum locus , nihil eſt reliquum aliud , niſi ut nomine loci externi , quo ſcilicet Philoſophi intelligunt id , quo corpora quieſcentia comprehenduntur , quodque pertranſeunt mota , intelligamus extimam circumambientium ſuperficiem , quæ una ſcilicet corpus aliquod quieſcens circumſcribit , cujuſque partes aliam poſt aliam corpus motum ſubinde contingit . Ex hac vero eadem carentia extenſionis in vacuo plane conficitur ante corpus ſolidum non eſſe aut in Deo , aut extra Deum locum aliquem in longum , latum , & profundum negative extenſum , quod totam corporis maſſam illa triplici dimenſione donatam in ſe continere valeat . Ex quo infertur locum intimum corporum , cujus nomine Philoſophi volunt id , quod cum ſit actu tripliciter extenſum , ſolidam ipſam corporis maſſam , non autem ſuperficiem tantummodo in longum & latum expanſam uti locus externus capit , non eſſe diſtinctum ab ipſamet triplici corporum extenſione : atque ideo corpora ipſamet ſibi eſſe intimum locum .

§. 32. Objectio , & Reſponſio

Non ſum inſcius hæc in aliquorum reprehenſionem eſſe incurſura ; qui fortaſſe inquient hinc ſequi mundum finitum in loco non eſſe : non in exteriori , quia nullum aliud extra mundum corpus eſt , cujus extima ſuperficies extimam mundi contingat , non in interiori , propterea quod cum intimus locus ſit idem ac extenſa corporis maſſa , ſicuti corpus eſſe in ſuamet maſſa non dicitur , propterea quod res eſſe dicitur in alia re , a qua videlicet diſtinguatur , ut relationis unius ad aliud natura requirit , ita ob eamdem rationem eſſe res in intimo loco , qui ab illa non diſtinguitur , affirmari non poteſt . Quid igitur reſtat , niſi ut contra omnium Philoſophorum ſententiam & contra evidentem rationem mundum nullibi eſſe dicamus ? At quem ſanum Philoſophum putas hæc poſſe concoquere ?

2. Quem ? omnes ii vel plurimi atque graviſſimi , qui quamvis cum ſaniori Philoſophorum qua Veterum , qua Recentiorum parte vacui poſſibilitatem nobiſcum defendunt , tamen il-

lud non verum ſpatium, ſed imaginarium, & in noſtris ideis tantum exſiſtens eſſe volunt. Eorum eſt, ſi ſecum pugnare nolunt, tum interni loci, tum externi naturam non alia ratione, quam a nobis ſit factum, explicare nec ullo modo plumbeos illorum argumentorum pugiones, quæ non a natura ipſa rerum, de quibus diſſeritur, ſed a poteſtate vocum, quibus natura explicatur, ducuntur. Nam dictu incredibile eſt quantum vocabula uſu communi vulgi & Philoſophorum conſecrata nobis imponant. Rebus omnino iiſdem diverſa attributa fuerunt, diverſis etiam quandoque eadem: quæque ad res corporeas ſignificandas primitus inſtituta ſunt, ad res ſpiritales ſæpe transferimus; & e contrario, quibus notio rei ſpiritalis a primo ſubjecta fuit, iis ad corporeas ſignificandas abutimur. Hinc plurimi errores atque denſiſſimæ tenebræ oriuntur. Impartibilem rerum naturam in plura, quæ eſſe non poſſunt, diſcerpimus, quæ vero ut diſtincta ſecernenda forent, copulamus atque conjungimus, perinde ac ſi convenirent, & in una ſede morarentur. Senſationibus atque diverſis percipiendi modis, quæ ſolum in anima conſtant, corporum naturam obruimus; & viceverſa contemplandis corporibus aſſueti corporeas qualitates animæ affingimus, itaque rebus etiam clariſſimis tenebras obducimus, & in difficultates propemodum inextricabiles incidimus. Quod multis confirmarem exemplis, niſi me res, qua de agimus, ad ſe revocaret, quæ una comprobat id, quod aſſerui. Si apud vulgus nec non apud multos etiam Philoſophos proferrem corpus aliquod in loco non eſſe ob eas rationes, quæ in objecto propoſitæ ſunt, quibus non exciperer ſibilis? At quid amabo eſt corpus uti mundum non eſſe in loco, niſi non eſſe in loco vel externo, vel intimo? Quid vero eſt non eſſe in loco externo niſi nulla alterius corporis circumambientis extima ſuperficie contineri, propterea quod locus externus non eſt niſi extima quædam hujuſmodi ſuperficies, & præter ultimam mundi ſuperficiem aliud corpus non eſt? Quid autem non eſſe in intimo, niſi non eſſe in loco aliquo profunde extenſo, qui a corpore diſtinctus ſit? Quid vero hiſce enuntiationibus verius eſt & perceptu facilius? Expendantur rationes, quibus §. 8. & ſeq. poſſibilitatem recipiendi extenſa, ſive vacuum non eſſe niſi in Deo firmiſſime evicimus, & inde loci utriuſque naturam non aliam, quam ut a nobis explanata eſt, procul omni dubio eruemus.

3. At

3. At ſi hæc ita ſe habent, mundus, inquis, nullibi erit; quod alienum eſt ab omni ratione. Quid intelligis illo adverbio nullibi, vel alicubi? locum ne aliquem negative quidem, ſed vere extenſum antequam corpora exſiſtant? Nego mundum hoc ſenſu eſſe alicubi, propterea quod, ut oſtendimus, hic locus a corporibus diſtinctus eſſe non poteſt; ideoque nec habita ratione loci impoſſibilis corpus alicubi eſſe poteſt. Anne aliquod inextenſum, ſcilicet Deum, in quo mundus exſiſtat? Atqui ſi hoc modo accipiatur *alicubi*, mihi tecum res convenit, & utrique Naturalis Theologiæ principiis innitimur. Quamquam illud etiam dici poteſt præter Deum, a quo jugiter conſervatur, mundum eſſe in ſemetipſo, etſi non ita proprie, ut Deus ipſe in ſe dicitur eſſe.

4. Urges nihilominus, & ais, ſi ſpatium, & intimus locus ab ipſis corporibus alius non eſt, inde conſequens eſſe extenſum omnino continuum aliud alio denſius poſſe inveniri, & totum propemodum mundum intra parvi corporis locum poſſe compelli. Nam ideo continuum aliud alio denſius eſſe non poſſe conficitur, quod æqualis locus continua maſſæ inæqualis capere nequit. At in hac ratione quid roboris eſſet, ſi locus foret idem ac maſſa? Siquidem major & denſior maſſa majorem etiam locum haberet, quam minor & rarior, tametſi utræque finibus & locis externis iiſdem continerentur. Nihil igitur obeſſet quominus majorem in uno continuo quam in alio denſitatem poſſe inveniri diceremus. Hoc vero a communi omnium Philoſophorum ſententia atque ab evidenti ratione multum abhorret. Siquidem nullus partium contactus major eſſe poteſt proximo & continenti; qualis eſt in omni continuo; jam vero ſi aliud alio denſius foret, in denſiori partes ſe magis contingerent, quam in rariori. Igitur aliud alio denſius continuum excogitari non quit.

5. Ut huic difficultati ſatis pro virili faciam, primum ajo propter nullam intimi loci a ſubſtantia corporis diſcrepantiam præjudicari quidem hanc rem, quod in loco ita explicato nihil invenitur, quod extenſa continua maſſæ inæqualis reſpuere videatur, non definiri tamen, quia reſtat etiamnum inquirendum, utrum intima duorum inæqualium continuorum indoles æquales extrinſecos terminos ipſa per ſe repudiet. Et vero allata ultimum ratio tam firma ad ſpeciem eſt, ut rem hujuſmodi quaſi conficere videatur. Ceterum ſi eam reſecemus ad vi-

vum, falſis & jam exploſis principiis inniti, & ideo nullius roboris eſſe videbimus. Si enim continuum ex partibus actu diſtinctis non conſtat, nec ulli ſunt inter utramque, ex. gr., lamellæ omnino continuæ medietatem termini atque ſuperficies, qui fieri poteſt, ut partes ac medietates in continuo inter ſe tangant. Sint enim oportet, antequam aliquid faciant. Et proprii ſingularum termini exſiſtant neceſſe eſt, antequam contactus aliquis, qui in ſolis terminis eſſe poteſt, iis tribuatur. Quod ſi partes ſe tangere dici non queunt, nec ulla proximi aut remoti, continentis aut diſcreti contactus qualitas in eaſdem cadere poteſt; atque ideo nec dici poterit in continuo denſiori eſſe contactum partium proximo & continenti, ideſt ſummo omnium majorem, in quo uno tota illius rationis vis poſita eſt. Patet igitur ea nihil effici, & cogi adverſus eum, qui continuum aliud alio denſius exſtare poſſe defenderet. Ergo ne in eam ſententiam nos concedemus? Nunc profecto nequaquam. Nam argumentorum refutatione communis quidem opinio revocatur in dubium, non tamen ita refellitur, ut falſitatis liquido coargui poſſit. Ceterum ex eo quod motum continuum alium alio velociorem eſſe poſſe infra oſtendemus, extenſum quoque continuum aliud alio denſius conſtare poſſe inferemus.

ARTICULUS II.

Diſſeritur ſpeciatim de tempore.

§. 33. Propoſitio, & Definitiones

INterim cum omnis motus in tempore fiat, natura temporis enucleate tractanda eſt. Qua in re primum inveſtigandum eſt, quid nomine durationis ſit intelligendum. Illud igitur ens durare dicitur, quod coexſiſtit, aut coexſiſtere poteſt pluribus rebus, quæ ſimul eſſe non poſſunt, ſed quarum aliæ aliis ſuccedunt. Unde duratio generatim accepta eſt coexſiſtentia rei pluribus rebus, quæ &c. Quo ſenſu accepta duratio non eſt niſi exſiſtentia rei, quatenus refertur ad alias, quæ ſimul non ſunt; eique nihil aliud adjicit niſi hanc ad res, quæ ſuccedunt, relationem. Cumque exſiſtentia a re, quæ exſtare dicitur, non diſtinguatur, hinc effici poteſt durationem non addere rei, quæ durat, niſi hunc ad res ſibimet ſuccedentes reſpectum, ſi-

ve

ve non eſſe niſi ipſammet rem, quatenus aut coexſiſtit, aut ſit proxime potens coexſiſtendi pluribus, quorum aliud deſinit eſſe, cum aliud incipit. Quemadmodum enim motum eſſe pronuntiavimus illam corporis affectionem, qua ſit proxime potens tangendi plures alius corporis partes non ſimul, ſed aliam poſt aliam, quia cum nullum eſt aliquod aliud corpus ab eo, quod movetur, dici nequit corpus per motum diverſas corporis partes contingere: ita hic affirmamus durationem eſſe id, per quod res ſit proxime potens una exſiſtere cum pluribus, quorum aliud alii ſuccedat; idque ob ſimilem cauſſam. Cum enim Deus ſolus, antequam mundus conderetur, exſtaret, nomen durationis in illum cadebat, cum nullis tamen rebus, quæ ſibi ſuccederent, reipſa exſiſtebat. Ita ſi unum tantummodo corpuſculum illudque quieſcens ab eodem Deo creatum fuiſſet, durationis expers non foret, tametſi nullæ interea res alia poſt aliam orirentur & interirent.

2. Ex quibus conficitur traditam a nobis durationis definitionem optimam eſſe, utpote quæ cadit in omne rerum genus, quæ durare dicuntur. Nam illa omnia, quæ perſeverant, ſunt vel Deus, qui ab æterno fuit, & in æternum erit, quique nullam intrinſecam mutationem ſubire poteſt, §. 26., vel ſubſtantiæ ſpiritales & ejus modi, vel corporeæ & ejus pariter modi, §. 26. num. 3. & 4. Sed hæc omnia etiam Deus ipſe dum perſeverant, exſiſtere poſſunt una cum pluribus, quorum aliud alii continenter ſuccedat, ſcilicet alicui corporum motui, in quo perpetua contactuum mutatio eſt. Nam etiam ante mundi molitionem Deus condere poterat corpora, quorum cum motibus ipſemet exſtaret. Deinde cum jugiter in mundo quædam corpora moveantur, omnia alia jam tum, cum e nihilo prodiere, una cum motibus ſemper fuerunt. Difficultas eſſe poteſt an durationis nomen, ut a nobis explicatum eſt, ipſis motibus attribui queat; quamvis enim motus cum motu exſiſtere poſſit, quod eſt alterum ex iis, quæ in duratione rei cujuſdam percipimus, tamen unus motus, dum alter conficitur, non idem permanet, quod eſt alterum eorum, quæ durationis natura neceſſario requirit. Siquidem ut res durare ducatur, eadem permaneat neceſſe eſt, dum alia mutantur. In motu autem continuo indeſinenter corpus a contactu unius partis corporis quieſcentis ad con-

contactum alterius tranſit, ut ne minimum quidem in eodemmet contactu permanere dici poſſit. Quamobrem ſi ſtricte loqui velimus, motus proprie inter durationis ſpecies referendus non eſſet. Ceterum quia cum de motu loquimur, vel advertimus animum ad corpus ipſum, in quo ineſt motus, vel ad impetum, qui eſt illius cauſſa, quæ duo eadem perſeverant, vel inſtar unius & ejuſdem accidentis motum aliquem determinatum conſideramus, idcirco vocabula durationum etiam ad ipſos motus transferimus; præſertim quia ſi duos motus alterum breviorem, longiorem alterum cum quodam tertio diuturniore, v. gr., cum motu ſolis conferimus, alium alio magis permanere, ideſt cum pluribus motus ſolaris partibus exſtare videmus. Verum, ut dixi, proprie motus inter durationes referri non poteſt, quia cum perenniter fluat, & alia ipſius pars in aliam continenter mutetur, nihil eſt, quod in eo durare affirmari queat. Alia vero omnia eadem permanent, quod infra planius explicabitur. Manet igitur durationem, ut definita fuit, in omne genus rerum, quæ durare dicuntur, optime convenire.

§. 34. Definitiones

Hinc triplex exſiſtit duratio; æternitas, ævum, & tempus. Prima eſt duratio entis, quod initio caret, & finem habere non poteſt, & idem intrinſece ſemper perſeverat, etiamſi infinita ſibi ſemper ſucceſſiſſe, aut ſucceſſura cogitemus; cumque hujuſmodi ens ſolus Deus ſit, ut in Naturali Theologia monſtratur, æternitatis duratio in ſolum Deum cadit. Secunda eſt duratio entis, quod idem intrinſece permanens cum aliquibus finitis, quorum aliud in aliud indeſinenter mutatur, neceſſario exſiſtit, aut exſiſtere eſt proxime potens, ſed poteſt etiam mutari, dum hæc rerum ſucceſſio continuatur. Ita ſunt ſubſtantiæ ſpiritales atque corporeæ, & illa omnia, quæ iis accidunt, dempto motu; nam, ut infra conficiam, hæc omnia id neceſſario requirunt, ut ſi corpus aliquod interea moveatur, eadem intrinſece maneant, dum aliqua ſaltem vel minima pars motus perficitur, ideſt dum aliqua ſaltem ſibi invicem ſuccedunt, vel ſi nullum corpus ſit, quod moveatur, eadem intrinſece perſeverent, dum aliqua vel minima pars motus exſiſtere poſſe intelligitur. Unde inter æternitatem & ævum hoc intercedit diſcrimen, quod æternitas ſemper eadem perſeverans id neceſſario requirit, ut una cum flu-

xu

xu rerum etiam in infinitum continuato exſiſtat. Ævum autem neceſſario quidem poſtulat, ut exſiſtat cum aliquo ſaltem minimo rerum uno tenore fluentium curſu, non poſtulat autem, ut cum infinito. Tempus demum, quod eſt tertia rerum duratio, immo potius durationum aliarum menſura, eſt duratio non ejuſdem rei, ſed plurium, quorum aliæ aliis ita continenter ſuccedunt, ut nulla ex iis eadem unquam permaneat. Sed ut id planius fiat.

§. 35. Propoſitio

Primum ajo tempus in Deo non eſſe; nam temporis nomine Philoſophi omnes qua veteres, qua recentiores intelligunt durationem aliquam rerum, quæ jugiter fluunt, quarum ſcilicet aliæ in alias indeſinenter mutantur. Sed in Deo nihil propemodum eſt, quod in aliud mutari poſſit, propterea quod nulli intrinſecæ mutationi eſt obnoxius. Ergo nullum in ejus duratione tempus notari poteſt. Nec aliquid officit, quod etiam ante mundi creationem dies, annos, & ſæcula ab omni æternitate fluxiſſe imaginari poſſumus: nam hujuſmodi tempus non ipſis in rebus ineſt, ſed in mente ſolum hominis ita cogitantis, & ideo vocatur imaginarium. Quemadmodum enim poſſibilitas illa recipiendi extenſa, quæ ante corporum creationem, vel inter duos parietes cubiculi, unde omnia corpora extracta fuerunt, reperitur, revera nullam extenſionem habet, quæ ſpatium dici mereatur, ſed inſtar extenſionis percipitur, quia res extenſas, quas Divina Immenſitas ab ea poſſibilitate non diſtincta capere poteſt, inter hoſce parietes imaginatione ſubſtituimus, §. 8., & ſeq. ita etiam ante res conditas ſucceſſionem dierum, annorum, & temporum imaginamur in Deo, vel una cum Divina æternitate exſiſtentem, quatenus ſolis & aliorum Planetarum motus diurnos atque annuos ſibi invicem ſuccedentes imaginatione ſupplemus, perinde ac ſi ſemper fuiſſent, tametſi nulla vera & intrinſeca rerum aliarum in alias perennis ſucceſſio ab æterno fuerit, ſed ſolum immutabilis Dei natura, qui veri temporis, ſive rerum ſuccedentium creandarum poteſtatem ab æterno habuit.

§. 36. Propoſitio

Conſtat igitur in Deo verum tempus non eſſe; cumque tempus ut ſucceſſio rerum, atque ideo modus, ipſum per ſe conſtare non poſſit, ante res conditas veri temporis naturam

non

non poſſe inveniri planum eſt. Reſtat ergo ut ſit in rebus creatis. Videndum eſt autem an in omnibus creatis rebus ſit tempus an vero in aliquibus tantum. De hoc enim non levis eſt inter Philoſophos quæſtio. Sed antequam meum in hac re judicium interponam, primum ſtatuo nullam ſubſtantiam, ſive ſpiritalem, ſive corpoream, nullumque accidens poſſe exſiſtere ſolum tamdiu, quamdiu corpus aliquod ab uno ſpatii, in quo eſt ante motum, puncto inextenſo ad aliud continens & proxime vicinum motu ſe confert. Nam ſi cujuſdam rei exſiſtentia tamdiu ſolum duraret, quamdiu a puncto ad punctum corpus transfertur, poſſet dari motus, quo corpus a puncto ad punctum proximum ſolum pergeret. Sed hujuſmodi motus eſſe non poteſt: nam per motum vel minimum ſpatium extenſum percurritur; quod motu fit, ut corpus plures alius corporis extenſi partes alias poſt alias tangant, §. 27. Quare ſi motus eſſe poſſet, quo corpus a puncto inextenſo ad aliud punctum inextenſum tranſiret, conficeret ſpatium extenſum, quod conſtaret ex duobus inextenſis punctis, quorum alterum alteri continens & proximum foret. Atqui jam ſuo loco monſtravimus extenſum ex inextenſis componi nequire, §. 15. & 16. Igitur nihil durare & exſiſtere poteſt ſolum tamdiu, quamdiu corpus aliquod ab uno ſpatii puncto, in quo eſt ante motum, ad aliud transferatur.

§. 37. Propoſitio

Hinc ſi temporis inſtans intelligamus eſſe aliquid in tempore ſimplex & inextenſum, uti ſunt in ſolido puncta, & ita minimum, ut nihil temporis eo minus eſſe queat, ſequitur nullam ſubſtantiam, aut accidens ſive ſpiritalia, ſive corporea poſſe ſolo quodam momento temporis conſtare. Nam ſi feceris, quod profecto fieri poteſt, indeſinenter moveri corpus aliquod & antequam exſtet dicta ſubſtantia aut modus, & quamdiu exſtat, & poſtquam exſtitit, veriſſime affirmari poterit illo ſimplici inſtanti, quo perſeverat exſiſtere, corpus motu percitum non progredi niſi a puncto ad punctum continens proximeque vicinum. Nam eodem inſtanti temporis corpus in pluribus locis naturaliter eſſe non poteſt. Sed ſi plus, quam unum loci punctum temporis puncto conficeret, eodem inſtanti in pluribus locis reperiretur. Ex altera vero parte cum perpetuo moveri ponatur, illo inſtanti ſaltem a puncto ad punctum proficiſceretur. Pugnat autem cum ſpatii

&

& extenſi natura duo puncta inextenſa ſe proxime conſequi. Igitur inſtanti temporis nihil omnino exſiſtere poteſt. Præterea in inſtanti res incipit eſſe, aut deſinit; ſiquidem initium & finis ſimplici momento perficiuntur, non autem poteſt ſimul incipere atque deſinere, ſed inter initium & finem aliquid intercedat neceſſe eſt. Hæc enim duo ſunt in eadem re ſibi contraria. Simul igitur eſſe non poſſunt. At ſi rei cujuſdam exſiſtentia ſolum inſtans ſimplex & inextenſum duraret, eodem momento ſimul forent ejus initium & finis. Igitur denuo patet nihil ſolo temporis puncto poſſe conſtare. 2. Quamobrem dum aliquid exſiſtit, vel corpus, quod jugiter movetur, in eodem loco manet, vel peragrat aliquem locum inextenſum, vel extenſum: ſi primum, & alterum, ſolo inſtanti duraret, quod, ut oſtendimus, eſſe non poteſt; ſin tertium, per totum illud tempus, quo ſpatium extenſum peragratur, res illa perſeveraret. Igitur illud ſaltem conſequens eſt, dum aliquod ſive ſubſtantia, ſive accidens perſeverat, motum aliquem per ſpatium extenſum perfici poſſe, & quamlibet rem exſiſtentem una exſiſtere poſſe cum aliquo motu.

§. 38. Scholion

Quo loco animadvertendum eſt in iis, quæ modo ſtatuimus, multum eſſe momenti tum ad aliquos Philoſophos, atque Theologos refellendos, qui putant quædam, uti aliquos actus & habitus animæ temporis ſolum puncto durare poſſe, cum tamen illud tantummodo dici queat in inſtanti exſiſtere, quatenus integra & abſoluta ſuiſque partibus abſoluta primo ſtatus momento conſtant, non quatenus uno tantum inſtanti conſtare poſſint, tum ad eam dijudicandam quæſtionem de viribus mortuis, atque vivis, in qua nondum inter Philoſophos recentiores convenit. Cum enim ad eam tractandam veniemus, inter alia, quæ magnam toti diſputationi lucem afferent, videbimus nullam in vero momento vis quantitatem eſſe, quam metiri poſſimus, & vim momentaneam ſupputare idem propemodum eſſe, ac illam ſupputare quando non eſt, ſive metiri illius initium, perinde ac ſi non modus quantitatis, ſed quantitas foret.

§. 39. Propoſitio

His conſtitutis accedo propius ad illam quæſtionem, quam §. 36. propoſui, & ajo: Si nomine temporis Philoſophi intelli-

telligant, ut intelligere ſolent, continuatam rerum ſucceſſionem, & jugem alius in aliud mutationem, tempus non eſſe niſi in motu, non autem in qualibet alia creata re. Quod enim in motu ſit tempus, patet ex eo, quod per motum corpus ſit proxime potens jugiter tranſeundi ab alio in alium locum, ſive a contactu aliquarum corporis alterius partium ad contactum aliarum, ut numquam dici queat corpus motum aliquas tantum partes contingere, & in uno tantum loco reperiri. Quod autem in aliis rebus non ſit, conſtat ex iis, quæ modo ſtatuimus: nam quidquid extra motum eſt, idem perſiſtat oportet, dum aliquis ſaltem minimus motus perficitur. Motus autem quamvis apud omnes Philoſophos non ſit idem ac tempus, tamen in omnium ſententia in tempore ſit, propterea quod corpus motum alterius corporis mole majoris partes omnes ſimul tangere nequit. Alia igitur omnia præter motum eadem per aliquod tempus permaneant neceſſe eſt. Quamobrem etſi in rebus creatis aliæ præter motum mutationes exſiſtunt, ut in anima aliæ ideæ in alias convertuntur, tamen non eſt in iiſdem indefinens illa mutatio, quam in tempus cadere Philoſophi exiſtimant, cum ſingulæ res, quæ mutantur, ut ſingulæ ideæ per aliquod temporis intervallum eædem permaneant. Reſtat ergo ut tempus ſolum in motu ſit, & reipſa ſit idem ac motus, & ſolum ratione ab eo diſtinguatur, quatenus cum motum dico, conſidero in eodem potiſſimum ejus naturam, quæ in continua translatione corporis poſita eſt, cum vero tempus, animum præſertim adverto ad ejuſdem translationis magnitudinem, ſive quantitatem, quæ idem propemodum eſt ac certus aliquis motus.

2. Quæ omnia mihi veriſſima eſſe videntur; ſi tamen, ut a principio dixi, nomine motus continuatam rerum mutationem, ac ſucceſſionem intelligas. Si enim aliam huic voci notionem affinxeris, & tempus nihil aliud eſſe volueris, niſi durationem rei, quæ ipſa per ſe non poteſt perſeverare, ſed interit, & in nihilum abit, ſimul ac aliud ens eam conſervare deſinat, mihi tecum conveniret tempus ita acceptum in omni creata re ſemper exſiſtere. Omnia enim a Deo profecta hujuſmodi ſunt, ut ſine illius perpetuo conſervantis auxilio perſeverare non poſſint. Nullam tamen hujuſmodi rerum durationi intrinſecam mutationem tribuas, neque cum D. Bonaventura, & aliis ejuſdem Aſtipulatoribus rerum creatarum pro-

profectionem a Deo, uti effluvium lucis a Sole conſideres. Nam lux in jugi mutatione, & motu qui a motu ſolarium particularum quoquoverſus oritur, poſitus eſt; res vero creatæ ſine ulla intrinſeca nec Dei, nec ſui mutatione a Supremo Numine conſervantur.

§. 40. Objectio

Manet igitur tempus ita acceptum ut rerum mutationem, & ſucceſſionem includat, non poſſe niſi in motu conſiſtere. Illud tamen objici poteſt, tempus ab omnibus Philoſophis haberi pro menſura motus, cujus quantitas ex ſpatio percurſo per tempus diviſo dignoſcitur; nam quo majus ſpatium minori tempore percurritur, eo major motus exſiſtit. At ſi tempus idem foret quod motus, & aliud ab alio nulla alia diſtinctione, quam cogitationis ſecerneretur, tempus pro menſura haberi non poſſet. Nihil enim ſuimetipſius menſura eſt.

§. 41. Reſponſio

Ad hoc refellendum illud generatim pono, quod in hujuſmodi rebus potiſſimum animadvertendum eſt, quantitatem duplici modo poſſe cognoſci, abſolute, & relate; abſolute, quando cognoſcimus, quid ſit quantitas ipſa per ſe ſpectata, quot videlicet ſint ejus partes, quæ ſingulæ quantitates non ſunt, ſed una ſumptæ quantitatem componunt. Ita foret numerus decem ſubſtantiarum ſimplicium, & non extenſarum; nam quælibet ex iis ſubſtantiis quantitas ſtricte dici non poteſt, cum ſimplex propemodum ſit, & omni extenſione carens, ideoque perfecte una, non vero ex pluribus neque virtute conflata unitatibus, quæ omni quantitati neceſſariæ ſunt, §. 1., nec pluribus reſpondere, & æqualis eſſe potens, cujuſmodi eſt omnis extenſa, & continua quantitas etiam in ſententia noſtra, qui illam in plures partes ſecari poſſe negamus, §. 21., nam pluribus ſaltem extenſis æqualis eſſe poteſt, §. 19., 20., & 21. Quod ſi partes quidem cognoſceremus, ſed quæ adhuc quantæ forent, cujuſmodi eſt tota quantitas inde coalita, hanc abſolute, ſaltem perfecte non intelligeremus; nam totalis quantitas ex quantitate ſingularum penderet. Quamobrem ad eam quantitatem totalem in ſe noſcendam neceſſe foret ſingulas ſingularum partium, quæ proximæ ſunt, partes cognoſcere; nec enim ex partibus, quæ adhuc quantitate donantur, quæque aliis partibus conſtant, numerus partium totius colligitur, in quo numero partium noſ-

noſcendo cognitio quantitatis abſoluta poſita eſt.

2. Ex quo deducitur nullum continuum, ſive ſimultaneum ſit, uti extenſum, ſive ſucceſſivum uti motum abſolute poſſe intelligi quantum ſit. Quamvis enim aliquando fiat, ut aliquæ illius partes proximæ in noſtram cognitionem deveniant, ſingulæ tamen ex iis adhuc quantitate donantur, nec unquam ad partes omnino ſimplices, & inextenſas cognitione perveniri poteſt, §. 19. Quamobrem quotis partibus conſtet intelligi non quit, ideoque nec abſolute cognoſci.

3. Relate autem percipitur quantitas, cum eam novimus habita alterius ratione, ideſt cum novimus vel modum, quo alia aliam continet, aut ab ea continetur, vel differentiam, qua alia aliam ſuperat, aut ab ea ſuperatur. Quæ relativa cognitio poteſt & cum abſoluta conjungi, & ab eadem ſejungi. Nam numerum 20. ſubſtantiarum ſimplicium, & 10. ego cognoſco & abſolute, quia ſingulas utriuſque veras unitates novi, & relate, quia perſpicio alterum ab altero 10. unitatibus differre, vel alterum altero bis contineri. Si vero mihi continuum aliquod cognoſcendum proponatur, illud abſolute cognoſcere nequeo, num. 2. ſed tantum relate; neque enim corpus 20. palmorum differre a corpore ejuſdem quidem denſitatis, latitudinis, & altitudinis, ſed 10. tantum palmos longo quantitate 10, aut bis alterum altero contineri minus cognoſco, quam circa numerum 20, & 10. ſubſtantiarum ſimplicium eadem norim. Quo perveniri poteſt tertiam aliquam quantitatem continuam aſſumendo, cumque eadem duas alias, quarum cognitionem inquirimus, ſingillatim conferendo. Nam pro ratione ejuſdem vel diverſi modi, quo ſingulæ duæ a tertia diſcrepant, vel tertiam continent, aut continentur, ut ex Arithmeticæ elementis perſpectum ſit, illas vel æquales, vel inæquales, idque plus minus intelligimus.

4. His conſtitutis, cum, ut ex ſuperioribus conſtat, & magis etiam infra conſtabit, motus etiam inter quantitates continuas referri debeat, ſequitur illum abſolute, quantus ipſe in ſe ſit, cognoſci nequire, ſed tantum relate, ſi nimirum alium tertium motum æquabilem aſciſcamus, & habita etiam ratione ſpatii, quod interea ab iis duobus motibus æquabilibus conficitur, illos eoſdem cum tertio aſſumpto conferamus. Nam ſi dum ſol diurnum peragrat orbem, & ab aliquo Orientis puncto digreſſus ad idem revertitur, duo cor-

pora

pora diverſa celeritate percita, ſi unius motus cum alterius motu conferatur, eadem vero ſi partes priores unius cujuslibet eorum cum poſterioribus ejuſdem componerentur, moveantur quidem, ſed alterutrum duplo majus ſpatium percurrat, hunc motum alterum ad alterum duplam rationem habere, ſcilicet eſſe duplo velociorem facillime intelligemus, propterea quod eodem tempore, ideſt dum a Sole definitum aliquod ſpatium percurritur, alterum ex iis corporibus æquabili velocitate duplum ſpatium pertranſit. In ejuſdem quoque rei cognitionem incidere poſſumus, ſi nullo tertio obſervato, utrumque corpus ſimul a primo moveri, ſimul ceſſare a motu videamus, & nihilominus ab alterutro illorum duplo majus ſpatium confici obſervemus. Id enim facere non poſſe intelligimus, niſi duplo majori feratur velocitate, quæ eſt una ſpatii percurrendi ratio. Ex quibus omnes alias elicere poſſumus rationes & proportiones, quæ inter motuum velocitates intercedunt, quaſque in Phyſica enucleatius tractabimus. Quamobrem cum dicitur tempus eſſe menſura motus, id quidem concedimus, ſed hoc duplici modo: primo, quod uno motu alterum metiri poſſumus, habita tamen ſpatii ratione, quod verius eſt ejuſdem motus menſura: Secundo quod metiendo motu non aliam, quam relativam ejuſdem quantitatis cognitionem acquirere poſſumus. Quod ſi tempus ſit duratio cujuſcumque creatæ rei, quæ per aliquod ſaltem tempus nulli intrinſece mutationi obnoxia eſt, qui fieri poteſt, ut tempore ita accepto motus aliquos metiamur? nam fac unum tantummodo in omni rerum natura eſſe motum, quem metiri debeamus; alia omnia eſſe ſubſtantias, vel accidentia, quæ quo tempore durat motus, eadem perſeverent, quam amabo quantitatis ejuſdem cognitionem habere poteris? non abſolutam, propterea quod hanc nullo poſſumus acquirere modo; non relativam, quia ſpatium quidem peragratum cognoſces, at per res, quæ nulli æquabili mutationi obnoxiæ ſunt, tempus in illo peragrando inſumptum, quod ſemper uno tenore fluere percipis, intelligere non poteris. Quod ſi dixeris te poſſe habere cognitionem relativam quantitatis hujus motus, quia quamvis alius motus non ſit, tamen illum imaginatione ſubſtituere potes, & habita ratione ſpatii, quod dato primi motus tempore ab hoc alio confici fingas, ita in hujuſmodi cognitionem devenire, nihil inde pro tua ſententia concluſeris. Nam hoc pacto ſemper unum motum æquabili motu metieris, & perinde eſt,

Digitized by Google

quantum ad acquirendam cognitionem, ſive hic motus, qui pro menſura aſſumitur, in rerum natura ſit, ſive tantum in mente.

5. Sed ut planius etiam me explicem in re, quæ ad perſpicuitatem notionum in multis Philoſophiæ capitibus non parum habet momenti, diſtinguendum eſt inter motus, qui ſimul incipiunt & ſimul deſinunt, interque illos, quorum alius alio magis durat. Nam ad æqualitatem temporis, quo primum genus motuum perſeverat, cognoſcendam, opus non eſt, ut alius tertius æquabilis motus exſiſtat reipſa, ad quem duos illos motus exigamus. Hoc enim ipſo, quod duo corpora ſimul incipere moveri, ſimul deſinere videmus, idem tempus ab iiſdem inſumi in motibus perficiendis intelligimus, propterea quod intra hujus ortus & interitus fines alium æquabilem motum imaginari poſſumus, quod ad cognoſcendam temporis quantitatem ſatis eſt. Cujus temporis æqualitatem etiam alterius cujuſcumque rei creatæ duratione intelligere quimus: nam ſi cum incipiunt duo corpora a loco diſcedere, fax aliqua, ex. cauſſa, ante oculos noſtros accendatur, cum vero rurſus a motu ceſſant, extinguatur, ex eo quod corporum motum ſolum durare videmus uno illo tempore, quo fax inflammata manet, temporis æqualitatem in utroque motu colligimus. At non ita ſe res habet in altero genere motuum: fac enim alterum ex iis motibus permanere ſolum per aliquam partem temporis, quo tertium corpus quietum manet, alterum vero per majorem, & duratione quietis, ſive corporis in eodem loco conſiſtentis rationem utriuſque motus, ſi potes, metiri. Quantumcumque conaberis, ne hilum quidem te proficere ſenties. Niſi enim quietem ad motum aliquem exigas, & quietis principium ad motus principium, finem illius ad hujus finem referas, nullam durationis quietis ne relativam quidem cognitionem acquirere poteris, ac propterea nec duorum motuum, qui partibus diverſis temporis ejuſdem quietis perſeverent. Bene vero quam rationem unum tempus ad alterum habeat, noſces, ſi aut cognita virium utriuſque corporis ratione animum advertas ad ſpatia, quæ ab iiſdem confecta fuerunt, & leges omnium motuum etiam inæquabilium perſpectas optime habeas; aut illa ignorata oculos convertas in tertium aliquod corpus, quod æquabiliter moveatur & notato primum ſpatio, quod ab illo conficitur, dum brevior motus durat, deinde ſpatio, quod ab eodem peragratur, dum longior, inde rationem temporum elicias. Quamobrem

obrem ſi nomine temporis intelligas durationem aliquam a motu diverſam, nego tempus eſſe menſuram motus, propterea quod motu durationes alias metimur, non autem aliis durationibus motum. Sin vero motum aliquem æquabilem tibi velis, mihi tecum convenit, nec inde ſequitur idem eſſe ſuimetipſius menſuram; ſiquidem uno æquabili motu alios ab eo diſtinctos corporum motus dimetimur; præterquamquod in hiſce menſuris aſciſcitur ſpatium motu peragratum, quod a motu ſecernitur. Quemadmodum duo extenſa non metimur menſura, quæ ſit alius ſpeciei ac dicta extenſa, ſed brachio pariter extenſo, quo rationem utriuſque ad brachium, & rationem ipſorum inter ſe cognoſcimus. Ergo ad cognitionem duorum motuum acquirendam ſatis eſt pro menſura ſumere determinatum aliquem motum, ad quem alios referamus, ut inde rationem ipſorum tum ad hunc, tum inter ſe eliciamus, quæ una cognitio quantitatis continuæ, qualis eſt motus, haberi poteſt.

6. Neque difficultatem hac in re facere debet, quod ſi tempus eſſet idem ac motus, inde conſequeretur tempus eſſe aliud alio velocius, ſicuti motus alius alio celerior eſt, & ſi hora prima diei corpus aliquod omnium, quæ nunc ſunt, citiſſime raperetur, non autem hora ſecunda, res, quæ hora prima duraret, diutius exſiſteret, quam quæ hora ſecunda, quod illa cum majori motu, hæc cum minori conjungeretur & ſimul exſtaret. Quod quam abſurde dicatur, nemo non videt. Verum hæc, ut dixi, difficultatem facere non debent: nam ſi habeatur ratio motuum, quorum alius alio velocior duabus horis eſſe poteſt, ut infra oſtendemus, abſurde non facerent, qui primam ex dictis duabus rebus majori tempore permanere dicerent. At cum aſſeritur tum primum, tum alterum una tantum hora durare, mens ita loquentis ſe convertit ad ſolis æquabilem motum, qui diurni orbis tum prima hora diei, tum ſecunda ſpatium æquale conficit. Quamobrem is convenienter hypotheſi, quam aſciſcit, æquali tempore duas illas res perſeverare dicit. Quemadmodum in Analyſi nulla eſt certa unitas, ad quam omnia exigantur, propterea quod quolibet dato continuo minus in infinitum ſumi poteſt, §. 21. Nihilo tamen minus id non obſtat, quominus Geometræ quod iis libuerit definitæ magnitudinis continuum pro unitate ſumant, & alia extenſa illo majora pro quantitatibus integris, minora vero pro fractis accipiant. Quo relativam & certam quantitatis eorum-

Digitized by Google

dem cognitionem adipiſcuntur. Id tamen advertunt, ut cum ſemel datum continuum loco unitatis poſuerint, numquam ab hac poſitione in illa re, de qua differunt, ne latum quidem unguem diſcedant. Ita quamvis quolibet dato æquabili motu tardior, aut velocior in infinitum eſſe queat, illo tamen tamquam certa menſura durationes aliorum motuum metiri poteris, ſi modo ad eumdem ſemper motum, aut revera, aut ſaltem cogitatione durantem alios motus exegeris. Nec enim uno æquabili motu pro unitate, & menſura aliorum poſito tibi integrum eſt motus alios ad alium quemdam æquabilem motum referre.

§. 42. Scholion I.

Verum hic aliquis quærere poteſt, quomodo ſi tempus non eſt aliquid a motu diſtinctum, in cognitionem veniemus primi alicujus motus æquabilis, quo tempora aliorum motuum dimetiamur? motus enim æquabilis notitiam temporis requirere videtur. Siquidem illum definiunt eſſe motum, quo ſi tempus, quo corpus movetur, in tot, quot volueris partes æquales dividatur, ſingulis partibus temporis æqualibus ſingulas æquales ſpatii partes idem corpus percurrit. At ſi tempus ſit idem ac motus, primi motus æquabilis, cum adhuc nullum alium motum æquabilem cognoſco, tempus intelligere nequeo, nec in aliquas partes ſecare, ex quarum æqualitate cum æqualitate ſpatii peragrati conjuncta motus æquabilis dignoſcatur. Sed facile eſt ſine ulla temporis cognitione primum aliquem æquabilem motum agnoſcere, ad quem alii omnes exigantur, ſive tempus aliquod in æquales partes diſpeſcere, quarum partium adminiculō æquabiles motus ab inæquabilibus internoſcamus. Scilicet id conjicere poſſumus ex æqualitate vis motricis, quæ æqualibus temporibus eoſdem, ſive æquales effectus ponere debet. Loco exempli ſint oſcillationes penduli præſertim circa binas cycloides, quarum ſingulas iiſdem temporibus perfici oportere cognoſcimus. Puto autem ab antiquiſſimis temporibus ſolis motum cum annuum, tum vero diurnum pro primo æquabili, ad cujus normam alii motus omnes exigerentur, conſtitutum fuiſſe, ſive illius æquabilitatem a Protoparente Adamo traditione per manus acceperint, ſive craſſiori quadam ratione, quam penduli cycloidalis conjecerint.

§. 43. Scholion II.

Ex his vero omnibus, quæ hactenus diſputavimus patet, quid reſponderi debeat Dominæ du Chaſtellet, dum hanc eamdem ſen-

ſententiam a Crouſatio defenſam in quadam Diſſertatione, quæ præmium retulit ab Academia Pariſienſi, impugnat §. 110. Inſtitut. Phyſic. ob eam rationem, quod etiamſi nullum foret corpus, aut corporum motus, in anima noſtra notiones & ideæ aliæ aliis ſuccederent, & ex earum ſucceſſione temporis, quo ipſa durat notionem eadem anima compararet. Concedimus enim ſucceſſionem idearum in anima, indeſinentem vero & continuatam ob rationes, quæ in anteceſſum allatæ ſunt, non concedimus. Quare ſi nomine temporis quamlibet rerum ſucceſſionem velit, inficias non imus tempus etiam in anima reperiri. Quod ſi nomine temporis intelligamus id, quod omnes intelligere videntur, continuatam alius in aliud mutationem, ſucceſſio idearum utpote interrupta tempori, cui hæc a me poteſtas ſubjecta fuit, minime negotium faceſſit. Quare ne quæſtio de nomine fiat, ajo continuatam rerum ſucceſſionem in ſolo motu inveniri, non in alia quacumque creata re.

2. Contra id vero plus momenti eſt in alia ratione, quæ ex principiis Philoſophiæ Wolphianæ ab ipſa adoptatis depromi poteſt, quam ſic preſſe propono. Conſervatio rerum creatarum eſt continuata creatio, ſive continuatio illius actionis, qua primitus e nihilo eductæ fuerunt. Creatio autem eſt mutatio ſtatus, cujus mutationis ratio eſt extra ſubjectum quod eum mutat, ſive extra creatas res, & conſequenter eſt paſſio; ergo conſervatio utpote continuata creatio erit in rebus creatis continuatio hujus mutationis, ideoque continuata ſtatus mutatio, & alius in aliud ſucceſſio. Jam vero ſubſtantiæ creatæ ut permaneant, indeſinenter egent conſervatione divina; ergo in omnibus rebus creatis eſt continuata ſtatus mutatio, & alius in aliud ſucceſſio. Ex quo concluditur non in ſolo motu, ſed in quacumque creata re tempus, ut a nobis definitum fuit, reperiri.

3. Quæ ratio ſic valide aſtringi mihi videtur, ut non videam quid ad eam ſolvendam reſponderi poſſit. Quare aſſentior in rebus quibuſcumque e nihilo eductis eſſe continuatam aliquam ſtatus mutationem, quæ extra creatas res ſufficientem ſui rationem habet, & in ea conſtituo præcipuum &, ut melius dicam, unicum fundamentum, quo neceſſitas conſervationis divinæ naturali lumine confirmatur. Sed quod attinet ad rem, de qua agimus, ajo duo eſſe notanda, primum aut a nobis ſatis clare non intelligi, in quo poſita ſit hæc continuata rerum mu-

tatio; quæ a divina conſervatione ortum ducit, aut ſi quæ ſalſem obſcure intelligitur, eam eſſe mutationem creatæ rei ſolum quod pertinet ad exſiſtentiam, adeo ut licet eadem res perſeverare debeat ſaltem quamdiu corpus vel minimum ſpatium extenſum abſolvit, ut ſupra monſtravimus, tamen novam a Deo continuate exſiſtentiam recipiat neceſſe eſt, quo perſeveret. Quæ mutatio & renovatio exſiſtentiæ ſatis non eſt ad eam temporis ingerendam notionem, qua fiat, ut rationes inter plura tempora cognoſcamus, an ſcilicet aliud alius æquale, vel majus, vel minus ſit. Quod cum in omnium quantitatum genus cadere debeat, hinc factum eſt, ut inde homines notionem temporis nequaquam haurirent. Alterum eſt ex corporum motu notionem hujuſmodi hauriri poſſe, ut pluribus ſupra docui. Ex quibus conſequens eſt homines in ſolo motu tempus hujuſmodi, quod metiri poſſumus, agnoſcere. Quod confirmo ex eo communi Recentiorum theoremate, quo ponunt velocitatem motus æquabilis unius corporis eſſe æqualem ſpatio percurſo per tempus diviſo, ſive duorum corporum velocitates eſſe in ratione compoſita ex directa ſpatiorum, quæ percurſa ſunt, & ex inverſa temporum, quæ in iis abſolvendis impenduntur. Nam ſi tempus, ut communis fert opinio Philoſophantium, eſt aliquid a motu diſtinctum, non videtur qui fieri poſſit, ut quantitas unius ſpeciei quantitate alterius metiamur. Sin autem, ut hic docemus, eſt idem ac aliquis certus ac determinatus æquabilis motus, qui pro communi aliorum menſura aſſumitur, intelligitur ratio cur ad habendam corporis velocitatem inſtituenda ſit diviſio ſpatii per tempus, non alia quædam operatio.

4. In quo explicando, quod multum habet momenti ad confirmandam potiſſimam legem motus, quæque in Phyſicis Recentiorum familiam ducit, vires ingenii contendam; quo ſimul iis, quæ hic diſputata ſunt, lux major accedat. Ordiar autem ab illo a veteribus Geometris tam ſæpe uſurpato principio congruentiæ inter duas quantitates, ut exinde illarum æqualitatem colligerent. Etſi enim illud ab aliquibus tamquam nimis mechanicum, & a ſubtilitate geometrica nimium longo intervallo diſcedens exploſum fuerit, propterea quod ad idem uſurpandum ipſa quantitatum ſuperpoſitione opus eſſe credebant, tamen jure ac merito probatum eſt aliis, qui nullam aliam præter eam, quæ cogitando fit, ſuperpoſitionem hic eſſe ne-

neceſſariam ad eliciendam quantitatum congruentiam animadverterunt. Unde fit tamquam certum principium ſumi poſſe quantitates illas eſſe æquales, quarum aliæ aliis ſi ſuperimpoſitæ intelligantur, adamuſſim congruunt.

5. Cum vero æqualitas inter quantitates ſit una ex tribus ſpeciebus rationum, hinc efficitur alias etiam duas ſpecies hoc eodem principio poſſe contineri. Quemadmodum enim quæ ſemel congruunt ſunt æquales, & ratio æqualitatis inter eas definitur, ita ſi altera ex quantitatibus cum altera congruat non ſemel, ſed bis, ter, quater, ſive generatim tot vices, quot exprimit quidam numerus vel fractus, vel integer, hinc rationem quantitatis minoris ad majorem, vel e contrario majoris ad minorem, quæ non eſt niſi æqualitatis multoties repetitæ, eliciemus. Atque hoc pacto cognoſcemus unam quantitatem quatenus cum alia comparatur, qui eſt unus modus, quo quantitas continua a nobis intelligi poteſt, ut in anteceſſum tam ſæpe inculcavi. Siquidem abſolute percipi nequit quanta ſit ipſa in ſe, cum & nullas habeat partes reipſa diſtinctas, §. 20., & ſi haberet, ſint infinitæ, quod perinde eſt ratione habita noſtri intellectus, qui numerum infinitum poſitive percipere nequit.

6. Ex quibus ortum ducunt communes quantitatum menſuræ, quæ forent ejuſdem ſpeciei ac quantitates, ad quas dimetiendas excogitatæ fuerant. Ut ad rerum extenſarum menſuram inventus eſt pes, ex. gr. Pariſienſis, quo primum experimur quoties is cum prima re extenſa congruit, deinde quoties cum ſecunda, & exinde rationem inter hæc duo extenſa colligimus. Mitto hic animadvertere quod in metiendis ſuperficiebus præter congruentiam aliquoties repetitam in longum eſt etiam obſervanda congruentia in latum, & in metiendis ſolidis, profunditatis quoque ratio habenda eſt. Hæc enim clariora ſunt, quam ut aliqua explicatione opus habeant.

7. Jam vero ſi extenſa omnia forent ejuſdem denſitatis, quemadmodum a Geometris ponuntur extenſa continua, nihil his eſſet addendum, quo perfectam, & abſolutam rationis inter duo extenſa cognitionem obtineremus. Verum cum in noſtra ſententia etiam continua extenſa alia aliis denſiora eſſe poſſint, ut §. 32. num. 5. indicavimus, & paulo poſt ex profeſſo oſtendemus, vel ſaltem in phyſicis ea quæ tamquam

continua extenſa apparent, alia alius denſitatis ſint, idcirco ad hanc denſitatem ſive ſpiſſitudinem materiæ ſolidæ definiendam aliquid aliud aſciſcendum eſt. Quod eſt hujuſmodi. Cum unum extenſum eo ſit denſius, quo plus habet materiæ ſolidæ in minori loco, ſive quo majorem habet quantitatem materiæ, quæ in phyſicis ex pondere judicatur, & quo hæc cum minori extenſo congruit, hinc ad rationem inter denſitates duarum, ex. gr. virgarum ejuſdem diametri definiendam duo obſervantur, maſſæ ſive gravitates ſingularum, & cui quæque parti pedis Pariſienſis, aut numero pedum congruat. Denſitates enim erunt in ratione compoſita ex directa maſſarum ſive gravitatum, & ex inverſa numeri pedum, aut partis pedis, quibuſcum congruunt, quod dicitur volumen. Ex quo fit ut denſitas ſit = maſſæ diviſæ per numerum ſive integrum, ſive fractum pedum Pariſienſium, ſive per volumen, ex. g. in prima virga ſit D denſitas, M maſſa = 4, & volumem $V = \frac{1}{3}$ pedis, in ſecundo denſitas d, maſſa $m = 3$, volumen $v = \frac{1}{2}$ pedis; erit $D : d = 4.\ 3 : 3\ 2 = 12 : 6 = 2 : 1$.

8. Hæc quæ, de quantitatum in genere & præſertim extenſarum menſura ſtatuimus, facile eſt ad motum & ad velocitatem transferre. Nam duo motus æquabiles congruere dicendi ſunt, ſi ſimul incipiant & deſinant. Ut enim continua permanentia, qualia ſunt extenſa, congruere dicuntur, cum iiſdem terminis continentur, ita ſucceſſiva, cujuſmodi eſt motus, quorum partes aliæ poſt alias ſunt, tamquam congruentes intelligi debent, ſi iiſdem terminis, ideſt initio, & fine concluduntur. Quare in hypotheſi, quod omnes motus æqualiter veloces, & quodammodo æqualiter denſi forent, illi eſſent æquales, qui congruerent, ideſt qui ſimul inciperent, & ſimul ceſſarent modo in æqualibus etiam maſſis reperirentur, propterea quod in quantitate motus definienda maſſæ rationem eſſe habendam patet.

9. Hinc intelligemus etiam alias, quæ inter duos motus rationes exſiſtunt, ſi nimirum alium cum alio non ſemel, ſed aliquoties congruere obſervabimus. Quam ad cognitionem acquirendam pro communi motuum menſura ab hominibus poſitus eſt æquabilis ſolis motus diurnus in 24 partes æqua-

les,

les, quæ horæ dicuntur, diſpectus. Nam ſi primi corporis motum æquabilem cum motu ſolis per $\frac{1}{24}$ ſui circuli partem congruere obſervabimus, & ſecundi æquabilis motum cum motu ſolis per $\frac{2}{24}$, alterum altero ſubduplo minorem eſſe dicemus.

10. Nec aliquid aliud, quam motum pro communi motuum menſura homines excogitare potuerunt; cum enim ex altera parte motus utpote quantitas continua intelligi & ſupputari non poſſit quantus ſit, niſi ratione habita alterius motus, & ex altera principium congruentiæ, unde ratio inter quantitates comparatas intelligitur, non poſſit eſſe niſi inter eas quantitates, quæ ſunt ejuſdem ſpeciei, ſequitur communem motuum menſuram eſſe non poſſe niſi alium ſimilem motum, ad quem ceteri exiguntur ad eum finem, ut cum quotis ejus partibus congruant, intelligantur.

11. Sed cum motus non ſint æqualiter veloces, ſed alii alius velocitatis &, ut ita dicam, ſpiſſitudinis, hinc ad rationem definiendam duarum velocitatum aliud quidpiam eſt aſſumendum ſimile illius, quod in denſitate extenſi definienda fuit aſſumtum. Quemadmodum enim extenſum eſt eo denſius, quo majorem habet maſſæ, quæ ex pondere judicatur, quantitatem, & quo hæc cum minori congruit portione illius pedis, qui pro communi extenſorum menſura ſumtus eſt, ita motus eo velocior eſt, & quodammodo denſior, quo majus ſpatium illius virtute perficitur, & quo hic motus cum minori congruit parte illius ſolaris motus, qui pro communi motuum menſura ab hominibus adhibetur. Ut enim gravitas eſt maſſæ proportionalis, quia eſt illius, quatenus vi donatur, effectus, ita ſpatium peragratum utpote effectus motus motui proportione reſpondet; & quemadmodum extenſum cum alio extenſo uti cum pede congruit, ita motus æquabilis cum alio æquabili, cujuſmodi eſt motus ſolis, congruere intelligitur, ideſt ſimul incipere, & ſimul deſinere, in quo motuum, qui ſucceſſivi ſunt, congruentia poſita eſt. Quare velocitates duorum corporum erunt in ratione directa ſpatiorum, quæ ab ipſis percurruntur, & in inverſa ſpatiorum, quæ ſimul cum ſingulis a ſole motu diurno abſolvuntur. Quæ ſpatia a ſole ſimul confecta, cum tempora ab hominibus

bus dici ſoleant, hinc concluditur quod propoſitum erat, velocitates eſſe in ratione compoſita ex directa ſpatiorum, quæ conficiuntur, & ex inverſa temporum, quæ in iis conficiendis impenduntur. Ex quibus conficitur tempus, ut a Philoſophis accipitur, & ut accipi debet, ſi eum pro menſura motuum ſumere velint, aliud non eſſe quam determinatum aliquem æquabilem motum, ſolis videlicet per arcum diurnum, cum ex dictis conſtet pro menſura quantitatum alicujus ſpeciei aliam nullam ſumi poſſe quantitatem, niſi quæ eadem ſpecie contineatur. Id quod erat mihi propoſitum, cum in hunc Phyſicæ locum excurri.

ARTICULUS III.

De continuitate motus, & ejuſdem in infinitum diviſibilitate.

§. 44. Propoſitio

MAnet igitur tempus idem propemodum eſſe ac motum. Quamobrem ad temporis menſuram plenius intelligendam neceſſe eſt motus proprietates perſequi diligenter. Inter has vero illa potiſſimum tractanda eſt, quæ in continuatione partium motus verſatur. Motus enim aut omnino continuus eſt a principio ad finem, aut ſaltem conſtat ex continuis, inter quæ parva quies & morula interponitur. Sive, ut me explicem planius, dum corpus a primo definiti cujuſdam ſpatii puncto digreſſum ad ultimum pergit, aut indeſinenter movetur, itaut ne tantillum quidem per totum illud ſpatium quieſcat, aut ſi identidem quieſcit, inter unam & alteram ex ſingulis morulis ſpatium aliquod extenſum ſine ulla intercepta morula percurret, atque ideo motus ejuſdem per totum illud ſpatiolum omnino continuus erit. Nam ſi res aliter eſſe poſſet, corpus ita ſpatium peragraret, primum a puncto inextenſo ad punctum progrederetur, tum quieſceret, deinde rurſus a puncto ſecundo ad tertium pergeret, & poſtea denuo quieſceret, & hoc pacto a tertio ad quartum, & intercepta morula a quarto ad quintum, & ab hoc quinto ad alia omnia cum totidem morulis interpoſitis, & ad ultimum uſque perveniret. Res vero ita ſe habere non poteſt. Si enim a primo ſpatii extenſi puncto ad quintum, ex. gr. cum interceptis morulis corpus perveniret, dari & intelligi & definiri

niri

niri poſſet ſpatium extenſum ex definitis numero punctis inextenſis coalitum. Hoc autem eſſe nullatenus poſſe multis argumentis evicimus ſupra. Igitur nihil eſt reliquum aliud niſi ut ſaltem corpus inter ſingulas morulas ſpatium aliquod extenſum continuum, quo minus & minus in infinitum dari poteſt, ſine ullius morulæ interruptione conficiat, atque ut totus aliquis motus ſaltem ex continuis coaleſcat.

§. 45. Corollarium

Ex quo intelligitur quolibet vel minimo motu, cujus initium ac finis ſint, alium poſſe dari minorem atque minorem in infinitum, cum enim per quemcumque vel minimum motum definitum aliquod ſpatium extenſum percurratur, §. 44. & quolibet definito extenſo minus ac minus in infinitum dari queat, §. 21. hinc anterior corporis moti pars percurrere poteſt ſolum definiti ſpatii medietatem, utpote quæ extenſa eſt, vel ob eamdem rationem medietatis medietatem, ideſt $\frac{1}{4}$, vel ſecundæ medietatis medietatem, ideſt $\frac{1}{8}$, & ita porro in infinitum. Qui omnes motus ſunt alius alio minores, ut qui minus ſemper ſpatium conficiunt.

2. Unde etiam liquet tempus, quod a motu diſtinctum non eſt, ita infinities dividi quire, ut dato quolibet tempore minus ac minus in infinitum definiri poſſit. Quod etiam valet in eorum ſententia, qui tempus a motu ſecernunt. Nam cum corpus eodem tempore pluribus in locis naturaliter eſſe non queat, etiam ii concedunt quodlibet vel maxime exiguum ſpatium in tempore a corpore moto peragrari; quamobrem ſi corpus eadem celeritate feratur, & medietates ſpatii in infinitum diſtingui poſſint, primam medietatem tempore duplo minori, quam totum ſpatium, ſecundam medietatem, ideſt $\frac{1}{4}$ tempore quadruplo minori, tertiam medietatem, ideſt $\frac{1}{8}$ octuplo minori peragrari idque in infinitum aſſentiri debent.

§. 46. Objectio

Sed hic contradici poteſt nullo modo percipi poſſe, quomodo corpus a principio cujuſdam certi ſpatii ad finem uſque perveniat, quin a primo puncto ad ſecundum, a ſecundo ad tertium, a tertio ad quartum, & ita porro uſque ad ultimum tranſeat. Præſertim ſi ſuper aliquod planum ſphæram, aut angulum cubi, vel pyramidis, vel alterius ſolidi in angulum

gulum deſinentis imponi, & ſuper idem planum moveri intelligamus. Cum enim in noſtra ſententia inextenſum ſphæræ, vel cubi punctum aliud inextenſum plani punctum contingat, §. 18., qui fieri poteſt, ut cum ſphæra movetur, & primum plani punctum deſerit, ad alterum proximum primo non transferatur? Toto enim tempore motus ſolum in puncto ſingulis momentis planum tangit; ergo cum primum hæc ſphæra relinquit, ad ſecundum ante perveniat neceſſe eſt, quam ad alia tranſmigret. Qua ratione conficiemus ſphæram a ſecundo ad tertium, & a tertio ad quartum, & ſimiliter ad alia tranſire. Quamobrem ſi poſtquam ſphæra ad quartum, ex. cauſſa, aut ad quintum pervenit, ejus motus ſiſtatur, ut ſiſti poteſt, profecto idem motus ſolum in quinque puncta non in infinitum dividi poteſt. Cujus argumenti concluſio valet etiam in eos, qui puncta inextenſa in ſpatio extenſo nequaquam admittunt. Nam illud ſaltem aſſentiri debent extimam ſuperficiem, qua duo corpora ſe contingunt, omni penitus profunditate carere, §. 18. num. 2. Quo conceſſo conſequens eſt, dum corpus movetur ſuperficiem ejuſdem, quæ ſuperficiem ſpatii omnis profunditatis expertem occupat, ab hac prima ſuperficie ad ſecundam, & a ſecunda ad tertiam, a tertia ad quartam migrare, atque ideo motum per quatuor, aut quinque hujuſmodi ſuperficies in infinitum ſecari non poſſe.

§. 47. Reſponſio

Fateor quidem hoc argumentum eſſe difficillimum omnium, quæ in hac diſputatione verſantur. Nego tamen illud tanti eſſe, ut nos a vera & explorata ſententia depellere debeat. Cum enim ſuperficiem ex punctis inextenſis non poſſe coaleſcere jam demonſtraverimus, §. 15. poſt primum punctum ſecundum, & tertium non eſſe procul omni dubio conſequitur. Et revera cum puncta ſint fines & modi linearum, lineæ fines & modi ſuperficierum, ſuperficies autem fines & modi ſubſtantiæ extenſæ; hinc inter unum & alterum finem & limitem non puri fines ac limites intercipi poſſunt, ſed aliquid aliud a finibus, quibus continetur, intercedat neceſſe eſt. Quamobrem ſi in ſpatio poſt primum punctum, lineam, aut ſuperficiem non eſt ſecundum punctum, linea, aut ſuperficies, nec ſphæra, aut aliud corpus plano impoſitum poſt primum punctum, lineam, & ſuperficiem ad ſecunda & tertia

tia tranſire poteſt. Quod vero dicitur toto tempore motus ſolum plani punctum ſingulis momentis a ſphæra contingi, illud plane falſum eſt; nam vel intelligis vera momenta omni extenſione, ac ſucceſſione carentia, vel illo nomine cum vulgo abuteris ad exiguum quemdam temporis fluxum ſignificandum. Si primum, ſunt illa quidem in tempore, ſicuti puncta inextenſa in extenſo, ſed quemadmodum ex punctis ſpatium non conſtat, ita nec ex iis tempus coaleſcere poteſt, §. 44. Cumque omnia, ut vere exſtare affirmari queat, per aliquod tempus durare oporteat, §. 36. in vero momento dici nequit ſphæram planum tangere, ſed illud tantummodo planum a ſphæra cœptum eſſe tangi, aut deſitum, aut continuari contactum. Quamobrem in ſingulis veris momentis tanquam in iis, in quibus contactus haberi nequit, ſphæra ſolum plani punctum nequaquam contingit. Quod ſi ad alterum confugiatur, ſphæra quidem planum tangit, ſed non in uno ſolum puncto, ut contenditur, verum in pluribus; nam ſi motus eſſe continuus ponitur, ut eſt, quocumque minimo tempore pars aliqua plani in longum extenſa percurritur, quæ cum in infinitum cogitatione dividi poſſit, infinita in ea puncta quolibet minimo tempore ſphæram contingat oportet. Unde ad enuntiationem illam ſphæra ſemper planum in uno puncto contingit, uti poſſum hac diſtinctione, quod tangit quidem in puncto inextenſo, dum quieſcit, non vero, dum movetur.

2. Non inficior tamen captu difficillimum eſſe ſphæram a primo puncto extenſi ad ultimum pervenire, quin a primo ad ſecundum, a ſecundo ad tertium &c. tranſeat. Verum ajo difficultatem ex eo potiſſimum augeri, quod ducti quadam præjudicata opinione, qua quodlibet compoſitum ex partibus natura prioribus eſſe coalitum putamus, ex veris partibus, quæ continuum antecedant, ipſum componere cogitando volumus. Nam inde conſequens eſt poſt primam partem eſſe ſecundam, tertiam, quartam &c. Quam vero id abſurde cogitetur, perſpicuum, ut reor, feci circa continuum ſimultaneum iis rationibus, quæ in ſucceſſivum etiam valere poſſunt, §. 15. 16. & 17. Quamobrem ut ad difficultates tollendas, quæ in ſimultanei compoſitione occurrunt, opus eſt ponere extenſum eſſe continuum, antequam partes in eo diſtinguantur, ita & motum, qui ſpatio conficiendo ſe accommodat, non ex par-

partibus inextenſis componere debemus, ſed partes inextenſas & limites in illo ſecernere oportet, poſtquam extitit. Tunc vero ſi uſque in infinitum in medietates dividere pergas planum illud, quod a ſphæra percurritur, numquam pervenire neque cogitando poteris ad duas partes inextenſas, quas corpus a principio prætereat, ſed ſemper tibi ſupererit medietas quædam extenſa adhuc in infinitum ſecari potens.

3. Immo eſt hic propria hujus loci ratio, qua efficitur motum ita fieri non poſſe, ut ſphæra a primo inextenſo puncto ad ſecundum migret, a ſecundo ad tertium &c. & ſimul confirmatur extenſum ex inextenſis non poſſe componi. Nam ſi ſphæra a primo plani inextenſo puncto ad ſecundum tranſit, id facere non poteſt niſi in unico inſtanti; in inſtanti vero id facere nequit: propterea quod eodem inſtanti punctum illud ſphæræ in duobus punctis ſive locis reperiretur; pugnat autem cum ratione corpus naturaliter eodem inſtanti temporis in pluribus locis exſiſtere. Ergo nec eſſe poteſt hujuſmodi motus, quo ſphæra ab alio ad aliud punctum inextenſum proxime tranſeat. Ex quo efficitur etiam in continuo eſſe non poſſe hæc puncta inextenſa, quorum aliud alia proxime conſequatur.

§. 48. Inſtabis

Magnum, inquis, intercedit diſcrimen inter extenſum, & motum; nam quidquid in extenſo eſt, ſimul eſt; in motu vero aliud alii ſuccedit. Quibus fit, ut illud quantumcumque ſit, ipſum per ſe totum e nihilo poſſit educi, tametſi ex partibus non conglutinetur; hunc autem velimus, nolimus ex partibus diſtinctis componere oporteat. Si enim quæ alio atque alio tempore ſunt, partes diſcretas non arbitraris, non video, quid in verarum partium numerum referre poſſis.

Reſponſio

Non levis difficultas, verum hujuſmodi, ut aliæ pleræque, ex idearum, quibus etiam Philoſophi afficimur, obſcuritate & confuſione profecta. Quid enim ſunt hæ partes diſtinctæ motus, quarum aliæ alias conſequuntur? Si res ad vivum reſecanda ſit, mihi diſtinguendum videtur inter intrinſecam motus naturam, interque ejuſdem relationem ad ſpatium. Nam quocumque demum loco corpus ſit, & quodcumque locum peragret, motum ego percipio tamquam idem omnino & numerice corporis accidens, ſi ab eadem omnino vi proficiſcatur.

catur. Eſt enim motus effectus vis, ſive illius jugis conatus ad motum, quem corpus exercet. Unde ſi cauſſa eadem perſeverat, idem etiam motus intrinſece duret neceſſe eſt. Accidit enim ad motum, ut ſit potius in hoc, quam in illo ſpatio, cum poſſit corpus etiam in vacuo, quod nihil eſt, moveri, & ideo ad nullum ſpatium referri. Tota igitur mutatio erit in illa relatione corporis moti ad diverſas ſpatii partes; quarum virtute fiet, ut etiam in motu anteriores & poſteriores partes percipiamus, perinde ac ſi in illo forent, tametſi vere non ſint.

Quibus poſitis non video quam habeat vim quod contradicitur ab Adverſariis; Quemadmodum enim in ſpatio poſt primum punctum, aut lineam, & ſuperficiem aliud punctum, linea, & ſuperficies non ſunt, ita nec corpus digreſſum a loco, in quo eſt, per motum referri poteſt ad aliquod ex iis, perinde ac ſi proxime ſe conſequerentur.

§. 49. Scholion

Atque ex his patet qui ſolvere debeamus potiſſimam de continui compoſitione difficultatem, quæ ex motu ſphæræ ſuper planum ducitur, §. 18. num. 1. diſtinctione ſcilicet inter ſphæram quieſcentem, & motam. Quamvis enim id, quo illa maxime nititur, contactus videlicet in uno tantum puncto cadat in quieſcentem, in eam tamen, quæ movetur, non convenit. Nam ſphæra ſimul ac movetur, numquam planum, ut etiam paulo ante notavi, in uno ſolum puncto inextenſo contingere poteſt, nec ab illo puncto, in quo per aliquod tempus fuit, tranſire ad ſecundum, quod nullatenus eſt. Quamobrem continuum extenſum ex punctis inextenſis componi ex ſphæræ motu ſuper planum nequit concludi.

§. 50. Objectio & Reſponſio

Sed antequam ab hoc loco diſcedam proponenda eſt etiam quædam ratio, qua non pauci arbitrantur evidentiſſime confici tempus præſertim ex inſtantibus conſtare. Verum ejus vim ſolum in eo, quod notiones hujuſmodi non ſatis evolutæ fuerunt, poſitam eſſe liquebit. Eſt autem hæc. Datur tempus vere præſens. Tempus autem vere præſens eſt verum inſtans, non autem extenſum & continuum quidpiam. Nam ſi tale foret, eſſent partes ſaltem potentiales aliæ ante alias, & aliæ poſt alias; ſcilicet foret præteritum atque futurum, quod manife-

niſeſte pugnat cum tempore vere præſenti. Aſſumptum autem ita conficitur; Homo vivit tempore vere præſenti; Deus vivit tempore vere præſenti, & alia ejuſdem modi. Siquidem de præterito dicitur *vixit*, de futuro *vivet*.

2. Ad quod infirmandum utor hac diſtinctione. Aſſentior quidem dari tempus vere præſens relative, nego tamen dari præſens abſolute. Tempus præſens abſolute eſt pars inextenſa temporis, quicum aliquid ſimul exſiſtit; præſens relative eſt temporis in multas partes extenſas, & æquales diſpertiti una quædam pars pariter extenſa, quicum alia quædam res ſimul exſiſtit, cujuſque rei habita ratione illa pars temporis præſens dicitur, aliæ vero partes anteriores & poſteriores, præteritæ & futuræ appellantur. Ita diſtributo die in 24 horas, ſi hora decima tertia habeatur concio, hora hæc erit tempus præſens ratione habita concionis, primæ duodecim ante illam præteritum, aliæ undecim poſt illam futurum dicuntur. Nam ſi dies inceptus fuerit ab eo puncto, in quo ſol meridianum ſecat, primæ duodecim horæ, ideſt motus ſolis per primum a meridiano ſemicirculum, qui motus eſt idem ac illæ horæ, jam ceſſarunt, cum orator concionem ad Populum habere incipit; cum hora vero decima tertia, ideſt cum motu ſolis a fine primi ſemicirculi per aliam vigeſimam quartam totius diurni circuli partem una exſiſtit concio ab oratore habita; hac vero ceſſante ſolum incipiunt aliæ undecim horæ poſt decimam tertiam, ideſt incipit ſol reliquos circuli arcus, qui dictis horis reſpondent, conficere. His poſitis ajo tempus hoc ſenſu præſens exſiſtere, ut per ſe patet, & quamvis habeat partes alias ante alias, & alias poſt alias, tamen conſiderantur ut præſentes ratione habita alterius rei, quæ una cum iis omnibus exſiſtit, non vero tempus abſolute præſens, ideſt omnino inextenſum, & partibus etiam potentia carens. Nam cum tempus ſit idem ac certus motus, §. 39. & ſeq. tempus ita præſens, ideſt inextenſum idem eſſet ac motus per punctum inextenſum ſpatii. Jam vero motus in puncto inextenſo ſpatii perfici nequit, ut paulo ante docuimus. Ergo nec tempus inextenſum deſignari quit. Quod ſi hanc ſententiam temporis minime a motu diſtincti non amplectaris, res tamen eodem revolveretur. Siquidem tempore ex inſtantibus compoſito motus, qui interea perficeretur, foret a primo ſpatii puncto inextenſo ad ſecundum, a ſecundo ad tertium, & ita porro, quod ſingulis inſtantibus corpus

pus non poſſet niſi ab alio ad aliud proximum punctum tranſire. Quod ſi fieret, ſpatium extenſum ex punctis inextenſis coagmentaretur, contra quam oſtendimus in ſuperioribus. Ad ſummum uti in extenſo continuo dantur puncta inextenſa non tamquam partes, quæ extenſum componant, ſed tamquam modi & limites ejuſdem, in quibus, aut incipit extenſum, aut deſinit, aut ſi in parte aliqua media deſignentur, ſaltem continuatur: ita hæc eadem puncta relata ad motum dicuntur inſtantia, in quibus aut incipit motus, aut deſinit, aut continuatur, quæque proinde non ſunt partes, ex quibus coaleſcunt tempus, & motus, ſed ſunt fines & modi, quibus terminantur. Ex quibus patet reſponſio ad id, quo confirmabatur aſſumptum, Deum ſcilicet, & hominem vivere tempore non abſolute præſenti, ſed ſolum relative, & in vero inſtanti inextenſo ſolum aut incipere vitam, aut illam amittere, aut continuare.

3. At enim in vero momento Deus aut vivit, aut non vivit; abſurdum eſt autem dicere Deum in vero inſtanti, ideſt nunc non vivere, nam ſi non viveret, ceſſaret a vita in eodem inſtanti, quod omnino falſum eſt.

4. Ut huic difficultati aliiſque ſimilibus, quæ a principio propoſitionum contradictoriarum ducuntur, plane ſatisfaciam, liceat mihi ex Logicis prælibare quædam, quæ pertinent ad eaſdem contradictorias; præſertim cum in hac re ceteroquin plana non raro offendant viri etiam docti. Itaque ajo propoſitiones contradictorias, quarum altera neceſſario vera eſt, altera falſa, eſſe eas, in quarum ſecunda tantum negatur id, quod affirmatur in prima, & aliud nihil omnino. Si enim præter negationem ejus, quod ais in priore, aliud quidpiam aut affirmes aut inficieris, jam incidis in contrarias, quarum utraque vera quidem eſſe non poteſt, falſa tamen eſſe quit. Sed neſcio quo pacto nobis inſcientibus obrepunt propoſitiones contrariæ ſpecie contradictoriarum, & in negantem quidpiam ſe inſinuat, quod non eſt affirmatum in ajente. Cujus rei poſſem afferre exempla non pauca, ex quibus compertum fiat ſæpius uſuvenire, ut enuntiationes contrariæ & ambæ falſæ accipiantur pro contradictoriis, quarum altera cum vero congruat, altera ab eodem diſſentiat. Verum ad rem illuſtrandam ſatis erit unum proferre ductum ex hac eadem, quam præ manibus habemus, diſputatione de quantitate continua. Nam ſi quis contra noſtram ſententiam de poſſibilitate cubiculi omnino vacui, & nihilo-

hilominus reipſa non extenſi, §. 8. ita rationem concludat; vel parietes cubiculi ſe contingunt, vel a ſe invicem abſunt; non autem ſe contingunt; diſtant igitur. Diſtantia vero inter duo extenſionem requirit interpoſitam; ſive hoc alio pacto contra ejuſdem vacui poſſibilitatem, aſſumendo alteram dilemmatis partem; non autem diſtant; ſe ergo contingunt; non eſt igitur vacuum; fortaſſis arbitraretur duas illas enuntiationes pro contradictoriis haberi oportere, atque ideo alteram a veritate ſtare, alterum ab eadem abeſſe, & in concluſione rationis eſſe bene proceſſum. At ſua illum opinio valde falleret. Nam vera contradictoria ſunt; *ſe contingunt*, *non ſe contingunt*, quia aliud alius eſt pura negatio. Unde alterutrum verum eſt, ſcilicet non contactus. At illud *diſtant* non eſt pura negatio contactus, ſed præter eam inficiationem affirmat relationem inter parietes diſtantiæ, ſive contactus remoti duorum parietum per interpoſitum corpus, quod uterque contingat, cum contactus parietum de proximo intelligatur. Unde illæ duæ enuntiationes *parietes ſe contingunt*, *parietes diſtant* hoc alio pacto poſſunt efferri ſine variatione ſententiæ iiſdem ſubjectæ. *Parietes habent relationem inter ſe contactus proximi*, *parietes habent relationem contactus non proximi*, *ſed remoti*, quarum ſecunda non negat id omne, quod in priori affirmatum fuit, ſed affirmat relationem contactus, & ſolum negat proximum, dum remotum inducit. Ex quo ſequitur utramque eſſe falſam, propterea quod parietes, inter quos nullum corpus, quod ab utroque poſſit contingi, interponitur, nullo modo ſe contingunt nec proxime, nec remote.

5. Sed de his ſatis; nunc eo revertatur oratio, unde paululum digreſſa eſt. Illæ duæ enuntiationes *aut Deus & homo in vero inſtanti vivunt*, *aut non vivunt* contradictoriæ ſunt, & prima falſa eſt, altera vera. Nam Deum & hominem vivere in vero inſtanti idem eſt ac vitam eorum exiſtere una cum motu corporis per unum ſpatii punctum omnino inextenſum, qui motus, ut jam oſtendimus, eſſe non poteſt. At illæ duæ; *aut Deus & homo vivunt in inſtanti*, *aut ceſſant a vita*, non contradictoriæ ſunt, ſed contrariæ, propterea quod ceſſare a vita non eſt contradictorium vitæ; nam includit affirmationem actus, quo vita amittitur, ut manu quodammodo tangere licet in hiſce *aut lapis vivit*, *aut ceſſat a vita*, quorum utrumque falſum eſt, quia lapis non eſt aptus nec vitæ haben-

bendæ , nec ejus , quam non habet , amittendæ . Ita etiam falſæ ſunt illæ duæ *aut Deus & homo in vero inſtanti vivunt , aut ceſſant a vita* , quia verum inſtans non eſt capax , ut aliquid in eodem vivere dicatur , ut palam feci , nec tamen ceſſant , quod homo in eodem inſtanti aut incipit vivere , aut pergit , aut deſinit , Deus autem , qui ſemper eſt , pergit , quæ continuatio vitæ quemadmodum & initium & finis unico momento perfici poſſunt. Ergo manet nihil ex his effici poſſe contra noſtram de motu & tempore ſententiam .

CAPUT OCTAVUM.

Utrum continuum poſſit eſſe aliud alio denſius aut velocius .

§. 51. Propoſitio

QUoniam vero præcipuum argumentum diluimus adverſus ea , quæ in ſuperioribus conſtituta fuerunt , locus hic poſtularet ut alia etiam , quæ contradicuntur , quemadmodum polliciti ſumus , infirmaremus. Verum ne hic longiores ſimus , quam par eſt , præſtat hanc materiem in alium locum rejicere , & ad ea concludenda , quæ de motu & de tempore dicta ſunt, aggredi celebrem illam quæſtionem an motus omnino continuus alius alio velocior eſſe poſſit. Qui enim ſpatium ex punctis , ideoque tempus ex momentis conſtare volunt , ut ipſi ſecum conſtent , motu omnino continuo , quo ſcilicet corpus ab alio ad alium locum tranſiens ne temporis quidem puncto quieſcit , ajunt nec plus nec minus ſpatii perfici poſſe , quam ut ſingulis inſtantibus ſingula puncta percurrantur , propterеaquod nec uno temporis momento corpus , ſive corporis extremum punctum quantavis celeritate feratur , in pluribus ſpatii punctis eſſe quit , nec ſi motus prorſus continuus ſit ſine ulla intercepta requiete , pluribus momentis in eodem ſpatii puncto permanere poteſt. Quamobrem maximam omnium , quæ eſſe poſſunt , velocitatem in Philoſophiam inducunt , illam ſcilicet , qua in motu continuo corpus ſingulis momentis ſingula puncta percurrit , & ſi hominibus objeceris experientia conſtare motum alium alio citiorem haberi , ad morulas quaſdam confugiunt , & aſſerunt motum alium alio eſſe tardiorem , quia per minima temporis intervalla , quæ in ſenſus non incurrunt , corpus aliud alio

diutius, vel frequentius quieſcit, quantumvis a principio ſpatii ad finem uſque jugiter moveri videatur. Hæc quidem conſtanter dicunt, ſed cum a falſo principio ſint ducta, & falſa ſunt, & pulcherrimas atque certiſſimas in motu corporum & colliſione leges, atque adeo Phyſicam Recentiorum univerſam evertunt. Quod ultimum paulo poſt docebimus; nunc primum oſtendendum eſt.

2. Et primum ajo experientia liquere motum omnino continuum eſſe velociorem alio pariter omnino continuo. Si enim duo corpora gravia molis æqualis ſurſum ad perpendiculum jaciantur alterum majori vi alterum minori, illud velocius aſcendit ut omnes ſciunt, & quotidie experiuntur, hoc vero tardius. Sed nihilominus hi motus ſurſum ſunt omnino continui. Qua enim de cauſſa priuſquam ad ſummum jactus locum perveniant, & inde recidant, identidem in aliquo intercepto loco quieta conſiſtere debent? Vis namque motrix manu impreſſa, quæ poſita eſt in continuo conatu mutandi locum, indeſinenter pellit corpus ad ſuperiora, & ſemper movet, propterea quod ſtatim ac vis exſiſtit in corpore, ad motum ciet. Si enim inter vim & motum tempus aliquod intercederet, non eſſet ulla ratio, cur poſt tantum potius tempus, quam poſt majus, aut minus cieret. Inquies, corpori, quod ſuperiora cupeſſit, aerem identidem in locis interceptis obſiſtere & vim gravitatis, qua deorſum truditur. Peto an hæc aeris & gravitatis reſiſtentia ſit major, aut æqualis vi, quam manus impreſſit, an vero uſque ad locum, quo incipit deſcendere, minor. Si æqualis, & multo magis ſi major, vis oppoſita, qua ſurſum projicitur, omnino perimeretur. Cumque ex altera parte corpus ut a manu ſejunctum aliam nullam vim ab eodem accipiat, ex altera vero vi continua gravitatis deorſum urgeatur, altius aſcendere non poſſet, quod cum experimento pugnat. Si vero minor, facere non poteſt, ut ne minimum quidem temporis ſpatium corpus quieſcat, & poſtea denuo ſurſum feratur. Nam reſiſtentia & vis minor alia vi contraria perimere debet partem ſolum ejuſdem. Reliqua igitur pars utpote quæ nihil contrarium habet, corpus moveat ſine ulla intercapedine neceſſe eſt. Si urgeres hanc reliquam vim non corrumpi quidem, ſed toto illo tempore, quo vires contrariæ æquales ſe invicem perimunt, impediri, quominus ſe exerat, atque ideo ſicut in gravi ſuſpenſo, manere conatum ad mo-

motum, non autem motum ipſum, reſponderem primo vim gravitatis ſimul cum reſiſtentia aeris utpote minorem impetu ſurſum non poſſe impedire niſi partem ejuſdem, cui ſit æqualis, niſi velimus a cauſſa poſſe exſiſtere effectum majorem, quam cauſſæ virtus requirat. 2. Vim per aliquod tempus impeditam ne ad ullum motum corpus cieat, prorſus extingui, niſi ſit ex iis viribus, quæ cauſſas perpetuo habent, a quibus ſingulis momentis reproducuntur, cujuſmodi eſt vis gravitatis corporis e filo ſuſpenſi, quæ a reſiſtentia indeſinenter perimitur, & a ſua cauſſa, quæcumque demum ea ſit, indeſinenter regeneratur; non autem impetus manu impreſſus, qui a ſua cauſſa utpote diſtanti conſervari non poteſt.

3. Hinc conſequi aliud abſurdum, quod ita conficio. Jam in ſuperioribus perſpicuum fecimus corpus ita moveri non poſſe, ut primo momento temporis inextenſum ſpatii punctum percurrat, & inde quieſcat, tum ſecundo momento ſecundum ſpatii punctum conficiat, & poſtea rurſus quieſcat, & ita pergat moveri alternatim quieſcens, & punctum ſpatii conficiens, §. 44. ſed illud ſaltem neceſſarium eſt, ut ſi motum a primo momento conſideremus, corpus extenſum aliquod minimum ſpatium ante peragret, quam ob reſiſtentiam & vires contrarias prima vice quieſcat. Hoc conſtituto quæro ab Adverſariis an toto illo minimo tempore motus continuus ſit ejuſdem ſemper velocitatis, an vero diverſæ. Quidquid dixerint, adverſus eos futurum eſt; ſi diverſæ, conſtat id, quod mihi propoſitum eſt, motus omnino continui modo majorem, modo minorem velocitatem eſſe poſſe. Sin ejuſdem, toto illo tempuſculo quid facit gravitas, quæ adverſatur vi ſurſum? Otiatur ne, an vero cum continua ſit, & jugiter agat, aliquid de impetu ſurſum detrahit? Si jugiter detrahit ut debet, corpus toto illo tempore eadem ſemper velocitate ferri non poteſt, ſed neceſſe eſt, ut initio majorem, proceſſu vero cauſſa diminuta, & minime reſtaurata minorem habeat. Ex quo etiam conſequitur motus omnino continui majorem atque minorem celeritatem eſſe poſſe.

4. Quod etiam confici poteſt rotatione ſphæræ, quæ ex materia maxime ſolida confecta ſit. Nam cum omnes partes ſint ipſæ inter ſe arctiſſime conglutinatæ, eodem tempore quieſcant, eodem moveantur neceſſe eſt. Nihilominus extimæ quæque longius abſunt a centro ſphæræ, circa quod illa conver-

titur, majorem circulum, & ideo majus ſpatium conficiunt præ iis, quæ centro propiores. Igitur neceſſe eſt, ut illæ majori velocitate præ his ſuum ſpatium percurrant.

5. Ad hæc Adverſarii negant aſſumptum, & ajunt antequam partes centro propriores e loco diſcedant, remotiores moveri, propterea quod ſphæra etiam ſolida pauliſper inflectitur, quorſum illa rotatur, ſic tamen ut extimæ minimæ particulæ primo temporis momento eo verſus inflectantur, tum ſecundo momento aliæ, quæ extimas conſequuntur, & poſtea aliis momentis reliquæ omnes citius, vel tardius pro majori, vel minori a centro diſtantia uſque ad ipſummet centrum. Verum ſi hæc ita ſe haberent, eo plus, vel minus reſiſtentiæ in ſphæra in gyrum torquenda experiri deberemus, quo firmiori vinculo partes inter ſe cohærerent. Nam antequam manus in gyrum ſphæram moveat, particulas inflectere debet, ſine qua inflexione motus circularis per Adverſarios eſſe non poteſt. Sed huic inflexui firmitas corporum plus vel minus obſiſtere debet, pro majori, vel minori cohæſione molecularum, quibus eadem componuntur; atqui falſum id eſſe communi conficitur experientia, quæ ſolum docet eo magis corpora rotationi obſiſtere, quo graviora ſunt, & quo plus frictionis rotando fieri debet. Nihil igitur eſt, quod Adverſarii commenti ſunt, quo ſe a propoſito argumento expedirent.

§. 52. Scholion.

Nunc venio ad alterum eorum, quæ propoſui, quo etiam primum confirmabitur. Jam certum, & exploratum eſt leges circa motus & colliſiones corporum, quæ moveri ponuntur in loco nullius reſiſtentiæ, aut quia vacuus conſideratur, aut ob aliam cauſſam, eſſe fundamentum legum circa motus & colliſiones omnium corporum, quæ in loco pleno & corporum motibus obſiſtenti moventur. Nam prius ſciendum eſt, quid conſequi debeat ſolum habita ratione corporum durorum, quorum aliud cum alio confligat, quam teneamus quid fieri oporteat etiam attentis aeris & aliorum mediorum impedimentis, quemadmodum ad id, quod ex aliqua ſumma reliquum eſt, cognoſcendum, neceſſe eſt prius ipſam per ſe ſummam exploratam habere, e qua quidpiam aliud ſubducitur. Jam vero una ex hiſce legibus vel præcipua vult & oſtendit corpus impingens & impactum æquali poſt conflictum velocitate

cieri,

cieri, ſed minori præ illa, qua ſolum impingens ante conflictum ferebatur, proptereaquod vis, quæ prius in ſolo impingente erat, per utriuſque maſſam diſtributa minus intenſa fit in ſingulis ejuſdem particulis. Hoc poſito ſac in vacuo moveri corpus aliquod durum, & incidere in aliud quieſcens pariter durum. Profecto non inficiaberis motum eſſe omnino continuum, ſive illum conſideres in ſolo impingente ante conflictum, ſive in utroque poſt. Vis enim motrix vel minima ſemper agit in corpus, niſi illi quid obnitatur. In illo vero, quod omni corpore caret, nihil eſt, quod impetui corporis reſiſtat. Neque enim poſt conflictum corpus impactum impedimento eſſe poteſt, ne impingens, quod cum illo partem virium communicavit, perpetuo moveatur. Nam impactum utpote quod nullum habet corpus ante ſe, quod impetum & motum ejus antrorſum impediat atque retardet, indeſinenter ſine ulla morula ferri debet. Cauſſa igitur eſſe non poteſt, cur ſequens & eadem ac ipſum velocitate latum aliquas identidem in motu morulas intercipiat. Quamobrem ſi motus omnes continui ſunt ejuſdem & quidem maximæ velocitatis, in datis duobus corporibus eadem erit ante & poſt conflictum celeritas. Quod cum dicta lege, quæ omnium aliarum, ut Phyſici norunt, fundamentum & baſis eſt, omnino pugnat. Qui igitur Phyſicam Recentiorum ſalvam vult, motum omnino continuum alium alio velociorem eſſe poſſe defendat neceſſe eſt.

§. 53. Objectio

Eſt tamen hic non ſpernenda difficultas, quam proponere & ſolvere debemus. Scilicet ſi motus omnino continuus eſſet alius alio velocior, continuum aliud alio magis continuum eſſe conſequeretur. Cum enim velocior eodem tempore plus ſpatii conficiat, plures etiam motus partes eaſque magis ſpiſſas & conglutinatas, ſibique invicem magis ſuccedentes habeat opus eſt. Sed continuum aliud alio magis continuum eſſe nequit. In eo ſiquidem partes ſe proxime & continenter ſequuntur atque contingunt, itaut alia nulla inter quamlibet unam & alteram intercipi queat. Contactu autem proximo, & continenti, & interpoſitionem omnium aliarum partium excludente nullus eſſe poteſt major. Motus igitur alius alio magis continuus, ideoque velocior eſſe nequit.

§. 54. Reſponſio

Hujus & fere omnium aliarum, quæ in hac diſputatione

difficultates occurrunt, fons & origo eſt communis illa præjudicata opinio circa continui compoſitionem, perinde ac ſi ex partibus actu diſtinctis coaleſceret. Hanc ſi ſequaris, te undique inextricabilium difficultatum laqueis aſtringes, ad quamcumque ſententiam in hac materie adhæreſcas. Hanc ſi deponas utpote falſitatis convictam, §. 19. & maximas huic univerſæ rei tenebras offundentem, omnia plana & expedita oſtendes. Exemplo ſit propoſita difficultas, quæ ſpeciem demonſtrationis habet, & revera foret, ſi continuum ex inextenſis atque ſimplicibus reipſa diſtinctis componeretur. Illud enim contactus proximi & continentis, cujus maximus eſſe non poteſt, vim demonſtrationis obtineret. Sed cum in eo nullæ ſint partes, ex quibus ſe invicem contingentibus coaleſcat, quid abſurdi eſt ponere unum ex continuis ſucceſſivis denſius ac ſpiſſius alio! Num inde ſequitur partes, quæ non ſunt, ſe plus tangere, quam proxime & continenter? Quod eſt illud unum, in quo ratio innititur Aſtipulatorum contrariæ ſententiæ. Quamobrem ſi modo oſtendatur unum motum continuum eſſe poſſe alio velociorem, ut me oſtendiſſe mihimetipſi perſuadeo, ratio a partium contactu ducta nihil officere debet, quominus in ſententia permaneamus. Nec quemquam morari debet difficultas ab hoc dilemmate ducta; aut partes ſe contingunt in vero continuo, aut diſtant; non autem diſtant. Igitur ſe contingunt. Nam ſupra, §. 50. num. 4. eidem plane ſatisfecimus, cum de illo dilemmate diſputaremus.

2. At enim ſi hæc ita ſe habent, ſequitur etiam extenſum omnino continuum eſſe poſſe aliud alio denſius; contra quam omnes qua Philoſophi qua Geometræ ſentiunt. Nam ſi eodem tempore poteſt eſſe continuum ſucceſſivum uti eſt motus aliud alio velocius, & quodammodo denſius, quid ni & eodem loco contineri poteſt continuum ſimultaneum, quale eſt corpus extenſum, aliud alio ſpiſſius ac denſius?

3. Olim religioni habens a communi ſententia diſcedendi hoc inter utrumque continuum afferebam diſcrimen. Continui permanentis, cujuſmodi eſt extenſum, una datur menſura ſcilicet ſpatium, at ſucceſſivi uti eſt motus, duæ, ſpatium peragratum & tempus, quod inſumitur in eo percurrendo. Quare ſi bina extenſa ratione habita ſpatii æqualia ſint, penitus æqualia eſſe debent; proptereaquod nulla eſt alia menſura, ad quam ſi exigantur, aliud alio majus eſſe queat. At ſi tempus, quo duo-

rum

rum corporum motus durat, ſit idem, aut æquale, non continuo ſunt etiam ipſi motus perfecte æquales, quia poteſt eſſe alter altero major, ſi ſpatii, quod conficiunt, ratio habeatur. Eo ferme pacto, quo quia linearum una menſura eſt longitudo, ſi duæ ſint habita illius ratione æquales, perfecta inter eaſdem æqualitas intercedit; at cum planorum menſura duplex ſit, longitudo & latitudo, non continuo, quæ ſunt æquabiliter longa, ſunt etiam omni ex parte æqualia; propterea quod ratione habita latitudinis alterum altero majus eſſe poteſt. Olim, inquam, cum mihi religio eſſet communem ſententiam deſerere, hoc afferebam diſcrimen.

4. Sed nunc mihi nequaquam probatur; propterea quod innititur tum illa ſententia, quam ſupra falſitatis arguimus, §. 32. ſpatium intimum eſſe diſtinctum a corpore, tum illa altera pariter falſa diſtinctionis temporis a motu. Quid igitur reſpondendum relinquitur, ut communem tueamur ſententiam? Nihil, ut mihi quidem videtur. Nam ſi ſemel aſſentiti fuerimus continuum ſucceſſivum eſſe poſſe aliud alio velocius, amplius integrum nobis non eſt hanc eandem poſſibilitatem in permanenti inficiari. In quo non video quid obſtare debeat communis opinio. Non enim in Philoſophia res auctoritate ſcriptorum conficiendæ ſunt, ſed evidentia rationum. Quid autem ad probandam ejuſdem omnium continuorum, quæ ſimultanea ſunt, denſitatis neceſſitatem allatum fuit? Mathematici quantitatem extenſam aſſumunt ut eadem denſitate quoquoverſus donatam, quod eſſe poteſt, & ad eam ita conſideratam demonſtrationes accommodant, prompti quantum in ipſis eſt, ad extenſa continua quoque diverſæ denſitatis inflectere, ſi quis ejuſcemodi continua iiſdem obtrudat; & revera ſine ullo Geometriæ incommodo id faciunt in Phyſicis, ubi natura diverſæ denſitatis corpora affert. Philoſophi vero nihil, quod ſciam, ad id oſtendendum contulerunt. Nam quod contra inflata puncta a quibuſdam in Philoſophiam inducta ſcripſere, nihil facit adverſus extenſa continua multiplicis denſitatis, quæ a nobis vere extenſa ponuntur, quæque ut ſemel a Deo cum aliqua definita ſpiſſitudine condita fuerunt, naturaliter nec intumeſcere nec detumeſcere, ideoque nec majus, aut minus ſpatium occupare poſſunt. Quamobrem nihil vetat, quominus cedentes rationi, quæ ex continuo fluenti ducta eſt, extenſum omnino continuum aliud alio denſius eſſe poſſe credamus. Quod ea confirmant, quæ §.

8. num.

8. num. 4. ſtatuimus. Nam ſimul ac aliud alio denſius eſſe poteſt, nulla eſt ratio, cur hæc incrementa quibuſdam limitibus coerceri poſſint, & ad hujus majoris denſitatis finem perveniatur. Immo cum ex altera parte ex eo, quod vacuum inter parietes interpoſitum ſive potentia recipiendi extenſa ſit attributum Dei, illud eſſe infinitum concludatur, & ex altera utpote finitis limitibus undique circumſcriptum extrinſecus & in extenſione infinitum eſſe nequeat, & ideo aliter quam intrinſecus & in intenſione tale eſſe queat: hinc aliud continuum corpus alio iiſdem limitibus coercito in infinitum majus, & ideo denſius eſſe poſſe alia ratione conficitur. Accedit etiam in ſpiſſitudine continua dari poſſe gradus majores atque minores in infinitum, ſi nulla ſit ratio cur determinatus aliquis gradus in ea detur; nulla vero eſt hujuſmodi ratio: non ex parte Dei, in quo tamquam in vero, ſed inextenſo omnium rerum loco extenſum continuum eſſe debet, quia Deus eſt infinitus; nec etiam ex parte ipſius continui, quod in eo nullæ ſunt partes actuales ſuis quæque terminis ſecretæ, quæ ubi ad contactum pervenerint, maximum denſitatis gradum, qui præteriri non poſſit, attigerint. Ergo dicendum eſt denſitatem continuam etiam extenſorum aliam alia majorem in infinitum non repugnare. Confirmatur ex eo, quod quæcumque in continuum cadunt, ipſa in ſe ſpectata intelligi nequeunt, quanta ſint ſed ſolum ſi alia cum aliis conferantur, §. 41. ergo neque ipſamet continui extenſi denſitas alia ratione percipi poterit. Quod ſi ita eſt, aliam alia majorem eſſe poſſe neceſſe eſt, quo ſcilicet alia cum alia comparari queat. Quidquod in denſitate eſt eadem ac in magnitudine ratio. Nam ut magnitudo extenſi poteſt eſſe alia alia major in infinitum, eo quod nullus certus magnitudinis gradus definiri quit, ita quia in extenſo nullis reipſa partibus donato nullus definitus ſpiſſitudinis gradus deſignari poteſt, eam in infinitum aliam alia majorem eſſe poſſe concluditur.

5. Quod fortaſſe commode cadet in Phyſicis cum ad multa explicanda facilius, tum vero maxime ad reddendam rationem tantæ inter gravitatem denſitatemque corporum, quæ ſenſibus apparent continua, diverſitatis, ſine illa tam enormi pororum multitudine, quæ a contrariæ ſententiæ Patronis in levioribus corporibus admittitur & admitti debet, quæque cum multis partibus ſolidæ materiæ moleculas ſuperet, multis effectis, &

præ-

præſertim apparenti continuitati adverſari videtur. Sed de hoc alias. Interim fidem ad initium ſeptimi capitis, §. 24. datam me ſolviſſe puto, & ad illa, quæ ab Adverſariis contra omnia a nobis ſtatuta dicuntur, ſolvenda progredior.

CAPUT NONUM

Solvuntur argumenta contra noſtram de continuo ſententiam.

§. 55. Objectio

Itaque præter id, quod jam diluimus §. 49. ajunt, ſi extenſum ex punctis inextenſis non conſtet, uſque in infinitum dividi poſſe, & inde conſequi quod omnino repugnat, infinitas ſaltem potentia partes eſſe in quolibet vel minimo corpore, itaut lamellis ex parvo cubo deciſis convexitas ipſiuſmet firmamenti operiri queat. Quamquam enim in mea ſententia cubus omnino continuus in partes ipſe per ſe ſecari non poſſit, poteſt tamen æqualis eſſe tot aliis lamellis atque bracteolis reipſa inter ſe diſcretis, quot ſatis eſſe queunt ad qualemcumque cooperiendam vel maximam ſuperficiem, §. 21. num. 2. Cum enim lamellæ quadratæ aliæ aliis in infinitum tenuiores a Deo creari poſſint, eædem eſſe queunt ſimul tot numero, ut ſi aureæ ſint, libramentum cujuſcumque vel maximi corporis inaurent, & ſimul adeo exiguæ craſſitiei, ut ſi aliæ ſuper aliis ponantur, datum cubum exæquent. Quod profecto videtur prorſus a ratione abhorrere.

§. 56. Reſponſio

Certe Geometris non ita videbitur. Siquidem norunt poſitis tribus cubis, quorum primi latus ſit $= 4$, ſecundi $= 2$, tertii $= 1$, totum primum cubum fore $= 64$, ſecundum $= 16$, tertium $= 1$, ſuperficiem vero primi $= 16$, ſuperficiem ſecundi $= 4$, tertii $= 1$. Scilicet cubos ipſos eſſe in ratione triplicata laterum, ſuperficies autem in duplicata. Ex quo fit 64 parvos cubos, quorum ſinguli ſint $= 1$, conficere ſummam $=$ primo cubo 64, ſed eorum ſuperficiem fieri quadruplo majorem, quam ſit ſuperficies ejuſdem primi. Quo pacto ſi minores atque minores in infinitum cubi ſumantur, eorum ſumma poterit eſſe $=$ cubo 64, tametſi ſuperficies eorumdem præ ſuperficie dicti cubi in infinitum augeantur. Unde evidenter colligitur bracteolis valde exiguis quamcumque vel maxi-

mam

mam ſuperficiem poſſe operiri, tametſi earum ſumma datum quemdam cubum exæquet.

§. 57. Objectum II.

Atque ita infirmato objecto, quod ex infinita partium continui multitudine ductum eſt, ad aliud Adverſarii ſe vertunt, & ajunt in ſententia continui quod in infinitum dividi queat etiam eo ſolum modo, quo hanc diviſionem explicuimus, §. 21. num. 2. conſequens eſſe motum extenſorum inter ea numerandum, quæ in rerum natura conſtare non poſſunt. Nam antequam corpus a primo cujuſdam finiti extenſi puncto digreſſum ad ultimum perveniat, primam medietatem tranſeat neceſſe eſt; antequam vero a primo pariter puncto ad ultimum illius medietatis perveniat, medietatem medietatis tranſgrediatur oportet, & ita porro omnes omnium medietates ante pertranſire debet, quam ad extremum ſingularum partium, quæ in duas medietates diſpeſci queunt, accedat. Sed in extenſo continuo quantumvis finito medietates in infinitum deſignari poſſunt, §. 21. Igitur corpus infinitas partes ante percurrerit neceſſe eſt, quam finito tempore ſpatium finitum conficiat. Atqui nullatenus hoc fieri poſſe videtur; propterea quod finitum tranſiri nequit præſertim finito tempore; nulla eſt enim finiti ad infinitum proportio. Ergo noſtrum ſyſtema unde hæc abſurda conſequuntur, nulla ratione eſſe poteſt. Huc recidit argumentum illud, quod Zenonis Achilles vocatur, quodque ita proponi ſolet. Fac Achillem a teſtudine mille paſſus diſtare, & utrumque eodem verſus moveri, ſed alterum, qui pone ſit, velocitate decies majori. Hoc poſito ſi partes in continuo in infinitum deſignari poſſunt, conſequens eſt velociſſimum Achillem numquam tardiſſimam teſtudinem eſſe conſecuturum. Nam dum is percurrit milliare, hæc $\frac{1}{10}$ milliaris jam promota eſt, ideoque ab Achille adhuc diſtat; dum alter $\frac{1}{10}$ milliaris abſolvit ad eum finem, ut brutum aſſequatur, interim $\frac{1}{100}$ milliaris partem altera conficit, & idcirco adhuc aliquod ſpatium inter eoſdem intercedit. Quo vero tempore primus $\frac{1}{100}$ antrorſum adhuc progreditur, illo ſecunda per $\frac{1}{1000}$ promovebitur, ideoque Achilles

les nondum illam eſſe aſſecutus intelligitur. Cum vero hujuſmodi partes in Geometrica proportione decreſcentes in infinitum diſtingui poſſint; Achillem ad teſtudinem nuſquam perventurum eadem ratione efficietur.

§. 58. Reſponſum

Multi multa ad hæc ſcripſerunt, quæ quiſque e tot editis libris petere poteſt; mihi enim non vacat ſingulorum ſententias proferre & expendere. Juvat potius quid ego reſponderi poſſe putem, ſignificare. Dico itaque magnam hujus argumenti ſpeciem evaneſcere, ſi quam temporis notionem in ſuperioribus ad vivum reſecuimus, hic pugnaciter teneamus. Cum enim tempus non ſit niſi aliquis æquabilis motus, ad quem tamquam ad communem menſuram durationes rerum & aliorum motuum exiguntur, hora autem non ſit niſi motus ſolis per ſpatium finitum 15. graduum orbis cœleſtis, quid abſurdi eſſe poteſt in eo, quod tempore finito unius, ex. gr. horæ a corpore peragretur ſpatium finitum, in quo minores atque minores in infinitum medietates deſignari poſſint? Illud enim unius horæ finitum tempus aliud non erit, quam motus per ſpatium pariter finitum 15. graduum, in quo pariter dimidiæ partes in infinitum deſignari queunt? Unde corpus una hora motu æquabili abſolvere unum milliare idem propemodum erit ac velocitatem dicti corporis ad velocitatem ſolis eſſe in eadem ratione ac unum milliare ad 15. gradus orbis a ſole motu diurno confecti; in quo nihil eſſe alieni a ratione liquet ex iis, quæ de motibus continuis, quorum alii aliis in infinitum velociores eſſe poſſunt, ſupra diſputavimus, §. 51. Quare ſi Adverſarii vim faciant in eo, quod tempore finito motu peragrari debeat ſpatium, in quo medietates infinitæ deſignari queunt, ſe uti pugione plumbeo fateantur neceſſe eſt. Quod ſi vim argumenti non ponant in tempore, & univerſe dicant omnem motum ideoque & tempus repugnare ob id unum, quod infinitæ partes, quæ ex noſtra ſententia ſunt in continuo, nulla ratione tranſiri poſſunt, neque hoc pacto eos aliquid profecturos puto; propterea quod non ſunt in continuo partes actu, quæ numerum infinitum colligant, ſed ſolum in potentia, quæ numquam reipſa deſignabuntur, ſi infinitum actu repugnat. De quo alias accurate tractabimus. Ita concluditur nulla ratione ab Adverſariis probari cum noſtra continui ſententia motum pugnare. Immo potius conficitur hæc repugnantia in ſyſtemate adverſario-

riorum, qui volunt corpus extenſum ex punctis inextenſis, & tempus ex inſtantibus, quorum alia aliis proxime ſuccedant, conſtare. Nam hac in hypotheſi corpus moveri non poteſt, niſi unico inſtanti punctum inextenſum corporis ab illo puncto inextenſo ſpatii, in quo motus initio reperitur, ad punctum ſequens tranſeat. Ex quo fit punctum illud corporis eodem ſimplici inſtanti in duobus punctis ſpatii eſſe oportere; quod idem eſt ac corpus eſſe eodem tempore in duobus locis, id quod cum naturali ratione pugnare inter Philoſophos convenit. Unde alia efficitur ratio pro noſtra ſententia continui hoc pacto concluſa: ſi ſpatium extenſum ex punctis inextenſis conficitur, ſequitur motum fieri a primo puncto ad ſecundum; hoc autem longiſſime abeſt a vero, ut modo probavi. Ergo etiam illud, ex quo hoc ducitur. Ita fit, ut continuum extenſum ex inextenſis non componatur. Sed hæc per tranſennam. Quid vero ad Adverſariorum Achillem reſponderi debeat, ex hactenus dictis compertum fieri poteſt. Fac enim Achillem una hora conficere unum milliare, & ideo teſtudinem $\frac{1}{10}$ milliaris; inde fit $\frac{1}{10}$ horæ primum conficere $\frac{1}{10}$ milliaris, & ſecundum $\frac{1}{100}$ milliaris, $\frac{1}{100}$ horæ primum $\frac{1}{100}$ milliaris, & ſecundum $\frac{1}{1000}$, & ita porro. Quo fit ut initio motus Achilles uno milliari a teſtudine diſtet, poſt horam $\frac{1}{10}$ milliaris, poſt horam cum $\frac{1}{10}$ horæ ſolum $\frac{1}{100}$ milliaris, poſt horam cum $\frac{1}{10}$ & cum $\frac{1}{100}$ horæ ſolum $\frac{1}{1000}$, & ita diſtantiæ fiant ſemper minores, & ſingulis partibus finitis temporis in ſubdecupla geometrica proportione decreſcant, quemadmodum & ipſamet tempora. Cum ergo de hiſce intervallis hoc modo ſemper aliquid finitum decedat, ſequitur Achillem a teſtudine non poſſe per infinitum tempus diſtare. Nam ut advertit Keil Introduct. ad veram Phyſic. lect. 4. omnes termini illius ſeriei in ratione geometrica decreſcentis unum milliare & una hora, $\frac{1}{10}$ milliaris & horæ, $\frac{1}{100}$ milliaris & horæ cum $\frac{1}{100}$ utrimque, cum $\frac{1}{1000}$ &c. uſque in infi-

infinitum non colligunt niſi quantitatem finitam, ideoque tempus & ſpatium finitum. Quare tempore finito intervallum inter Achillem & teſtudinem fiet infinite parvum, atque ideo nullum. Unde concluditur fore, ut Achilles teſtudinem aſſequatur. Quod ſi ad datam temporis notionem confugies, multo dilucidius id fieri intelliges.

§. 59. Objectum III.

Sed potiſſimum oppugnari poteſt ea noſtra ſententia, qua volumus partes actu & reipſa diſtinctas tamquam partes non eſſe in continuo extenſo. Sit enim cubus hac extenſione omnino continua donatus. Profecto duos in eo palmos diſtinguere & deſignare circino aut alio inſtrumento poſſumus. Unde conſequens eſt eos eſſe partes reipſa diſtinctas. Nam in quæ contradictoria cadunt, illa diſtinguuntur reapſe; res autem ita ſe habet in hiſce palmis; alius enim in alio loco eſt, alius alius coloris eſſe poteſt. Qui ergo non ſunt partes actu diſtinctæ, tametſi divelli non queunt?

§. 60. Reſponſio

Minime. Non enim idem eſt duo reipſa internoſci, & eſſe partes reipſa diſtinctas, quæ numerum faciant ex diſcretis coalitum unitatibus. Nam etiam in Sanctiſſimæ Trinitatis Perſonas realem diſtinctionem cadere certum eſt, nemo tamen Theologus dixerit ex iis numerum rerum ternarium tribus diſcretis partibus conſtantem conflari. Item in ſubſtantiam & accidens contradictoria & realis diſtinctio conveniunt, & nihilominus partes non ſunt, ex quibus aliquid coaleſcat. Quamobrem repugnantium convenientia, & diſtinctio realis certum partium ſignum non ſunt. Concedo igitur in duos cubi palmos repugnantia & diſtinctionem quadrare, ſed eos eſſe partes reipſa diſtinctas inde conſequi nego. Ad hoc enim neceſſe eſt, ut ſuis quæque terminis propriis circumſcribantur, quibus fiat, ut ex iis tamquam partibus actu diſtinctis extenſum coaleſcat. Sed ante omnes terminos & partes actu diſtinctas primitivam extenſionem eſſe jam demonſtravimus, §. 19. & 20. Igitur duo palmi alius ab alio ſecernuntur, ſed minime tamquam partes reipſa diſtinctæ, ſuos quæque fines habentes, ex quibus extenſum vere componi dici poſſit. Nec medietatum ſuperficiei cubi deſignatio, quæ fiat ope alterius corporis, novos aliquos terminos utrique medietati proprios inducit; propterea quod cum circinus lineam deſcribit, aliud nihil facit, quam contingere ſuperficiei ter-

terminos, qui ante contactum jam erant, §. 21. Alteram vero partem ſuperficiei apparere albam, alteram autem nigri coloris aliud eſt nihil, quam ſingulas a corpore diverſi coloris contingi. Siquidem in hac ſententia cum partes continui actu diſtinctæ non ſint, neque poſſunt eſſe aliæ alius eſſentiæ & naturæ, quæ realem partium diſtinctionem requireret. Quamobrem continuum debet eſſe ejuſdem ubique tenoris ejuſdemque denſitatis, atque ideo ipſum per ſe, quod attinet ad interiorem ſubſtantiæ naturam, eumdem ubique colorem referre. Quare ſi medietates diverſi coloris appareant, id non oritur ab interiori diverſa natura, ſed a contactu corporum, quæ alio atque alio colore inficiuntur.

§. *61.* Inſtabis

At enim non ſolum in exteriorem extenſi continui ſuperficiem, ſed etiam in interiores ſubſtantiæ partes diverſa cadere poſſunt reipſa diſtincta. Nam ſi ſphæra continua circa axem torqueatur in gyrum, particulæ centro propiores minori velocitate, remotiores majori cientur. Quod profecto ſine diſtinctione reali earumdem fieri nequit; hoc enim pacto ſingulæ diverſo ſpeciali motu feruntur, qui terminos in ſingulis partibus diſtinctos poſtulat etiam in noſtra ſententia, qui hanc ob cauſſam corpuſcula primitiva continue extenſa comprimi non poſſe ſupra docuimus, §. 23.

§. *62.* Reſponſio

Sed alia eſt natura ſpecialis motus particularum, qui fieret in ſphæræ continuæ compreſſione, alia natura ſpecialis, qui rotationem ſphæræ circa axem conſequitur. Namque ille ſitum particularum inter ipſas mutat, hic autem nequaquam. Immo ne in converſione ſphæræ hic ſitus varietur, tanto major in partibus velocitas ſit oportet, quanto illæ a centro plus abſunt. Quare prior exigit ut partes vel jam habeant, vel acquirant ſuos quæquæ terminos, quo ſingulæ moveantur eo ſpeciali motu, qui ſitum variare queat, ſecundus autem id minime poſtulat. Unde conſequens fit in extenſum continuum cadere quidem diſtinctionem realem, ſed non eam, quæ numerum faciat, & partes ſuis quaſque limitibus circumſcriptas.

§. *63.* Inſtantia

Quid ergo eſt hæc diſtinctio, quæ inter illos duos cubi palmos intercedit? non realis minima, quod illi palmi non ſunt duo gradus methaphyſici uti ſubſtantia tamquam genus, & ſpi-

ritalis

ritalis tamquam differentia hac diſtinctione in ſententia quorumdam Philoſophorum ſecernuntur. Non realis media, quia inter ſubſtantiam & ejus accidens non eſt. Reliquum igitur eſt, ut ſit maxima, quali duæ ſubſtantiæ internoſcuntur. Sed maxima verum conſtituit numerum, qui ex diſcretis unitatibus coaleſcat. Ergo & veras partes numerum facientes. Quid quod duo palmi percipi nequeunt, niſi verus numerus una percipiatur? Quid enim inter veros numeros referri poteſt, ſi duo palmi non referantur? Ergo iterum patet eſſe duas veras partes, quæ numerum faciant.

§. 64. *Reſponſio*

Ad hæc, quibus propoſita difficultas ad ſpeciem non parum urgetur, refellenda res altius repetenda eſt, & ad trutinam revocanda communis illa Peripateticorum atque adeo Philoſophorum doctrina de tripartito genere diſtinctionum realium. Itaque hi tres diſtinctionis realis ſpecies conſtituunt minimam, mediam, & maximam. Maximam dicunt, quæ intercedit inter illa duo, quorum primum ſine altero, & alterum ſine primo conſtare poteſt ſaltem in ſtatu abſoluto, cujuſmodi eſt diſtinctio inter duas ſubſtantias; mediam, quæ intereſt inter illa duo, quorum primum eſſe poteſt ſine ſecundo, non autem hoc ſine primo, uti ſubſtantia ſecernitur a modo; minimam, quæ eſt inter illa, quorum neutrum ſine altero exſtare quit. Quibus conſtitutis ad aliquam harum revocare conantur rerum diſtinctionem quamcumque. Sed in re parum utili moleſtias non neceſſarias ſibi creare mihi videntur. Nam primo ex anguſtiis, in quas ſe compulerunt, evadere non poterunt, ſi quis petat, quæ diſtinctio intercedat inter duos modos ejuſdem rei, qui ſeorſim eſſe poſſint, ut inter motum, & figuram rotundam in corpore; non enim ad maximam referre poſſunt, quod inter duos modos ejuſdem rei, qui ſimul exſiſtunt in eadem omnino ſubſtantia, ut veluti aliud in alio ſit, minus diſcriminis intercedit, quam inter duas veras ſubſtantias, quarum alia extra aliam omnino eſt: neque ad mediam, quod alteruter ſine altero conſtare poteſt; ad nullam igitur. Nam de minima res ipſa per ſe clara eſt. Deinde in SS. Trinitatis Myſterio nonne inter Divinas Perſonas eſt diſtinctio quædam realis, quæ ad nullas ex dictis revocari poteſt, propereaquod ob unitatem Naturæ, quæ in ſingulis eadem & una creditur, minor eſt maxima diſtinctione, nec tamen inter medias & minimas, ut ab iis definiun-

finiuntur, enumerari poteſt. Ut breve faciam, alia prætereo, quæ huc poſſent conferri ad id oſtendendum, quod propoſitum eſt, non eſſe tres illas tantum diſtinctionum ſpecies conſtituendas, aut ſi nomina retineantur, alio modo explicandas, & ut edicam quid ſentio, in diſtinctionibus conſtituendis mihi videtur habenda potiſſimum ratio naturæ rerum, & fundamenti, quod in ipſis rebus eſt, diſtinguendi aliud ab alio, ſive cognoſcendi unum non eſſe aliud, adeo ut pro ratione majoris, aut minoris fundamenti, quod rebus ineſt, mens magis vel minus diſtinguat, ideſt cognoſcat unum non eſſe aliud, quod negativum ipſis rebus affixum non eſt, ſed mentis illud cognoſcentis eſt proprium. Quare diſtinctio maxima omnium, quæ eſſe poſſunt inter illa erit, quorum alterum cum altero nihil commune & idem intrinſecus habebit, & quorum primum omni ex parte ſpectatum aliud non erit. Ita ſubſtantiæ a ſubſtantiis internoſcentur, non autem modi a modis ejuſdem ſubſtantiæ, tametſi ſeorſim eſſe queant, propterea quod in ſubſtantia, in qua inſunt, aliquid commune & quodammodo idem intrinſecus habent. Alia vero omnia, quæ aliquid commune & idem in individuo habent, diſtinctione minori, quam maxima ſecernentur, & eo quidem minori, quo plura ſunt iis communia & eadem. Sed nec eſt neceſſe nec magni momenti eſt hos diſtinctionum maximo minorum gradus ſecernere, & pro diverſitate rerum, quæ hoc modo internoſcuntur, diverſa diſtinctionum vocabula fingere.

2. His ex Metaphyſica prælibatis redeo ad propoſitam difficultatem, & ajo ex dictis liquere, ſiquarum rerum diſtinctiones ad mediam, vel ad minimam, quatenus a Scholaſticis explicantur, revocari non poſſint, non continuo inter maximas referri oportere. Et revera definitio a nobis tradita maximæ diſtinctionis educta ex ipſa natura ejus, quod in quoque genere maximum eſt, & in eo poſita, quod unum omni ex parte ſpectatum nihil alterius intrinſecus habeat, non convenit in duas cubi omnino continui medietates, quarum altera quantumvis extra alteram ſit, ut natura extenſi requirit, tamen eoſdem omnino communes terminos habent, nec hanc extrapoſitionem actu ſed ſolum virtute obtinent, §. 21. num. 9. nec ideo illos acquirere & idcirco disjungi poſſunt. Et nihilominus termini in extenſo ſunt ejus naturæ, ut hoc undequaque perfectum & abſolutum eſſe nequeat ſine iiſdem,

qui-

quibus undique circumſcribatur. Quod indicio & argumento eſt medietatem illam cubi, quæ ſi ipſa per ſe ſpectetur, omni ex parte terminis propriis non ambitur, habere aliquid commune cum altera & idem in individuo, ideoque ab eadem non ſecerni diſtinctione omnium maxima, quæ ad verum numerum unitatibus diſcretis coalitum componendum ſufficiat.

3. Nam quod de duobus palmis additum fuit, probat tantum ſuperficiem illius cubi vim duorum palmorum habere, & duo extenſa perfecte diſtincta, quorum quodlibet palmi magnitudinem exæquet, ſuper illa poſſe locari, ut cubi ſuperficies cum illorum ſuperficiebus adamuſſim congruat, §. 21. num. 9. Quamobrem verus & actualis numerus non cadit in cubum, qui ſolum duobus extenſis magnitudinis unius palmi æquivalet, & ideo ſolum virtute & potentia numerus eſt, ſed in illa duo extenſa diſcreta, quorum quodlibet palmare eſt. Quibus mihi videor huic difficultati penitus ſatisfeciſſe.

CAPUT DECIMUM

De quantitatibus infinite parvis.

§. 65. Definitiones

ALia plurima a Zenonis Aſtipulatoribus contradicuntur, quæ expendenda & refutanda forent. Sed quia facilius dilui poſſunt, quam ut hic de iis diſputari operæ pretium ſit, & alioquin apud multos auctores idoneæ reſponſiones leguntur, idcirco libenti animo ad alia tranſimus, & memores illius, quod nobis maxime propoſitum eſt de enodandis Matheſeos difficultatibus, quantitates infinite parvas, quæ non paucis iiſque graviſſimis obſtructæ ſunt, expendendas ſuſcipimus. Qua in re ut via & ratione progrediamur, primum dicimus nomine infiniti intelligi id, cui tot inſunt, ut in eorum enumeratione ad ultimum pervenire repugnet. Sic capacitas recipiendi extenſa conficitur eſſe infinita trito illo argumento corporis, quod aliquorſum movetur, §. 12. Quamvis enim finita mea mens infinitum poſitive, ut ajunt, ſive quid ſit, percipere & comprehendere nequeat; tamen negative quid non ſit, intelligere poteſt, & revera hac in re intelligit, cum ex eo quod aut illud corpus ſemper moveri pergit, ideoque ſemper capacitatem invenit, aut non poteſt ſemper mo-

Digitized by Google

moveri, iedoque ſolidum aliquod atque ideo ſpatium jam occupatum offendit, a quo repellitur, ad ultimum hujus capacitatis finem pervenire cum evidenti ratione pugnare concludit. Sic numerus diceretur infinitus, qui tot unitatibus conſtaret, ut in iis recenſendis ad ultimum pervenire foret abſurdum. Sic extenſio diceretur infinita, in qua tot forent partes extenſæ, ut in iiſdem enumerandis ad ultimam pervenire repugnaret.

2. Secundo loco ſtatuimus finitum eſſe illud, cujus ſi pars aliqua ſumatur, ad ultimam enumerando perveniri poteſt, ut numerus 100. & extenſio 10. palmorum finita ſunt, quia ſumptis unitate & palmo ad ultimam unitatem & palmum recenſendo pervenimus. Cum vero quælibet extenſio finita uſque in infinitum dividi queat ſaltem eo ſenſu, ut minores ac minores in infinitum partes deſignari poſſint, §. 21. hinc exſiſtit notio quantitatum infinite parvarum. Siquidem intellige diviſionem factam in infinitum perinde ac ſi hoc fieri poſſet; nunc enim de hac poſſibilitate non diſputamus. Hujuſmodi in infinitum diviſio extenſionem infinite parvam nobis dabit. Nam quantitatis infinite parvæ nomine Mathematici intelligunt aut quantitatem, quæ qualibet finita poſſibili minor ſit, itaut ſi finitam uſque in infinitum magis ac magis imminuere pergamus, numquam hæc finita quoad finita manere intelligitur, infinite parva fieri poſſit aut æqualis, aut minor, ſed ab ejus parvitate ſemper infinito intervallo diſtet, aut quantitatem, cui æquales infinitas quantitates ſumere neceſſe eſt ad hoc, ut finitam quantitatem exæquet. Sed actuali in infinitum diviſione utrumque obtinetur; nam quemadmodum finita diviſione fit, ut tot denuo ſumi debeant partes, quot diviſæ fuerunt, in eum finem, ut quantitas finita diviſæ æqualis exſiſtat: ita infinita diviſione fit, ut infinitum partium, quæ diviſæ fuerunt, numerum colligere oporteat, quo priorem quantitatem finitam rurſus habeamus. Cum vero ad hunc eumdem finem opus ſit quantitatum finitarum numerum ſolum finitum in unam ſummam colligere, inde intelligitur etiam quantitatem infinite parvam eſſe qualibet finita infinite minorem.

3. Cum vero ex altera parte infinitum a nobis poſitive cognoſci non poſſit, quid ſit, ſed negative tantum, quid non ſit, & ex altera quantitates infinite parvæ diviſione finiti extenſi in infi-

infinitum continuata habeantur, ſequitur nos harum quantitatum ſolam ideam negantem habere poſſe, & intelligere quid non ſint, ſcilicet eas non eſſe ullam ex iis quantitatibus, quæ finita diviſione, ſeu deſignatione partium continui quantumcumque producta habeantur.

ARTICULUS I.

An infinite parva exſiſtere poſſint.

§. 66. Propoſitio

HIs explicatis quæritur utrum hujuſmodi infinite parva exſiſtere poſſint, vel ſaltem in continuo uti in linea deſignari, quemadmodum puncta, lineas, & ſuperficies in extenſo deſignari poſſe ſtatuimus, §. 18. Qua in diſputatione mens undique in anguſtum ſe cogi videt, propterea quod ſi hanc potentiam admittit, inducit in Philoſophiam numeri infiniti poſſibilitatem, quæ cum in multas difficultates incurrat, a multis exploditur Philoſophantium. Nam ſi corpus percurrens, ex. gr. rectam a primo deſignat in ea quantitatem infinite parvam, itaut Deus illam videat, & corpus poſtquam illam peragrarit ſiſtere poſſit, toto motus tempore per rectam infinitas deſignet oportet, quas idem Deus, atque ideo numerum infinitum cognoſcat. Sin vero infinite parvum conſtare aut deſignari poſſe negat, labefactare ſibi videtur totam propemodum Recentiorum Analyſim, quæ in hujuſmodi infinite parvis poſita eſt. Ut ab hiſce anguſtiis evadam, primum ajo nullis a Matheſi depromtis rationibus confici deſignari poſſe quantitatem infinite parvam. Id enim primum oſtendi poſſe credunt multi inſignes noſtræ ætatis Philoſophi atque Geometræ trito illo argumento anguli contactus in circulo, qui quolibet dato rectilineo infinite minor eſt. Immo ſimili ratione ſe conficere ſibi videntur exſtare poſſe etiam quantitates infinite parvas ſecundi generis, tertii, quarti, quæ ſcilicet infinite parvæ ſint, etiamſi cum aliis quantitatibus infinite parvis, ſed in minori gradu conferantur. Inter alios enim oſtendit Keillius Introduct. ad veram Phyſic. lect. 4. pag. 41. edit. Mediol. 1742. quemadmodum angulus contactus parabolæ Apollonianæ eſt infinite minor quolibet angulo rectilineo, ita angulum contactus parabolæ cubicalis eſſe quolibet

angulo contactus Apollonianæ infinite minorem, atque ideo angulum contactus parabolæ cubicalis eſſe infinite minorem ſecundi gradus; itemque angulum contactus parabolæ quadraticæ quolibet angulo contactus parabolæ cubicalis eſſe infinite minorem; unde exſiſtunt quantitates infinite parvæ tertii gradus. Quod idem convenit in omnes alias infinitas parabolas, in quibus quintæ, ſextæ, ſeptimæ, & ſic in infinitum majores potentiæ ordinatarum eamdem, ac abſciſſæ reſpondentes, rationem habent. Ex quo conſequitur dari poſſe quantitates infinite parvas cujuslibet gradus in infinitum.

2. Aliam ex motu corporum rationem petere poſſumus in hanc ſententiam; nam corpus, quod ſpatium percurrit, antequam ad illius ſpatii finem perveniat, infinite parvum ſpatium deſignet neceſſe eſt: nam a finita quadam diſtantia ad finem illius ſpatii ultimo pervenire nequit. Ergo ultima ſpatii pars, quam percurrit, ſit infinite parva oportet. Quod convenit etiam in primam ſpatii partem, quam corpus a loco digreſſum percurrit. Quid quod corpus ſurſum projectum, cujus vis & motus ſenſim minuuntur, & tandem perimuntur, a parte aliqua finita & determinata motus & vis ad nihil motus & vis ultimo tranſire nequeunt, proptereaquod inter finitum aliquid & nihil infinitum intervallum poſitum eſt? Illum igitur gradum faciunt per quantitatem infinite parvam, quæ infinite minus, quam finita, a nihilo diſtat.

3. Præterea in circulo AHC, (*Fig.* 4.) cujus diameter AC, ſume arcum infinite parvum AH, & ab H duc rectam HB perpendicularem ad diametrum AC. Quo poſito ex notiſſima circuli proprietate comperies eſſe CB ad BH, ut BH ad BA. Sed ob infinite parvam exiguitatem arcus AH ſinus BH eſt infinite parvus ratione habita finiti ſegmenti BC; ergo ut eadem proportio conſtet, etiam BA erit infinite parvus ratione habita ſinus BH, ideoque infinite parvus ſecundi gradus. Igitur conſtare poſſunt quantitates infinite parvæ non ſolum primi gradus, verum etiam ſecundi & aliorum.

§. *67.* Reſponſio ad I.

Hæc & ſimilia afferri ſolent ad oſtendendum quantitates infinite parvas exſiſtere aut deſignari poſſe. Nego tamen quidpiam his omnibus confici. Et quod ad primum attinet, miror Phyſicos Recentiores eo maxime inniti, poſtquam doctiſſimus Tacquet in Elem. Eucl. ſive Geometriæ l. 3. prop. 16.

in

in Sch. iis rationibus , quæ perſuadere & cogere quemlibet debent, angulos non eſſe inter quantitates numerandos effecit . Nam inde alium alio nec majorem , nec minorem , atque ideo nec infinite parvum dici poſſe facillime concluſiſſent. Sed præſtat audire Cl. Scriptoris verba in hanc rem. 1. *Nullus angulus eſt quantitas, ſed modus quantitatis. Sic enim habet definitio* 8. *l.* 4. *Angulus planus eſt duarum linearum &c. alterius ad alteram inclinatio. Atqui linearum inclinatio non eſt quantitas, ſed modus quantitatis ; cum enim curvitas non ſit quantitas , cur inclinatio ſit , quæ ab illa non magis differt ; quam inflexio , & fractio? Deinde ſi angulus eſſet quantitas , foret vel linea, vel ſuperficies , vel corpus. Non eſſe lineam , aut corpus patet. Sed neque ſuperficies eſt ; ea enim ablatione partium.... minuitur , non angulus. Neque poteſt dici angulum eſſe ſuperficiem indeterminatam , cum angulus quilibet determinatus ſit.* 2. *Quoniam anguli non ſunt quantitas, ſed modus quantitatis , eorum inter ſe comparatorum relatio non eſt æqualitas & inæqualitas, ſed ſimilitudo & diſſimilitudo.* 3. *Cum anguli inter ſe comparati æquales dicuntur aut inæquales , non aliud intelligi poteſt, quam eos ſimiles eſſe inter ſe & diſſimiles. Maluit tamen Euclides æquales & inæquales dicere ob multas horum terminorum in angulis rectilineis commoditates. Quem proinde loquendi modum etiam nos retinebimus.* Quo loco antequam reliqua auctoris exſcribam verba , moneo angulum rectilineum alii rectilineo angulo potuiſſe a veteribus dici æqualem , majorem , aut minorem , non quia ipſe per ſe ſit affectionum quantitatis capax , ſed propter circuli arcum aut partem areæ circularis ejus lateribus comprehenſam. Nam cum ab antiquiſſimis temporibus rectilinei anguli diviſio in circulo fuerit inſtituta, eorum latera congruere veteres Geometræ animadverterunt , quando æqualem arcum circuli complecterentur , atque ideo æqualem areæ circularis partem abſcinderent; ea vero nequaquam congruere , cum majorem , aut minorem , ſive arcum ſive aream comprehenderent , tantumque a mutua congruentia abeſſe , quantum arcus , aut area unius arcu , aut area alterius major , aut minor foret. Quamobrem quantitas tota & ejus affectiones angulo tributæ non in inclinationem , quæ eſt ejus eſſentia , ſed in arcum aut aream comprehenſam , cum duorum angulorum latera æqualia ſumuntur , conveniunt, & quotieſcumque quantitatis aliquid angulis datur, arcus & areæ comprehenſæ mente ſubſtituendæ ſunt, ut verum ac poſſibilem ſenſum theorematis

L 4 accom-

accommodemus. Quod in multis univerſæ Matheſeos partibus faciendum eſt; cujus rei unum inter infinita affero exemplum in æquatione parabolæ; nam ſi y & v ſint ordinatæ, x & z abſciſſæ, quæ ordinatis reſpondent, ita Geometræ ratiocinantur.

$y^2 : v^2 = x : z$, & extrahendo radicem

$y : v = \sqrt{x} : \sqrt{z}$

Quis non videt radices x, & z, quæ rectæ ſunt, exſtare non poſſe, atque ideo alia ratione, ſi fieri poteſt, ultimam æquationem intelligi oportere? Scilicet inter x, & z media proportionalis v invenienda eſt, & in æquatione ſubſtituenda. Erit enim

$y^2 : v^2 = x : v$.

4. *Similes porro anguli* (pergit auctor) *ſunt, quorum ambo latera ſuperimpoſita congruunt. Diſſimiles quorum non congruunt latera. Angulus enim nihil eſt alìud quam inclinatio linearum alterius ad alteram. Ergo ſimiles anguli ſunt inclinationes linearum ſimiles. Non ſunt autem inclinationes linearum ſimiles, niſi ambæ ſibi mutuo impoſitæ congruant. Ergo ſimiles anguli ſunt, quorum congruunt latera, diſſimiles, quorum non congruunt.* 5. *Itaque manifeſtum eſt nullum angulum curvilineum æqualem dari poſſe ulli angulo rectilineo. Nam æqualitas angulorum non aliud eſt quam ſimilitudo (per concl.* 2. *&* 3. *) ; ſimilitudo angulorum eſt ſola linearum congruentia (per concl.* 4. *) ; laterum congruentia haberi nequit, dum angulus curvilineus imponitur rectilineo. Ergo &c. Fallitur ergo Proclus, dum deſcriptis æqualibus ſemicirculis ita ratiocinatur. Æqualium ſemicirculorum anguli E A D, C A B* (Fig. 5.) *æquales ſunt. Ergo ſi his addatur communis angulus C A D, erit angulus E A C curvilineus æqualis rectilineo D A B. Fallit ne ergo axioma, ſi æqualibus addas, vel demas æqualia, tota vel reliqua erunt æqualia? Nequaquam; hoc enim ad res quantas ſolum pertinet; anguli autem quanti non ſunt. Axioma ut in angulis valeat, ita formari & intelligi debet. Similes anguli ſi apponantur ſimilibus angulis, ſimiliterque poſitis, qui tum orientur, erunt ſimiles. At Proclus comparat quidem angulos ſimiles, ſed communis, qui utriſque additur, cum ab una parte habeat latus rectum, ab altera curvum, diſſimiliter utriſque additur.* 6. *Quare cum tota eſſentia anguli ſit linearum ſe tangentium inclinatio, non erit unus angulus pars alterius; una ſiquidem inclinatio pars alterius inclinationis non eſt, neque angulus auferri ab angulo poterit; inclinatio ſiquidem una auferri nequit ab altera &c. Hæc enim non laterum inclinationibus, quæ quantitas non*

ſunt,

Digitized by Google

ſunt, ſed ſuperficiebus inter latera conſtitutis conveniunt.

2. Et poſt aliqua, quibus explicat quomodo locutiones Geometrarum circa angulorum collationem accipi debeant, ita hanc materiem concludit. *Itaque angulus contactus neque minor eſt quovis acuto, neque pars eſt anguli rectilinei, neque in rectilineo continetur infinities, immo ne ſemel quidem; nihil enim harum linearum inclinationi poteſt convenire. Si vero non proprie, ſed analogice accipiantur, jam nihil continent, quod a communi ſenſu ac ratione alienum ſit. Sic enim angulum contactus....... eſſe minorem quovis acuto, & ſemicirculi angulum...... acuto omni majorem, nihil aliud ſignificabit quam infra tangentem...... nullam poſſe duci rectam ad contactum, quin ſecet peripheriam. Quæ quidem circuli proprietas eſt omnino digna, quam homines admirentur; eſt tamen ejuſmodi, quam poſſimus intelligere, & quæ nihil cum ratione pugnans involvit.* Hactenus Tacquet, cujus ſententiam mihi videor confirmare poſſe hiſce duobus: primo latera anguli poſſe in infinitum minui, quin vel minimum quidpiam ex angulo decedat: ſecundo nullam figuram rectilineam aut ſolidum pariter rectilineum in tota Geometria alteri eſſe omnino ſimile, quin ſic vulgo appellata æqualitas inter angulos utriuſque intercedat. Horum enim utroque concluditur angulos non eſſe quantitates, altero, quia quælibet quantitas ſaltem infinita detractione partium imminuitur, altero autem, quia conſtat aliunde quantitatis rationem in ſimilitudinis negotio non haberi, & inæqualitatem ſimilitudini perfectæ nequaquam officere. Ceterum neque angulum parabolæ cubicæ poſſe dici infinite minorem angulo Apollonianæ, neque angulum quadraticæ angulo parabolæ cubicæ conſtat ex dictis, quod quantitates non ſunt, & propter differentiam curvitatis ſibi mutuo congruere non poſſunt. Quamobrem iis quantitates infinite parvæ non deſignantur, ut aliqui contendebant.

3. Neque dixeris prope verticem rectam inter utrumque latus interceptam eſſe infinite parvam: nam hanc rectam prope verticem vel ſumis ad diſtantiam infinite parvam, vel ad finitam. Si primum, eſſe infinite parvam aſſentior, ſed nego conſtare ab aliquo ſumi poſſe prope extremam lineam quantitatem ejus infinite parvam; neque id aſſumi debet, ſed cum in eodem ipſo cardo noſtræ quæſtionis vertatur, mihi probari, qui certis a Matheſi petitis rationibus id confici nego. Sin vero alterum, interjecta linea S V (*Fig.* 5.) finita erit. Nam ſi deſignari poſ-

ſet

ſet angulus rectilineus V A S infinite minor, in ſenſu tamen ſupra explicato, recta S V quidem ad finitum intervallum ab A vertice latera S A, A V comprehendens infinite parva foret, ut per ſe liquet, & notum eſt omnibus, quos prima calculi infiniteſimalis principia non latent. At non ita ſe res habet in angulo mixto, in quo per infinitas infinite parvas inflexiones & receſſus ab A V fit, ut A S in S finito intervallo ab V diſtet. Quod conſtat etiam ex eo, quia ducta chorda A S angulus V A S finitus eſt, & nonniſi finita baſis S V angulo V A S finito ſubtendi, & latera pariter finita A V, A S complecti poteſt.

§. 68. Reſponſio ad II.

Quocirca ex prima ratione nihil erui poteſt, quo id conficiatur, quod aliqui volunt circa infinite parvas quantitates. Neque ex altera plus colligi poteſt. Nam qua ratione corpus per motum a finita quantitate ad nihil ejuſdem, & a nihilo ejuſdem ad finitam tranſire non poſſe probant, ea nos ſiquæ vis in illa eſt, ab infinite parva quantitate ad finitam, aut a finita ad infinite parvam tranſire minime poſſe oſtendi contendimus. Nam etiam inter finitum, & infinite parvum infinitum eſt intervallum. Quod ſi in Adverſariorum ſententia per hanc infinitam inter utrumque quantitatum genus diſtantiam non ſtat, quominus a finita quantitate ſpatii ad infinite parvam corpus tranſmigret, neque eadem diſtantia impedimento erit, quominus corpus a finita ſpatii parte ad finem ſive nihil ſpatii, & a nihilo ſpatii ad finitum ſe transferat.

2. Sed ut objectam difficultatem prorſus diſſolvam, ajo ex materiæ extenſæ in infinitum diviſibilitate id unum perſpicue conſequens eſſe poſſe Deum, antequam corpus ſpatii finem attingat, videre & deſignare quaslibet corporis a fine in infinitum minores diſtantias, v. gr. diſtantiam æqualem $\frac{1}{1000}$ ſpatii, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{100000}$, $\frac{1}{1000000}$, $\frac{1}{10000000}$ &c. in infinitum, non vero liquido concludi unam aliquam, quæ ſit vere infinite parva, cognoſci & determinari poſſe ab eodem, tametſi omnipotenti Deo: item a principio motus facere poſſe, ut corpus ſolum percurrat $\frac{1}{1000}$ ſpatii, vel $\frac{1}{10000}$, vel $\frac{1}{100000}$, vel $\frac{1}{1000000}$ &c. uſque in infinitum, ac tum quieſcat, non autem ut vere ſolum unam tantum infinite parvam conficiat atque ſuo motu deſignet. Nam prius

par-

partis infinite parvæ poſſibilitas oſtendenda eſt, quam illius aut cognoſcendæ, aut deſignandæ poteſtatem Deo tribuamus. Quod ſi quis rationem a motu corporis ſumtam pro ſententia infinite parvorum nimis urgere velit, dico ea potius confici, quod in ſuperioribus objectum fuit, vera puncta omni prorſus extenſione carentia, aut lineas latitudinis expertes percurri a corporibus, dum moventur, quam partes ſpatii infinite parvas. Quod cum inde inferri non poſſit, ut §. 47. docuimus, multo minus per motum in ſpatio deſignari partes infinite parvas inde concluditur.

§. *69*. Reſponſio ad III.

Tertia reſtat ratio, quæ fere non indiget ſolutione; nam ea ſine probatione ſibi dari poſtulat, quod in diſceptationem vocatur, arcum AH (*Fig*. 4.) infinite parvum primi gradus, ut inde ad rectam AB infinite parvam ſecundi deſcendat. Data igitur quadam infinite parva primi gradus quantitate facile do alias infinite parvas ſecundi poſſe deſcribi, imo infinite parvas omnium aliorum graduum. Nam circa AB ut extenſam alium circulum duci imaginemur. Cum BA ſit extenſa, ideoque & circulus, in infinitum dividi poterunt; unde conſequitur hujus circuli partem infinite parvam aſſumi poſſe circa verticem A, ex cujus partis altero extremo ſi ſinus ad diametrum ducatur, diametrum in duo ſegmenta diſpectam habebimus, cujus alterum ſegmentum, quod jam oſtenſum eſt infinite parvum ſecundi gradus, ita erit ad ſinum, ut ſinus ad alterum ſegmentum, ſive ad ſinum verſum. Quare ſinus erit quantitas infinite parva tertii, & ſinus verſus infinite parva quarti. Quod ſi circa hunc alium ſinum verſum circulum deſcribamus, & ita porro id infinitum circa omnes alios ſinus verſos id faciamus, quantitates infinite parvas cujuſdemumcumque gradus habuerimus. Idem eruitur ex ſupra allato exemplo de infinitis parabolis, §. *66*. num. 1. quæ ſe in vertice contingant, & eamdem tangentem habeant. Nam ſi mihi concedas ad diſtantiam infinite parvam a vertice & ab axi poſſe duci rectam axi parallelam, quæ in tangentem incidat, rectas infinite parvas cujuſcumque gradus tibi evidenter monſtrabo. Nam recta intercepta inter arcum parabolæ Apollonianæ, & tangentem cum in diſtantia infinite parva a vertice anguli angulum infinite parvum ſubtendat, erit infinite parva ſaltem primi gradus. Recta vero intercepta inter eamdem tangentem, & arcum infinite parvum parabolæ cubicalis

calis erit infinite parva ſecundi, eo quod ſubtendat angulum, qui angulo contactus parabolæ Apollonianæ infinite minor eſt. Et ita deinceps omnes aliæ rectæ inter tangentem & arcum alterius ſuperioris parabolæ in infinitum erunt infinite minores rectis interpoſitis inter tangentem & arcum parabolæ uno gradu inferioris. Neque inflexio unius lateris anguli contactus eam difficultatem facere poteſt, quam ſupra movimus, §. 67. ſub finem; quod hic pars curvæ inter verticem & baſim interpoſita, utpote quæ infinite parva ſumta eſt, pro recta haberi poteſt, quæ infinite parvam inflexionem, ideoque nullam habet. Quamobrem quemadmodum ſi ſeries angulorum rectilineorum daretur ſimilis ſeriei angulorum contactus in parabolis, latera etiam ad finitam diſtantiam omnibus hiſce angulis ſubtenſa eſſe omnium graduum infinite parva demonſtrarentur, §. 67. ſub finem; ita latera ad infinite parvum ab angulorum contactus vertice intervallum ducta ſeriem infinite parvorum omnium ordinum in infinitum faciunt, proptereaquod cum curva infinite parva loco rectæ queat haberi, illi anguli pro rectilineis infinite parvis in infinitum ſumi poſſent. Unde facile concedo, ut dixi, a data quadam infinite parva quantitate primi gradus ad alias omnes minimas cujuſcumque gradus poſſe perveniri; nego tamen liquidum eſſe primam hanc quantitatem poſſe deſignari, & ex circulo arcum infinite parvum abſcindi. Nec enim quidpiam etiamnum ad id conficiendum idonei fuit allatum. Quare poſſe exſiſtere infinite parva ſecundi gradus, tertii, quarti &c. in infinitum non abſolute certum eſt, ſed hypothetice tantum, nimirum ſi infinite parvum primi gradus haberi queat.

ARTICULUS II.

Objecta adverſus calculum differentialem; exponitur ſententia Wolphii, & Corradi, & circa infinite parva alia proponitur.

§. 70. Objectio

At enim ſi hæc ita ſe haberent, quæ fides habenda foret principiis calculi integralis atque differentialis, qui in hiſce quantitatibus infinite parvis toti poſiti ſunt. Conſequeretur enim nihil hac methodo certo & abſolute monſtrari, ſed in illa tan-

tantum incerta hypotheſi, ſi quantitates infinite parvæ dari poſſunt, & ſi ex iis quantitas coaleſcit. Quod quantum univerſæ Matheſi incommodum ſit, nemo eorum non videt, qui in his calculis verſati compertum habent eorum adminiculo pulcherrimam hanc Diſciplinam eo perveniſſe, quo perventuram aliquando nulla humana mens nedum ſperare, verum nec imaginari poterat.

§. 71. Reſponſio

Cl. Wolphius initio Analyſ. Inf. §. 5. Elem. Math. Tom. I. hæc certitudini calculi infinitorum obeſſe non putat. Negat enim infiniteſimas & infiniteſimarum infiniteſimas pro entibus realibus haberi poſſe, atque in hoc ipſo auctorem ipſummet calculi Infiniteſimalis Auctorem ſe habere fatetur. Vult itaque nomen infiniteſimæ eſſe relativum, ſcilicet relationem includere ad aliam quantitatem, cujus reſpectu infiniteſima dicitur, idque his declarat exemplis. In dimetienda altitudine montis ſive adhæreat monti pulviſculus, ſive avolet, perinde eſt; ejus enim magnitudo ratione habita altitudinis montis pro nulla habetur, atque ideo computanda non eſt; ſin autem comparetur cum iis exiliſſimis animalculis, quæ ope microſcopii detegimus, pro infinite magna haberi poteſt. Similiter in Aſtronomia diameter Telluris putatur punctum, ſeu infinite parva reſpectu diſtantiæ fixarum; idem enim motus primus obſervaretur, ſi revera tellus inſtar puncti foret. Eadem tamen eſt infinite magna reſpectu altitudinis montium in dimetiendis lunaribus ecclypſibus; nam eædem apparerent, ſi terræ ſuperficies eſſet æquabilis, uti in ſphæra eſt, nulla parte illius ſupra alias exſtante. Ex quibus Wolphii exemplis apparet continua diviſione cujuslibet quantitatis in partes veniri poſſe ad aliquam ejus partem ita parvam, ut reſpectu totius pro nulla haberi poſſit, atque ideo dici quodammodo infinite parva, tametſi revera non ſit. Unde quantitatum infinite parvarum poſſibilitas, ideoque calculi differentialis & integralis certitudo deducitur.

2. Verum nec puto talem eſſe Cl. Auctoris mentem, ut ex tota ejus Analyſi concludi poteſt, nec ita explicata natura quantitatum infinite parvarum calculi infiniteſimalis demonſtrationes rigorem geometricum tueri. Sit enim linea curva ASE, (*Fig. 6.*) cujus axis AC, & abſciſſa $AB = x$, ordinata $BS = y$; ſumpta deinde BC infinite parva, ideoque =

dx

dx, ducatur alia ordinata CE infinite proxima, & ex puncto S recta perpendicularis SD = BC = *dx*. Jam vero ex analyſi conſtat, neglecto parvo triangulo ESD tamquam infinite parvo reſpectu parallelogrammi SBCD = *ydx*, idem parallelogrammum *ydx* eſſe elementum ſpatii ABS, ſcilicet ſpatium ABS eſſe æquale infinitis indeterminatis parallelogrammis *ydx*, quorum ſumma proinde colligi debet, ut curva quadretur. In hac autem ſumma ſemper negliguntur parva triangula ſimilia triangulo ESD. Fac igitur nunc BC non eſſe vere infinite parvam, ſed ſolum reſpectu AB uti pulviſculus reſpectu altitudinis montium. Primo inde ſequetur ſolum finities eam in AB contineri, quemadmodum numerus aliquis finitus granorum pulviſculo æqualium altitudinem montis exæquat; quod cum primo hujus calculi pugnat principio. Deinde etiam triangulum ESD ut lineis finitis SD, ES, ED conſtans finitum erit, & aliquam licet exiguam tamen finitam partem rectangulo SDCB adjiciet. Quamobrem exacte & geometrice verum non erit ſpatium curvæ BSEC eſſe æquale rectangulo SDCB, & multo minus totum curvæ ſpatium ASB eſſe æquale ſummæ omnium rectangulorum tantum, neglectis triangulis, proptereaquod fieri poteſt, ut propter majorem lineæ prope verticem A curvitatem triangula multo majora fiant, tametſi rectangulis ejuſdem altitudinis BC reſpondeant. Nullo igitur modo BC & aliæ quantitates minimæ in hoc calculo ſumi poſſunt ipſæ in ſe finitæ, & in finitis finito numero contentæ, & relate ſolum ad alias infinite parvæ in eo ſenſu, quo pulviſculus habita ratione altitudinis montis, & diameter telluris habita ratione diſtantiæ fixarum infinite parvæ appellantur. Præterea in Trigonometricis & in Aſtronomia Phyſica & in aliis mixtis Matheſeos partibus in diſtantiis & quantitatibus dimetiendis, quatenus in ſenſus incurrunt, etiam minimæ, ſed finitæ quantitates pro nullis haberi poſſunt, atque ideo inſtar vere infinite parvarum putari, quod in nullum ſenſibilem errorem inducunt. At in Matheſi pura, uti eſt Geometria plana & ſublimior, in qua quantitas abſtracte & præciſe ſummo jure conſideranda eſt, nulla quantitas finita quantumvis exigua reſpectu alterius finitæ pro nulla atque ideo pro infinite parva haberi debet. Igitur denuo patet quantitates infinite parvas Analyſis infinitorum multum diſcrepare ab infinite parvis, quas Wolphius in exemplum attulit, ſcilicet eſſe debere exacte infinite

nite parvas. Quomodo ergo certus erit calculus, qui circa eas verſatur, ſi de illarum poſſibilitate non conſtat?

3 Hoc vero eſt, quod nunc docere aggredimur initio a quantitatibus radicalibus facto. Cum Geometria forte incidit in radices earum quantitatum, quarum radix eſſe non poteſt, non intelligit eas radices, quæ minimum abſint a veris, quæque per notam approximationis methodum haberi poſſunt. Hoc enim pacto ſi illas acciperet, non exactam, ut ſibi propoſitum eſt, ſed mechanicam & ad veram proxime accedentem æquationis demonſtrationem afferret. Unde cum, ex. gr. in æquatione parabolæ concludit ordinatas eſſe, ut abſciſſarum radices ſcilicet $y : v = \sqrt{x} : \sqrt{z}$ (§. 67. ſub finem) accuratiſſimas earum radices, quales ſunt in numeris 16. & 4. accipi vult, ut ſuum in demonſtrando rigorem teneat. Quamobrem cum hujuſcemodi radices eſſe non poſſint, propoſitionem hanc non ut abſolute veram, ſed tantum ut hypothetice obtrudit. Scilicet ſi ab abſciſſis x & z radices extrahi queunt, foret $y : v = \sqrt{x} : \sqrt{z}$
proptereaquod ex æquatione parabolæ conſtat eſſe $y^2 : v^2 = x : z$. Qui ergo fit, ut ex hiſce conditionate veris enuntiationibus abſolute veras eliciat? Hoc pacto. Vel aliqua ex notis methodis facit, ut radicales evaneſcant, vel ſenſui imaginario & impoſſibili ſenſum realem atque poſſibilem ſubſtituit, vel ſi neutrum facere poſſit, rem ad ſeriem infinitam reducit. Unde ſi in aliqua computatione inciderit in hanc analogiam $y : v = \sqrt{3} : \sqrt{7}$, vel ad quadratum elevat, & inde concludit

$$y^2 : v^2 = 3 : 7$$

quod veriſſimum eſt, tametſi æquatio, unde hæc alia oritur, ſit tantum hypothetice vera, vel pro 3 & 7 ſubſtituit rectas x & z, quarum altera trium, ex. gr. palmorum, altera ſeptem, interque illas mediam proportionalem m, quod fieri poteſt, invenit, ac tum veluti abſolute verum pronuntiat

$$y : v = x : m$$

unde etiam æquationem modo inventam ſummo jure eruere poteſt $y^2 : v^2 = x : z = 3 : 7$.
Simile quid Geometræ præſtant in calculo differentiali & integrali. Quantitates infinite parvas in ſenſu rigidiſſimo accipiunt, ne quid geometricæ diligentiæ ob allatam ſupra rationem in demonſtrando deſideretur. Quamdiu illæ comparent, nihil ſe putant afferre niſi hypothetice verum ac certum, hypothetice inquam,

propte-

proptereaquod inter infinite parva ejuſdem gradus duarum quantitatum poteſt eſſe eadem ratio, quæ inter illas duas quantitates, ex quibus oriuntur, intercedit. Nam ſi infinite parva oriri intelligantur continua diviſione in infinitum duarum quantitatum in ſuas medietates, & ſingulæ medietates finitæ unius ad ſingulas medietates alterius, quæ æqualiter abſunt ab unitate, ſive ſunt partes ſimiles, eamdem rationem habeant, ac tota, cujus ſunt partes, idem profecto convenire concluditur in medietates, ſive partes infinite parvas ejuſdem gradus, quæ ob infinitam ejuſdem gradus diſtantiam æqualiter ab unitate, ſive a ſuo toto abeſſe intelliguntur. Unde hypothetice verum eſt, ſi duarum quantitatum infinite parva haberi poſſint, inter illa eadem ratio intereſt, quæ inter quantitates, unde proficiſcuntur, niſi aliter fieri oportere lex poſtulaverit, juxta quam abſciſſæ & ordinatæ progrediuntur.

§. 72. Definitiones

Quod ut dilucide exponam in gratiam præſertim tyronum, quibus id ante explicandum foret, quam ad hujuſmodi calculos ſe conferrent, primum ajo diſcrimen aliquod eſſe inter differentialia, & quantitates infinite parvas non quod attinet ad ſubſtantiam, proptereaquod etiam differentialia ſunt quantitates infinite parvæ, ſed quod ad modum, quo generari intelliguntur; nam quantitates infinite parvæ exſiſtere percipiuntur ex cujuſdam finitæ quantitatis in infinitum partitione, ut in ſuperioribus explicatum eſt, differentialia vero ex motu puncti, lineæ, ſuperficiei per tempus infinite parvum, quo lineæ ſuperficies & corpora finita augeri, vel minui intelliguntur. Quod nunc dilucidius expono. Cum ex objectis ſupra propoſitis & ex eorum refutationibus §. 68. conſtet in motu corporis a principio ad finem cujuſcumque ſpatii percurſi poſſe ab eodem initio ſaltem a Deo deſignari mediam ſpatii partem, quam percurrit, & pariter mediam partem temporis, quod in ea percurrenda inſumit, ſi motus eſt ejuſdem ſemper velocitatis, vel ſaltem aliquam partem, ſi diverſa celeritate corpus fertur, item $\frac{1}{4}$ ſpatii & temporis, item $\frac{1}{8}$, & ſic in infinitum, vel in eadem proportione, vel in diverſa; hac in infinitum diviſione tum ſpatii tum temporis fit, ut imaginari poſſimus tandem perveniri ad partem temporis infinite parvam, qua corpus a principio ſolum partem ſpatii infinite parvam confi-

conficiat. Cum vero aliunde conſtet ductu puncti lineam, ductu lineæ ſuperficiem, ductu denique ſuperficiei corpus oriri; hinc hujuſmodi finitæ quantitates & aliæ omnes, quæ motu perficiuntur, aut in tempore fiunt a principio ſolum partibus infinite parvis in tempuſculis pariter infinite parvis augeri, aut imminui percipi queunt. Hæc autem ſunt differentialia; nimirum infiniteſimæ tunc ſunt quantitates differentiales, quando ſpectantur, ut differentiæ duarum quantitatum, quarum altera alteram excedit ſolum quantitate infinite parva, quæ quantitates exprimuntur littera d quantitati finitæ præfixa; unde ſi x ſit finita, erit dx, vel $-dx$ quantitas infinite parva; $x+dx$, ſi quantitates creſcant, vel $x-dx$, ſi minuantur, erit quantitas ex finita & ex infinite parva coalita. Unde conſequens eſt, quod communiter monent Auctores, non quantitates, ut vocant, conſtantes, quæque eædem manent, & primis alphabeti litteris deſignantur, ſed ſolas variabiles, quæ ultimis exprimuntur, habere hujuſmodi differentialia, quibus tempuſculo augentur. Quamobrem differentiale quantitatis $a+x$ eſt $= dx$.

§. 73. Problema

Hoc conſtituto ſic procedunt ad inveniendam duarum quantitatum, quarum altera in alteram ducitur, differentiam, quæ a nobis examinanda eſt ob quamdam, de qua mox dicetur, inter Auctores controverſiam. Itaque (*Fig. 7.*) ſit ACDB rectangulum ex $AC = x$ in $AB = y$. Si percipiamus latus utrumque augeri quantitate infinite parva ſcilicet $AL = dx$, & $DE = dy$, rectangulum minus CABD abit in majus CLGE, ſive augetur quantitate infinite parva. Quamobrem differentiale ipſius xy eſt differentia inter rectangulum utrumque, ſive hoc differentiale eſt = tribus parallelogrammis, quorum primum fit ex $AB = CD = y$ in $AL = dx$, ideoque $= ydx$, alterum ex $BD = AC = x$ in $DE = dy$, ſive eſt $= xdy$, tertium ex $BH = LA = dx$ in $BF = DE = dy$, ſive eſt $= dxdy$. Unde quæſitum differ. eſt $= xdy + ydx + dxdy$. Sed $dxdy$ pro nullo habetur, ſi cum $xdy + ydx$, vel cum alterutro eorum conferas: propterea quod cum xdy, $dxdy$ ſint duo rectangula, quorum eſt eadem altitudo dy, erunt inter ſe ut baſes dx, & x; eſt autem dx infinite parva reſpectu x; ergo etiam rectangulum $dxdy$ erit infinite parvum reſpectu xdy, ideoque pro nullo habendum eſt. Igitur diff. xy tandem erit =

$xdy + ydx$. Quod erat oſtendendum, quodque eſt fundamentum, unde modus ducitur inveniendi differentiam omnium aliarum quantitatum, ſive quæ ſe mutuo multiplicant, ſive quæ ſe mutuo dividunt.

2. Ab his diſſentit, quod tamen attinet ad rationem, cur $dx.dy$ negligatur, Doctiſs. Dominicus de Corradis (in libello Italico de Calculo Diff. & Integ. num. 23. & ſeq. part. 1.) quem honoris cauſſa nomino. Is primum ſtatuit quantitates, quæ augentur, aut minuuntur, primo tranſire ad aliquam quantitatem ita continentem & proximam, ut nulla earum, ad quas tranſeunt, ea minor eſſe intelligatur, num. 11. citati libri. Deinceps hinc colligit differentialia, ſive elementa non eſſe abſolute infinite parva, ſed habita tantum ratione quantitatis, cujus elementa ſunt, ita ſcilicet ut quodcumque elementum, ſi ad ſuam variabilem primam referatur, ſit illa minima quantitas, qua minor variabili primitivæ addi, aut detrahi nequeat, quo variabilis contigua & proximior formetur, num. 17. Tum ex his concludit differentialia eſſe *una vera parte, ed aſſoluta, ed eſiſtente in quell' eſſere, che compete alla quantità conceputa, e veramente fatta della variabile contigua, e non già zero, o in atto di farſi*, num. 23.

3. Deinde monet tamquam rem in calculo differentiali potiſſimam hæc elementa, ex. gr. dy eſſe fractiones unitate minores, idque in hunc fere modum probat. Cum dy relata ad y ſit minima quantitas earum, quæ in acceſſionibus, aut deceſſionibus y dari poſſint; diviſa y per dy erit quotiens $= q$ maxima quantitas, quæ exſiſtere poſſit ex qualibet alia diviſione y per quamlibet aliam quantitatem, quæ afferri poſſit diverſa a dy. Quod in gratiam Tyronum ita explico. Quo minor eſt diviſor, eo major eſt quantitas ex diviſione orta; proptereaquod dividendo, ex. gr. 4 per $\frac{1}{8}$, regulæ communes algebræ litteralis docent 4 multiplicandum eſſe per 8, & facto ſubſcribendum 1; unde 4 diviſus per $\frac{1}{8}$ fit $= \frac{32}{1} = 32$. Cum ergo dy ſit $= \frac{1}{\text{infiniteſima}}$ y erit $\frac{y}{dy} =$ quantitati infinitæ, ideoque maximæ, quæ ponatur q. Hinc pergit auctor. Fac $dy = \frac{b}{c}$. Erit ergo $\frac{y}{dy} = \frac{cy}{b} = q$, & $\frac{c}{b} = \frac{q}{y}$, & $\frac{b}{c} = \frac{y}{q}$.

Cum

Cum igitur q ſit majus y, $\frac{y}{q}$, ideoque æquale $\frac{b}{c}$, & æquale dy, erit fractio, & ea unitate minor. Poſtremo propius accedens ad id, cujus gratia hæc attulimus, ex conſtitutis conficit, ſive dy in dx, aut in ſe ipſum aliquoties ducatur, erit tum dy^2, tum $dydx$ minus, illud dy, hoc vero tum dy, tum dx; propter eaquod fractiones unitate minores ſive in ſeipſas, ſive in alias fractiones ducantur, earum factum eſt minus ſingulis quantitatibus, ex quibus exſiſtit. Quoniam vero habita ratione variabilis y minus elementum quam dy inveniri non poſſe ex dictis concluditur; hæ quantitates minores $dydx$, vel dy^2, ſive generatim dy^m eſſe non poſſunt, & propterea quoties in calculo fiunt obviam, delendæ ſunt, idque ob hanc præciſe, &, ut ajunt, formalem rationem, quod utpote minores dy & dx minimis omnium, quæ eſſe poſſunt, exſtare nequeunt.

4. Denique impugnat id, quod omnes Algebriſtæ ſentiunt, ſcilicet $dydx$ eſſe infinite parvum ordinis inferioris, ſi cum dy, & cum dx conferatur, & ideo deleri oportere, & ait *cc.* Hoc ratiocinio me omnino premi mihi non videor, propterea quod ipſum per ſe planum eſt ddy utpote differentiale dy eſſe illo minus, ſed $dydx$, vel dy^m eſſe minora, & multo minus ad gradum inferiorem redigi ſine ratione non conſtat „

5. Sed pace tanti viri, cui plurimum hiſce in rebus tribuo, dico ratione, qua homo exponit infinite parva, nec vitari propoſitam in ſuperioribus difficultatem, nec efficaciter refelli ſententiam communem circa rationem nonnullas in calculo differentiali quantitates interlinendi. Ad primum enim quod attinet, quotusquiſque metaphyſicus ei dabit ut certum & exploratum ſubjectam calculo materiam eſſe *realiſſimam & neceſſario exſiſtentem*, ut ejus verba num. 28. ad litteram in latinum transferam, dum vult eam eſſe poſitam in acceſſionibus & deceſſionibus, quibus minores afferri nequeunt, cum quantitas alia ad aliam proxime continentem pertranſit? Quis tamquam certum & exploratum aſſentietur inter omnes quantitates, ad quas alia tranſit, unam aliquam definiri poſſe, quæ ſit minima omnium earum, in quas migrat? Hæc enim duarum quantitatum, quæ ſibi contiguæ ſunt, differentia eſt ne in ſua quantitate variabili aliquoties contenta, vel infinities? Si aliquoties, aliæ in infinitum minores afferri poterunt; præterquamquod utpote finita incurrit in difficultates ſupra expoſitas, dum exempla a Wolphio allata ad

 tru-

trutinam revocaremus, §. 71. Si infinities, ejus exſiſtentia realis, ſive in diviſione quantitatis, ſive in motu corporum conſideretur, iiſdem premitur difficultatibus, quibus omnia infinite parva eſſe obnoxia monſtravimus.

6. Quod vero ad alterum pertinet, primum ajo multiplicatione fractionum unitate minorum, ſi hæc in extenſa quantitate ſpectetur, quomodo in calculo differentiali ut plurimum conſideratur, non fieri quantitatem minorem ſingulis fractionibus, ſed illa quantitate, quæ exſiſteret multiplicando totum, ſive denominatorem alicujus fractionis per ſe, vel per totum, ſive denominatorem alterius. Nam ſi $\frac{1}{4}$ rectæ quatuor palmorum in ſeipſam ducamus, quadratum fit nec minus, nec æquale, nec majus illa $\frac{1}{4}$, propterea quod quadratum cum recta in ratione æqualitatis aut inæqualitatis conferri non poteſt, ſed quadratum exſiſtit ſexdecuplo minus quadrato, quod multiplicatione rectæ totius 4. palmorum in ſeipſam producitur. Hoc conſtituto ajo ab Algebræ auctoribus $dydx$ parallelogrammum non dici minus lineola dx, aut dy, ut is tribuere hominibus videtur, propterea quod nec majus, nec æquale eſſe poteſt, ſed minus rectangulo xdy, aut ydx facto ex finitis x, aut y ductis in infinite parva dy, vel dx. In quo non video quid ſit quod pugnet vel cum ipſamet hominis poſitione. Ex eo enim quod ponat dy eſſe minimam omnium earum quantitatum linearium, quæ y addi, aut detrahi poſſunt, ſequitur ne etiam rectangulum factum ex dy in aliquam finitam x eſſe minimum omnium, quæ fieri poſſunt, cum in eadem hypotheſi ſiſtentes rectangulum ex lineola dy in aliam lineolam dx minus eſſe ipſiſmet oculis videamus? Quod eo nititur, quia ſemel admiſſa quantitate extenſa ſimul & infinite parva primi gradus aliæ omnes infinite parvæ omnium graduum neceſſario admittendæ ſunt, §. *66.* & *69.* & illæ eædem earumque potentiæ una conferri poſſunt, perinde ac aliæ omnes quantitates finitæ, hoc tamen notato diſcrimine, quod ſi compararetur quidem unum infinite parvum cum altero infinite parvo ejuſdem gradus, habenda ratio eſt etiam differentiæ finitæ ut in quantitatibus vulgaribus, utrum videlicet aliud alius duplum, triplum &c. ſit; at ſi finitum cum infinite parvo primi gradus, aut infinite parvum cujuſdam gradus cum infinite parvo alterius conferatur, nulla habenda ratio eſt fini-

finiti diſcriminis , ita ut finitum ad infinite parvum ita ſe habeat, uti quælibet pars finiti , v. gr. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ &c. ad idem infinite parvum , & e contrario. Cujus ratio ducitur ex ipſa notione quantitatis , quæ aliam infinities ſuperet , cujus proinde quælibet pars finita , v. gr. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ &c. aliam infinities excedere debet perinde ac totum, unde illa pars detracta eſt. Aliter enim nec totum infinities majus foret.

7. Ut hæc infirmet auctor laudatus , duo genera diſtinguit multiplicationum , num. 26. quorum altero quantitatis eadem ſpecies ſervatur, altero quantitas ab alia ad aliam ſpeciem tranſit; primo vera multiplicatio non fit, ſed additio; altero autem quantitas vere multiplicatur , & paucis interjectis hæc ſubjicit. *Ciò premeſſo , veniamo al caſo. Quando per avere la differen. di* (y + d y)^2 *io debbo moltiplicare* y + d y *per* y + d y , *io non cerco già il prodotto di queſte due quantità , ma cerco unicamente qual ſia l' aumento della variabile* y *paſſante nella ſua contigua* y + d y *nel caſo , che in vece di eſſerci ſtata propoſta la ſemplice* y , *ne ſia ſtata eſibita la ſua qualunque dignità* y^m , *e nel preſente caſo* y^2. *Ciò dunque che da queſta moltiplicazione mi riſulterà , dovrà mantenerſi nella ſua ſpezie , dovendo , com' è viſibile , eſſere della medeſima ſpezie di* y , *giacchè dee eſſere il di lei aumento. Non abbiamo quì dunque fatta una moltiplicazione , ma un' addizione , e però non ſuſſiſte, che* d y^m, *ne che* d y^m d u^m *ſieno piani , o ſolidi , giacchè non poſſono mutare ſpezie .*

8. Miror præſtantiſſimum Geometram non advertiſſe , cum quæritur differentiale y^2, aut yx , non quæri nec productum totius $y + dy$ in $y + dy$, vel in $x + dx$, nec augmentum ſolum variabilis y ad ſuam contiguam $y + dy$ tranſeuntis; hoc enim augmentum jam inventum eſt, ſcilicet dy , nec augmentum duarum y, y, vel y, x, quatenus ſeorſim ſpectantur, proptereaquod etiam hoc inventum eſt $= dy + dy$, vel $dy + dx$; ſed inquiri incrementum yy, vel yx, quatenus altera in alteram ducitur, ſive differentiam, quæ inter rectangulum yy, vel yx & inter rectangulum , quod fit ex $y + dy$ in $y + dy$, vel in $x + dx$, intercedit, quæ differentia nequit eſſe quantitas ejuſdem ſpeciei ac rectæ y, vel $y + dy$; nam quemadmodum yy , & $(y + dy)^2$ ſunt quantitates alterius ſpeciei ac y, & $y + dy$, ita differentiæ inter y^2, & $(y + dy)^2$ ad ſpecies quantitatis diverſas ab y, & $y + dy$ rediguntur.

Quo funditus ruit quod a Corradi animadverſum eſt.

§. 74. Propoſitio

Jam vero redeamus ad id, quod in ſuperioribus propoſitum eſt, quænam ſcilicet inter differentialia proportio eſſe debeat. Qua in re illud primum ſtatuo, quod cum ordinatæ y, & abſciſſæ x in aliqua curva ita creſcunt, aut minuuntur, ut eadem ſemper æquatio ſervetur, incrementa, aut decrementa infinite parva, ſive generatim differentialia non ipſarum variabilium, ſed duorum terminorum æquationis æqualia ſunt. Sit enim, ex. gr. ordinata y, & illi infinite propinqua $y+dy$, item abſciſſa x reſpondens ordinatæ y, & abſciſſa $x+dx$ primæ infinite propinqua, & ordinatæ $y+dy$ reſpondens. Ex æquatione parabolæ erit quadratum ordinatæ y æquale facto ex quadam conſtante a, quæ eſt parameter, in abſciſſam x, ſcilicet

$$ax = y^2$$

Quare cum eadem æquatio inter omnes alias ordinatas, & abſciſſas ſervetur, creſcent quidem y, & x, ſed non quocumque modo, verum hac certa lege, ut quadratum ordinatæ ſit æquale rectangulo ex abſciſſa reſpondente in parametrum; idque non ſolum cum partes finitæ variabilibus y & x accedunt, verum etiam cum partes infinite parvæ, eo quod nullum eſt vel minimum diametri & curvæ punctum, in quo illa æquatio non ſit. Quibus poſitis cum aliæ contiguæ abſciſſæ & ordinatæ ſint $x+dx$, $y+dy$, conſequens eſt rectangulum factum ex a in $x+dx$ eſſe æquale quadrato $y+dy$, quod antecedenti §. oſtenſum eſt æquale y^2+2ydy. Quamobrem erit

$$ax+adx = y^2+2ydy;$$ hinc cum etiam

$$ax \text{ ſit } = y^2,$$ erit

$$ax : ax+adx = y^2 : y^2+2ydy,$$ & ex communibus Algebræ litteralis regulis

$$ax : adx = y^2 : 2ydy;$$ & alternando

$$ax : y^2 = adx : 2ydy$$

Sed $ax = y^2$; ergo etiam $adx = 2ydy$. Ex quo vides terminos æquationis variabilium eſſe ax, y^2, & differentialia eorumdem terminorum eſſe æqualia. Quod idem oſtendi poteſt de omnibus aliis curvis, quæ ſemper eadem æquatione definiuntur, propterea quod ratio allata in ordinatas & abſciſſas omnium curvarum hujuſmodi quadrat; de qua re quiſque ſi periculum fecerit, ſuis ſe ipſe oculis certiorem faciet.

2. Dices hic; quid fieri oportet, quando alter æquationis termi-

minus nonnullas variabiles habet, alter nullas; in quo proinde nulla eſt quantitas differentialis? Algebriſtæ hoc pacto ſe gerunt, ex. gr. in æquatione hyperbolæ Apoll. intra aſymptotos, quæ talis eſt $xy = a^2$ §. 21. Anal. Inf. Volphii

$$x\,dy + y\,dx = 0 \quad \text{ergo tranſponendo}$$
$$y\,dx = -x\,dy$$

Cujus methodi hanc habe rationem. Sit $AB = x$ (*Fig.* 8.) $AD = y$, & rectangulum $ABCD = xy$ ſit æquale certæ ac definitæ quantitati a^2. Quantitas AB ut variabilis mutetur in aliam finitam, v. gr. in AE, & AD pariter in aliam, v. gr. in AL, ſed ita ut rectangulum $AEHL = xy$ ſemper eamdem quantitatem a^2 exæquet, quemadmodum res contingit in æquatione hyperbolæ Apollonianæ intra aſymptotos. Hoc autem certe fieri nequit, niſi altera earum ut $AB = x$ creſcat, dum altera AD minuitur, & incrementa, & decrementa talia ſint, ut rectangulum BEHI, quod denuo additur, ſit æquale rectangulo ILDC, quod detrahitur. Cum enim quantitas æqualis perſeverat, quantum detrahitur ex altera parte, tantumdem adjici debet ex altera. Intelligantur nunc incrementum BE, & decrementum LD infinite parva; erit nihilominus rectangulum ex $AB + BE$ ſcilicet ex $x + dx$ in $AD - LD$, ſcilicet in $y - dy$, videlicet rectangulum

$$yx + y\,dx - x\,dy = a^2 = xy$$

Quamobrem $y\,dx - x\,dy$ debet eſſe $= 0$. Cum infra rurſus in manus hoc problema ſumemus, difficultatem, quæ hinc oriri poteſt, enodabimus.

3. Atque hoc eſt unum ex præcipuis calculi differentialis principiis in quacumque curva algebraica, quæ una æquatione continetur. Ceterum inde inferri non poteſt, quænam inter ipſa variabilium duarum ejuſdem generis, v. gr. ordinatarum y & v differentialia ratio intercedat, nec ad innumerabilia ſolvenda problemata id ſcire opus eſt. Quod ut teneamus, noſcere primum oportet quanam lege & proportione creſcant, aut imminuantur duæ abſciſſæ, vel duæ ordinatæ. Si enim abſciſſæ in progreſſione aritmetica creſcant, & ordinatæ in geometrica progrediantur, quemadmodum in Logiſtica accidit §. 54. Anal. Inf. Wolphii, tunc omnia elementa abſciſſarum, eſſe æqualia, omnia vero elementa ordinatarum proportione iiſdem ordinatis reſpondere concludere licet. Nam ſint duæ quælibet abſciſſæ x, & z, & illarum contiguæ $x + dx$, $z + dz$. Inter x,

& $x + dx$ erit idem diſcrimen ac inter z, & $z + dz$. Sed hæ differentiæ ſunt dx, & dz. Ergo $dx = dz$. Sed ſi ordinatas vocemus y reſpondentem rectæ x, $y + dy$ reſpondentem $x + dx$, v reſpondentem abſciſſæ z, $v + dv$ abſciſſæ contiguæ $z + dz$, erit ex hypotheſi

$$y : y + dy = v : v + dv. \quad \text{Ergo divid.}$$
$$y : dy = v : dv, \quad \text{\& alternando}$$
$$y : v = dy : dv.$$

Quamobrem ſi y ſit dupla, aut tripla, aut &c. v, etiam dy elementum y erit duplum, triplum, aut &c. dv, quod eſt elementum v. Q. E. O. Unde etiam conficitur in tot curvis, quarum ordinatæ aut abſciſſæ in proportione geometrica non procedunt, earum differentialia ipſis proportione minime reſpondere.

§. 75. Reſponſio ad objecta §. 70.

Quibus omnibus perſpicuum factum eſt, quod ſub finem §. 71. de proportione differentialium monuimus, & via munita ad ſolvendam §. 70. difficultatem. Subtangens in curva algebraica quacumque ita invenitur (*Fig. 9.*). Curvæ AMO ſit ſemiordinata pm alteri PM infinite propinqua. Abſciſſæ AP $= x$ differentiale erit $Pp = dx = MR$, quæ ex puncto M ducatur perpendicularis ad utramque ordinatam $MP = y$, & pm. Ordinatæ vero $MP = y$ differentiale dy erit $= Rm$, quia Rm ob infinite parvam propinquitatem utriuſque ordinatæ eſt differentia inter MP, & mp, & ſane eſt infinite exigua habita ratione MP. Item Mm arcus eſt infinite parvus, ſi conferatur cum MA, quod utrumque profecto conſequitur ex primo, quod aſſumſimus, diſtantiam earumdem eſſe infinite parvam. Ducatur nunc ad punctum M tangens TM, & producatur in Q. Dico eam congruere cum arcu Mm infinite exiguo. Quod etiam ex primo aſſumto conſequens eſt. Nam etſi revera non congruunt, quod recta & curva in uno tantum puncto inextenſo M ſe contingunt, §. 18. atque ideo extra punctum m, tamen ob infinite parvam tum declinationem rectæ Mm, & arcus Mm, tum longitudinem utriuſque in re præſenti perinde eſt, ac ſi exacte congruerent. Siquidem ita ratiocinantur. Quia triangula rectilinea MmR, & TMP ſimilia ſunt, erit $Rm : MR = PM : PT$

$$dy : dx = y : \frac{y\,dx}{dy}$$

Jam

Jam vero Rm ſive ducatur uſque ad curvam , ſive extra curvam uſque ad tangentem eadem eſt , quia pars intercepta inter curvam , & tangentem, utpote quæ ſubtenditur angulo contactus infinite exiguo , & latera infinite parva complectitur, eſt infinite parva habita ratione Rm , quæ comprehendit quidem latera Mm , MR infinite exigua, ſed angulo mMR finito ſubtenditur. Quo etiam oſtenditur utrumque triangulum eſſe æquale, eo quod rectilineum ſolum quantitate infinite parva tertii gradus differt a mixto, quod eſt minimum tantum ſecundi gradus, habita ſcilicet ratione rectanguli PpRM , quod eſt minimum primi collatum videlicet cum finito ſpatio AMP. Sed triangulorum æqualium , quorum duo latera MR , Rm congruunt , etiam tertium Mm congruat neceſſe eſt. Datam igitur primam hypotheſim infinite parvæ diſtantiæ inter duas ordinatas, hæc omnia conſequuntur, & illud potiſſimum ſubtangentem PT eſſe $= \frac{ydx}{dy}$. In applicatione vero hujus formulæ generalis ad curvas ſpeciales pro valore hujus ſubtangentis eruendo, & in quantitatibus finitis cognoſcendo ita ex. gr. procedunt , quod attinet ad parabolam Apollonianam , §. 21. Anal. Inf. Wolphii Tom. I. Elem. In illa conſtans æquatio hæc eſt.

$$ax = y^2$$

Scilicet in quibuſcumque punctis diametri, aut curvæ parabolicæ ſumantur abſciſſæ x, & ordinatæ y, ſemper erit $ax = y^2$.

Quare differentiando $adx = 2ydy$ §. anteced.

Quare divid. per a erit $dx = 2ydy : a$. Jam vero

PT ex modo oſtenſis $= ydx : dy$

Ergo ſi pro dx ſubſtituamus ejus valorem $2ydy : a$, erit PT $= 2y^2dy : ady$, & delendo dy juxta regulas communes, PT $= 2y^2 : a$, & pro y^2 ſubſtituendo valorem ax , PT $= 2ax : a = 2x$, ſcilicet in parabola ſubtangens PT eſt dupla abſciſſæ AP. Qua in re videre licet , quomodo Geometræ faciant , ut quantitates infinite parvæ evaneſcant, quo nimirum æquatio quantitatibus infinite parvis conſtans ex hypothetice vera in abſolute veram, & ſolis finitis compoſitam tranſeat, quemadmodum ob eumdem finem faciunt, ut ex æquatione quantitates radicales, quæ eſſe non poſſint, diſpareant. Scilicet tamdiu omnes in partes æquationem verſant , quamdiu ad illam æquationem fractione expreſſam perveniant , in qua eadem infinite parva locum tum in denominatore , tum in numeratore teneant , ut patet

patet in æquatione $PT = 2y^2 dy : a dy$. Iis enim deletis, ut dy in data æquatione, æquatio manet omnino eadem, quantum ad æqualitatem, ſed omnium infinite parvorum expers, atque ideo quantitas finita nobiſque nota. In quo non video, quid obſtet veritati problematis partes infinite parvas non poſſe deſignari; propterea quod nec officit veritati theorematum, in quibus demonſtrandis quantitates radicales occurrunt, has quantitates eſſe non poſſe. Immo partes infinite parvas nequaquam exſtare poſſe quibuſdam fortaſſe videri poterit unum eſſe ex principiis, quibus fit, ut demonſtrationes calculi differentialis a rigore geometrico ne hilum quidem abſint. Hoc enim plane conficitur quantitates, quæ infinite parva quantitate differunt, uti rectangulum $PpMR$, & trapezium $pPMm$ nulla penitus quantitate diſcrepare, atque ideo in ſtricto ſenſu, quam qui maxime, & veriſſime æqualitatem inter illas intercedere. Qua ratione ſervata aſſentiri quis poteſt Cl. Corradi, ſed non ſolum quod ad aliquas quantitates infinite parvas, ut ipſe putat, ſed quod ad omnes etiam primi gradus.

2. At enim diſcrimen eſt inter quantitates radicales, & inter infinite parvas; quod licet illæ, ſi ipſæ per ſe præciſe ſpectentur, eſſe non poſſint, hujuſmodi tamen ſunt, ut aliquantiſper inflexæ ad ſtatum, quo eſſe poſſint, reducantur, ſive ut ſenſui impoſſibili, quem habent ad ſpeciem, verum & realem ſubſtituere poſſimus, in quo veræ ac poſſibiles ſunt, etiam antequam evaneſcant. Nam ſi in parabola, ex. gr. dicimus eſſe

$$\sqrt{x} : \sqrt{z} = y : v$$

tametſi x, & z utpote lineæ, ſive abſciſſæ nullam radicem habere queant, aliud nihil reipſa ſignificare volumus, niſi inventa media proportionali m inter x, & z, quod fieri poteſt, eſſe x ad hanc mediam, uti y ad v, ſcilicet $x : m = y : v$.
Unde cum z ſit tertia proportionalis poſt x, & m, inferre licet

$$x : z = y^2 : v^2$$

Quare ſi elevando ad quadratum terminos hujus æquationis

$$\sqrt{x} : \sqrt{z} = y : v \quad \text{fit}$$

$$x : z = y^2 : v^2$$

id non oritur ex eo, quod $\sqrt{x}$, $\sqrt{z}$ ſint veræ radices, quæ ad ſecundam potentiam elevari poſſint; ex falſo enim nihil verum per ſe elici poteſt, ſed oritur vi alterius analogiæ veræ $x^2 : m^2 = y^2 : v^2$. At quantitates infinite parvæ quem ad ſenſum poſſibilem ac verum redigi poſſunt, cujus vi vera ſint illa, quæ ex infi-

infinite parvis concluduntur? Ecce hunc ſenſum poſſibilem; Cum extenſam quantitatem ut lineam dividi poſſe in infinitum conſtet, hinc ſi fieret actu hæc partitio, quælibet pars eſſe infinite parva, utpote infinities in toto contenta, conficeretur. Cum vero motu corporis hæ lineæ finitæ percurrantur, & motu corpus gradatim per omnia poſſibilia diviſionis puncta tranſeat, hinc ſi a principio motus ſpectetur, ante infinite parvam quantitatem tantum non conficit, quam finitam conficiat; propterea quod ante $\frac{1}{1000000}$ percurrit $\frac{1}{10000000}$, ante hanc tranſit $\frac{1}{100000000}$, & ita porro in infinitum. Unde tametſi revera non tranſeat, & quantitas ex infinite parvis non coaleſcat; tamen perinde eſt ac ſi corpus prius deſcriberet quantitatem infinite parvam, & quantitas finita ex infinite parvis conſtaret. Sed differentialia non ſunt niſi hæc infinite parva augmenta, aut decrementa, quæ motu fieri percipiuntur. Igitur horum calculus differentialium ſenſum verum atque realem habere poteſt.

3. Urgebis deſcribi quantitatem infinite parvam, & perinde eſſe, ac ſi deſcriberetur, eadem non ſunt. Concedo equidem, ſed ajo id ſufficere in eum finem, ut quæ ex infinite parvis concluduntur, veriſſima ſint. Nam ſolidum aliquod rectangulum vere non conſtat ex ſuperficie plana in perpendicularem ad ſuperficiem ducta; propterea quod ſubſtantia extenſa ex puris extenſionis modis non componitur. Sed quia per motum ſuperficiei ſecundam rectam, quæ toto motus tempore illi ad perpendiculum inſiſtat, ſolidum æquale illi, quod ex ſuperficie in rectam ducta fit, deſcribi percipimus, intelligimus perinde eſſe, ac ſi conſtaret, & in methodo Indiviſibilium plura & ea veriſſima ex geneſi corporum ita conſiderata deducimus. Quid ni igitur idem dicamus in methodo infinite parvorum, tametſi hæc infinite parva deſignari non poſſint, cum res in quantitate continua perinde ſe habeat ac ſi ex infinitis infinite parvis coagmentaretur? Ceterum etſi quantitates infinite parvas deſignari poſſe nullis certis rationibus evinci contendimus; tamen neque eaſdem inter ea, quæ impoſſibilia ſunt, eſſe numerandas nulla evidenti ratione concludi alio loco oſtendemus.

4. Eſt etiam in Analyticis aliud exemplum, quo hæc omnia mirifice confirmantur. Cum tam quantitas poſitiva ducta in aliam poſitivam, quam negans in negantem faciat plus, ſive quadratum poſitivum, ſequitur radicem quadratam quanti-

tita-

titatis negantis eſſe non poſſe. Et ideo ab Analyſeos Profeſſoribus dici imaginariam. Nihilotamen minus ſi quando hæ radices occurrunt in Phyſicis atque Geometricis, & alius per aliam multiplicatione obtinemus ut diſpareant, id quod inde exſiſtit, certiſſime verum eſt. Ex. gr. ſi ſit $4+\sqrt{-4}$, & $4-\sqrt{-4}$, & alteram in alteram ducamus, exſiſtit $16+4=20$, qui eſt verus numerus, tametſi a duabus radicibus imaginariis & impoſſibilibus ducatur. Quid ergo mirum, ſi quæ a quantitatibus infinite parvis eliciuntnr, veriſſima ſint, cum licet impoſſibiles forent, tamen veras habeant cauſſas, cur ita percipiantur?

ARTICULUS III.

De aliis nonnullis, quæ difficultatem facere poſſunt in calculo differentiali.

§. 76. Animadverſio

SUblatis ut reor in genere difficultatibus, in quas calculus infinite parvorum incurrit, in animo eſt alia multa expendere, quæ difficultatem tyronibus in hac methodo facere poſſunt, & in intimiores ipſius rationes inquirere, ut quantum ratione ac via procedat, omnibus perſpicuum fiat. Qua in re primo occurrit difficultas, quam §. 74. innui. Nam ex rationibus a me ſubductis num. 2. dicti §. conſtat eſſe

$$y\,dx - x\,dy = 0 \quad \text{ergo}$$
$$y\,dx = x\,dy.$$

Quod videtur eſſe contrarium Wolphio, qui ita ratiocinatur

$$xy = a^2$$
$$x\,dy + y\,dx = 0$$
$$y\,dx = -x\,dy.$$

Sed facile res componitur ex natura quantitatum, quæ negativæ appellantur; nam in extenſo negatio exprimit quantitatem realem, ſicuti & affirmatio; ſed cum illo diſcrimine, quod ſi ſignum affirmationis oculis ſubjicit quantitatem, ex. gr. a dextra ſiniſtrorſum progredientem, ſignum negationis exhibet illam, quæ in contrariam plagam tendit. Nam cum ex AD procedente ab A (*Fig.* 8.) verſus D detrahi debet quædam ejus pars, quod ſigni negantis eſt munus, incipiendum eſt a D, & verſus A procedendum, ut inde pars DL abſcin-

abſcindatur. Quo facto AL ita deſignabitur AD — LD, ſive ſi AD ponatur $= y$, & LD $= dy$ erit AL $= y - dy$. Hoc ſtatuto inventurus differentiale $xy = a^2$, vel exploratam habes, aut ponis tibi exploratam naturam quantitatum x, & y, vel non ponis. Si ſecundum, utramque x, & y ab initio vides eſſe poſitivam, utpote quæ nullum habet ſignum præfixum, & differentiando invenis cum Wolphio $x\,dy + y\,dx$. Sed cum ob æquationem $xy = a^2$ invenias deinde $y\,dx + x\,dy = o$, inde concludis alterutrius differentiale eſſe negantis naturæ, ſcilicet vel $x\,dy = -y\,dx$, vel $y\,dx = -x\,dy$. Quod ſi attendens ad curvam, quam præ manibus habes, abſciſſas jugiter augeri comperias, & ideo ordinatas y aliqua parte mulctari, quo rectangulum ex ipſis datæ quantitati a^2 ſit ſemper æquale, inde differentiale dy eſſe negans conjicis, atque ideo ponis $y\,dx = -x\,dy$.
Sin alterum, ut ego feci, tum ab initio concludis $y\,dx - x\,dy$ eſſe $= o$, atque ideo $y\,dx = x\,dy$. Quæ duæ expreſſiones eodem recidunt; proptereaquod cum negatio præfixa quantitatibus extenſis, ſive generatim continuis, quæ fluxu quodam generari finguntur, nihil aliud exprimat, niſi quantitatem veram & realem eſſe ſumendam, ſed in contrariam plagam, utraque expreſſio $y\,dx = -x\,dy$, & $y\,dx - x\,dy = o$ nos in eam cognitionem inducit quantitatem dy eſſe quidem quantitatem realem; aliter enim $y\,dx - x\,dy$ non forent $= o$, ſed in contrariam origini plagam ſumi oportere.

2. Sed perficiamus demonſtrationem problematis, quo ſubtangens hyperbolæ intra aſymptotos invenitur. Id enim nobis occaſionem præbebit magis ac magis explicandi naturam tum quantitatum infinite parvarum, tum earum, quæ infinite magnæ dicuntur. Sit itaque hyperbola fI, & ejus aſymptoti AS (*Fig.* 10.), AK; a centro ſive origine A abſcindatur quædam AP $= x$, a puncto P uſque ad convexitatem curvæ ducatur PM $= y$ parallela alteri aſimptoto AS, compleaturque rectangulum APMG $= xy$. Tum ab eadem origine A abſcindatur alia AE quantumvis major abſciſſa AP, & ab illius extremo pariter ducatur EF parallela aſymptoto AS, ideoque & ordinatæ PM. Conſtat ex I. Par. Anal. Wol. §. 502. eſſe rectangulum AEFV $=$ rectangulo APMG; idque in infinitum; quod ne tibi, qui quantitatis in infinitum productæ poſſibilitatem fortaſſe negas, difficultatem faceſſat, fac ſolum

eſſe

Digitized by Google

eſſe ductas rectas AS, AK ad rectum angulum in A ſibimet inſiſtentes, factoque ſuper eas quocumque rectangulo AP-MG jugiter ſume in APK majorem & majorem abſciſſam in infinitum, quod fieri poſſe conſtat, quia nullus productioni rectæ AK terminus figi poteſt; iiſque abſciſſis ſuas ordinatas applica EF, *ef*, ſed in ea ratione ut abſciſſæ, & ordinatæ ſint ſemper inverſe proportionales; nimirum AP : AE = EF : PM. Quod uſque in infinitum continuari poſſe nemo negaverit: nam quotieſcumque AE eſt finita, etiam AP erit ejus pars finita, & ideo ordinata EF pars finita ordinatæ PM. Sed cum PM in infinitum dividi poſſit ſaltem eo ſenſu, ut minor & minor recta in infinitum afferri queat, & major, ut dixi, in infinitum abſciſſa ſupra AK deſignari; plane conſtat hujuſmodi proportionem in infinitum continuari poſſe, ita ut ordinata quocumque vel maximo intervallo ab A diſſita nuſquam nulla fiat. Per extremum omnium hujuſmodi ordinatarum duc lineam M*m* FI, quæ curva erit, eo quod ordinatæ decreſcunt in alia ratione, quam ordinatæ ad diametrum rectanguli, & quidem hyperbolica intra aſymptotos, propterea quod rectangula facta ex ſingulis abſciſſis in ſingulas ordinatas ob reciprocam proportionem ſunt æqualia, & cum ordinatæ numquam nullæ fiant, curva illa cum AK numquam concurrit. Qua in re ſi quis Geometra dixerit rectangulum finitum AGMP eſſe poſſe æquale rectangulo infinito, nihil inducit in Geometriam, quod rigidiſſimus Philoſophus explodere debeat. Is enim non ſe immiſcet illi quæſtioni, utrum recta AK ſaltem a Deo non ſolum potentia, ut certum eſt, ſed etiam actu in infinitum duci poſſit. Sed primum abſolute pronuntiat, quantumvis magna abſciſſa, finita tamen ex AK abſcindatur, ſemper rectangulum ex ipſa in ſuam ordinatam eſſe æquale rectangulo APMG, quod omnino certum eſt, nec aliquid habet, quod mirum alicui videatur, quia quantum abſciſſa, ex. gr. AE eſt major abſciſſa AP, tantumdem ordinata EF eſt minor ordinata PM; ideoque quantum AEFV ſuperat alterum rectangulum AP-MG habita ratione unius lateris, tantumdem habita ratione alterius ab eo ſuperatur. Deinde aliud etiam pronuntiat, ſed hypothetice tantum, & ſub illa hypotheſi neceſſario verum. Si AK fiat actu infinita & abſciſſa pariter infinita, rectangulum ex ipſa confectum in ordinatam, quæ illi reſpondet, rectan-

rectangulum finitum APMG exæquat, propterea quod ſupra dicta proportio inverſa laterum in infinitum obtinere poteſt, & ducta infinita abſciſſa revera obtinet. At enim infinitum eſſe finito æquale non poteſt. Ita eſt ſi quantum una quantitas eſt infinita ratione habita unius partis, tantumdem infinite parva non ſit ratione habita alterius. At ſi res aliter ſe habeat, ut ſe habet in hiſce rectangulis, infinitum rectangulum in longitudine & infinite parvum in latitudine rectangulo in utraque dimenſione finito eſſe æquale nil obſtat; cum ita ſe habere queat AP finita ad abſciſſam infinite longam, ut ordinata infinite parva ad finitam ordinatam PM, atque ideo rectangulum ex extremis finitis AP & PM eſſe æquale rectangulo ex mediis, quorum alterum ſit infinite magnum, alterum vero infinite parvum: præſertim cum ex potentia diviſionis quantitatis in infinitum planiſſime conficiatur tot ex plano lineas rectas poſſe ſecari, quæ quantumvis magnam rectam excedant; atque ideo ſuperficiem omnem finitam infinitæ lineæ æquivalere. Dices ordinatam infinite parvam eſſe non poſſe. Concedo equidem, ſi id abſolute pronuntias. At ſi ponas aſymptotum AK in infinitum reipſa productam, nego ſub hac hypotheſi id repugnare. Nam ex diſtantia puncti K infinita ab origine A ſequitur neceſſario intervallum aſymptoti & abſciſſæ in eo loco a curva, atque ideo ordinatam ipſam eſſe infinite parvam. Quod etiam conficitur ex eo, quod cum dicta proportio ſemper obtineat, erit ut AP finita ad abſciſſam infinitam, ita ordinata ejuſdem infinitæ ad finitam ordinatam PM; quod eſſe non poteſt, niſi hæc abſciſſæ infinitæ ordinata infinite parva ſit. Atque hæc eſt ratio, cur ſi ſpatium hyperbolicum intra aſymptotos circa AK revolvatur, cylindrus finitus genitus rotatione rectanguli APMG circa axim AP ſit $\frac{1}{2}$ ſolidi hyperbolici infiniti geniti ex revolutione ſpatii infiniti AGMFIKPA, §. 217. Anal. Inf. Wolphii. Neque id mirum videri debet; nam ducto quocumque rectangulo VAEF intra ſpatium hyperbolicum, ex dicta proportione ſemper ſequitur ſuperficiem cylindricam genitam revolutione rectæ FV ſemper cadere intra terminos cylindri finiti APMG, eo quod curva & aſymptotus ſemper magis accedunt, deinde ſemper eſſe ad ſuperficiem VX genitam inter cylindrum finitum AGMP, ſicuti VX ad XZ; ideoque ſicuti rectangulum GAPM

PM factum ex omnibus parallelis V X , D N , H R intra rectangulum G A P M eſt duplum trianguli G P M facti ex omnibus parallelis ZX , LN intra eoſdem terminos G M , A P contentis , ita aggregatum omnium ſuperficierum curvarum *m*H , F V , *f* D , ideoque ſolidum hyperbolicum AGMFIKPA , quod ex iis conſtat , erit duplum aggregati omnium ſuperficierum DN , VX , HR , ſive cylindri geniti revolutione rectanguli A G M P , qui iiſdem ſuperficiebus componitur . Quod eſſe non poteſt , niſi ſit hic cylindrus = ſolido genito ex revolutione ſpatii infiniti P M F I K E P. Hac poſita demonſtratione , quæ tamen abſolutior reperitur apud P. Grandi *ſezioni conich. prop.* 52. *ed.* 1. vel poteſt exſtare actu hujuſmodi ſpatium hyperbolicum infinitum per actu infinitam horum corporum productionem , vel non. Si nequit , aliud nihil Geometræ volunt , niſi cylindrum genitum revolutione rectanguli AGMP ſemper eſſe majorem quocumque finito ſolido hyperbolico PMFE , quantumvis magno ; in qua nihil miri eſt , niſi cui mirum etiam videatur , ſi prima quantitas ad ſecundam majorem habeat rationem , quam 3 ad 4 , factum ex prima & 4 eſſe majus facto ex 2 , & 3. Quamvis autem ſpatio hyperbolico ſemper aliquid accedat , id tamen accedit in ea ratione , ut ſemper primum ex elementis cylindri finiti AGMP ad primum ex elementis ſpatii hyperbolici PMFIKEP , quod finitum ſumetur , majorem rationem habeat , quam ſecundum elementum hyperbolici ad ſecundum cylindri. Nihil igitur mirum , ſi ſumpto quolibet ſpatio finito PMIKEP quantumvis magno , cylindrus AGMP ſolido hyperbolico ſed finito major ſit ; propterea quod de hoc ſolido multo plus decedit in latitudinem ſive altitudinem , quam in longitudinem accedat. Sin autem poteſt exſtare ſpatium hyperbolicum infinitum , jam conſtat ex elementorum analogia cylindrum finitum eſſe illi æquale , quod pariter novum videri non debet , cum quoad manet finitum , ſemper ſit minus cylindro , cum vero infinitum fit , augetur quidem in infinitum longitudo , ſed in infinitum pariter altitudo minuitur , quod ut diximus in rectangulo infinite longo ſatis eſt ad ſervandam inter elementa , quibus ſolida conſtant , analogiam , & ideo ſolidorum æqualitatem .

3. Quædam in hanc rem in citato libro (*Mem. Analitiche del Calcol. Diff. ed Integ. Par. I. num.* 167.) ſcribit Cl. Corradi ,

di, quæ hic referre juvat. Docet itaque quantumvis parva fiat AD, nihilominus rectangulum AD*fe* illi inſiſtens intra aſymptotum, & curvam manere finitum, utpote æquale finito, certoque rectangulo AGMP, & ob eamdem cauſſam alterutrum ex lateribus AD, AE non poſſe fieri, aut nihil, aut infinitum; non nihil, quia nihil etiam per infinitum latus AE productum numquam facere poteſt rectangulum æquale finito, certoque rectangulo AGMP, aut ſaltem determinatum ac certum, quale eſt idem AGMP; non infinitum, quia cum ex prima parte latus AD debeat eſſe finitum, latus AE ſit ſemper finitum neceſſe eſt. Ex quo aſymptotum uſque in infinitum duci non poſſe demum concludit. Sed non carpendi hominis cauſſa, cujus ſummam interiorum calculi infiniteſimalis ſcientiam & inventa ſuſpicio, verum conſulendi, ſi Deus dederit, hujus Artis Tyronibus disjectione tenebrarum, quæ ad hoc ſtudium ſe conferentibus perſæpe offunduntur, aliquod habeo quod contradicam. Aſſentior quidem AD fieri non poſſe nihil, idque ob allatam ab illo rationem, ſed aveo ſcire, quid ſibi velit, cum inquit aſymptotum in infinitum duci non poſſe; ſi enim potentiam ducendi in infinitum, numquam tamen ad actum ultimum infinitatis perventuram neget, nullo pacto aſſentiri homini poſſum; proptereaquod & univerſe ex infinita ſpatii poſſibilitate rectam in infinitum hoc pacto duci, ideſt numquam ad terminum perveniri poſſe conſtat ex ſuperioribus, & ſpeciatim hic nihil ex parte aſymptoti & curvæ eſt, quod huic productioni terminum aliquem figat; cum ut conſtat ex dictis num. 2. in quacumque vel maxima, ſed finita diſtantia K & I ab origine A inter aſymptotum, & hyperbolam finita quædam ordinata intercipiatur. Quod ſi neget potentiam productionis aſymptoti, vel lateris rectanguli ſuper aſymptotum actu infinitæ, quæro ab eo utrum id inficietur ob generalem rationem, qua multi Philoſophi quamlibet quantitatem actu infinitam refellunt, vel ob ſpecialem in aſymptoto hyperbolæ. Si primum, non valde repugnabo, modo & is mihi det quantitates infinite magnas ſine errore a Geometris in hypotheſi aſſumi, quemadmodum ſine errore quantitates infinite parvas adſciſci §. ſuperiore confecimus. Sin alterum, nego eſſe quidpiam in ſpatio hyperbolico ſpeciale, quod hanc infinitatem impediat. Nam quod is objicit de rectangulorum æqua-

æqualitate, nihil obeſſe puto. Siquidem ubi latus Ae fuerit infinitum, latus alterum AD nec finitum, nec abſolute $= o$, ſed infinite parvum exſiſtet, & AP finitum ad Ae infinitum ità ſe habebit, ut ef, ſive AD ad PM, ſive AG, cum quo æqualitas rectangulorum conſiſtit.

4. Sed unde ſumus digreſſi, redeamus. Cum AP ſit $= x$, & PM $= y$, ducta pm infinite propinqua erit abſciſſa $Ap = x + dx$, & pm quia decreſcit, $=$ PM $-$ MR $= y - dy$. Hoc poſito quæritur ſubtangens tangentis ad M. Dicatur hæc ſubtangens PT, quæ propter expreſſionem generalem erit $= ydx : dy$, §. 75. & pro ydx ſubſtituendo æqualem $- xdy$ num. 1. erit $= - xdy : dy$, & dividendo per dy erit $= - x$ ideſt $=$ abſciſſæ. Cum vero ſignum negationis in quantitatibus extenſis exprimat quantitatem ſumendam eſſe in contrariam ab origine partem, hinc initium ſubtangentis, quod eſt punctum concurſus cum tangente, non erit a P verſus E, quorſum rectæ poſitivæ ab origine A procedere ponuntur, ideſt punctum T non erit inter A, & P, ut inde profectæ tum tangens tum ſubtangens verſus P & M progrediantur, ſed erit inter P, & K, ſcilicet a puncto T tum tangens TM tum ſubtangens TP verſus P & M in contrariam origini A plagam progredientur. Quare PT $= - x$, erit $=$ abſciſſæ AP.

5. Nunc quæ ſit inter hujuſmodi infinite parva proportio videndum, ſi videlicet aliud etiam rectangulum AEFV, & illi infinite propinquum AefD deſcriptum intelligamus, quorum primi abſciſſa AE ponatur $= 4x$, ideſt quadrupla AP. Qua in re cum rectangulum AEFV ſit $=$ APMG $= xy$, erit EF $= \frac{1}{4}y$; quare $Ae = 4x + 4dx$, & $ef =$ EF $-$ BF $= \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}dy$. Igitur infinite parva ſunt reciproce proportionalia, ſcilicet Pp, ſive mR : Ee, ſive fB $=$ FB : MR, ſcilicet

$$dx : 4dx = \frac{1}{4}dy : dy$$

Quo cofirmatur id, quod de proportione quantitatum infinite parvarum alibi adverti, cum inter illarum finitas quantitates geometrica proportio intercedit.

§. 77. Propoſitio

Quoniam vero hoc in capite mihi potiſſimum propoſui difficul-

cultates enodare, in quas legentes calculum Wolphii integralem & differentialem offendunt, propterea quod ex altera parte Matheſeos hujus auctoris elementa manibus omnium teruntur, & ex altera multi ſunt, quos de nimia Analyſis Infinitorum obſcuritate conquerentes audivi, Problema 6. quod eſt §. 46. Anal. Infinitorum, examinandum ſuſcipio, quod in ejus ſolutione quidam expediendi ſunt nodi, miſſis omnibus ſuperioribus §§. in quibus ſpecialium curvarum aut ſubtangentes, aut ſubnormales inveniuntur, quia nihil eſt in iis, quod quidem ad calculum Infinitorum pertineat, quod negotium faceſſere poſſit. Sit itaque (*Fig.* 11.) curva AMQ, cujus diameter principalis PA producta in C. Ut ejus aſymptotus CD inveniatur, duo neceſſe eſt invenire, intervallum puncti C a vertice A, ſcilicet rectam AC, & angulum ECA; quo vero hic angulus definiatur, rectam AE perpendicularem ad rectam CP ad verticem A, per cujus rectæ extremum E aſymptotus CD ducatur, definire opus eſt. Quæ rectæ hoc pacto inveniuntur. Cum ſpatio infinito emenſo aſymptoti diſtantia a curva fiat infinite parva, perinde eſt, ac ſi aſymptotus cum curva congrueret, & vices tangentis gereret, utpote quæ a tangente infinite parva quantitate abeſt in puncto curvæ infinite diſtanti a vertice A, e quo nimirum puncto ducta ordinata ad diametrum eſt infinita, & infinitam abſciſſam e diametro abſcindit. Ex. gratia, ſac TM eſſe aſymptotum, hæc tanget curvam in M, quod punctum infinite abeſt ab A, ideoque ordinata $MP = y$ erit infinita, quemadmodum & abſciſſa $PA = x$. Abſcindatur finita $Pp = dx$, quæ erit infinite parva habita ratione infinitæ x, ductaque ordinata pm & perpendiculari $MR = dx$, erit mR finita quidem, ſed infinite parva reſpectu y, ideoque $= dy$, quemadmodum & Mm finita, ſed infinite parva ratione habita MA. Neque dixeris triangulum mixtum MmR non eſſe futurum idem ac rectilineum MmR; nam illud quidem verum eſt, cum M finito intervallo abeſt ab A, propterea quod cum curva Mm infinitis infinite parvis angulis diſcedat a recta tangente Mm ſpatium interceptum inter tangentem, & curvam fit finitum, ideoque pars finita reſpectu finiti trianguli mixti MmR. At in diſtantia infinita a vertice A res non ita ſe habet; nam cum in puncto M tangens ſive aſymptotus infinite parvo intervallo diſtet a curva, quod intervallum poſt M adhuc minuitur, ſpatium interceptum inter tangentem, & curvam erit ſolum infinite

nite parvum, ideoque nullum reſpectu finiti trianguli MmR:

2. Hoc conſtituto ſic, ex. gr. in hyperbola Apolloniana, poſſumus argumentari. Cum ſit etiam in diſtantia infinita puncti M ab A

$$mR : RM = MP : PT$$
$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

erit ſubtangens $PT = ydx : dy$, poſita tamen y infinita, unde illius valorem eruimus, perinde ac ſi foret finita, propterea quod etiam in puncto hyperbolæ infinite diſtanti ab A eadem exſiſtit æquatio, ac in puncto finite diſſito, ex qua æquatione

valor ſubtangentis, §. 27. Anal. Infinit. eruitur $= \frac{2ax + 2x^2}{a + 2x}$;

Inde autem Wolphius conficit, §. 491. Par. I. Anal. AT eſſe $= ax : (ax + 2x)$. Quamobrem etiam hoc loco $AT = ax : (a + 2x)$. Sed cum x ſit infinita, & a finita, ideoque ratione habita x infinite parva, erit $AT = ax : 2x$ propterea quod cum a ſit infinite parva reſpectu x, erit denominator $2x + a = 2x$, eo quod differunt ſolum quantitate infinite parva, ideoque $AT = a : 2$, ideſt medietati axis tranſverſi, prorſus ut ex communibus Algebræ elementis evincitur. Q. E. Primum

3. Ad alterum vero quod attinet, ſume curvæ æquationem, quæ hic erit, §. 459. Parte I. Anal. Wolphii

$$ay^2 = bax + bx^2$$

Cum vero y & x ſint infinitæ, & a & b finitæ, erit $ay^2 = bx^2$, non tamen propter rationem, quam innuit Wolphius, cum inquit ad hoc, ut prodeat valor AT, vel AG, eſſe abjiciendas illas conſtantes, quæ in nullam variabilem ducuntur; nam hic ba ducitur in x variabilem, & nihilominus terminus bax abjiciendus eſt; ſed propter generalem illam in calculo differentiali rationem, quod quantitas eadem manet ſive aucta, ſive mulctata quantitate infinite parva, propterea quod quemadmodum finitum eſt quantitas infinite parva, ſi ad infinitum primi gradus referatur, ita infinitum primi gradus eſt quantitas infinite parva, ſi cum infinito tertii conferatur, & ita porro. Sed hic abx eſt infinitum primi gradus, & in longitudinem ſolum expreſſam per x, at in latitudinem a & altitudinem b eſt finitum: ſed bx^2 quamquam in altitudinem b ſit finitum, tamen propter unam radicem infinitam x eſt infinite longum

gum, & propter aliam x eſt infinite latum; atque idcirco bax ſi referatur ad bx^2, aut ad ay^2, eſt quantitas ſolum infinite parva, & nullius loco habenda eſt. Unde patet

$$ay^2 = bx^2; \quad \text{\& extrah. rad.}$$
$$y\sqrt{a} = x\sqrt{b}, \quad \text{\& diff.}$$
$$dy\sqrt{a} = dx\sqrt{b}, \quad \text{\& extrah. analogiam}$$
$$dx : dy = \sqrt{a} : \sqrt{b}; \quad \text{cumque ſit}$$
$$MR : Rm = TA : AG$$
$$dx : dy = \frac{1}{2}a : \frac{ady}{2dx} \quad \text{, erit}$$
$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \frac{1}{2}a : AG$$

Unde $AG = a\sqrt{b} : 2\sqrt{a} = \sqrt{(ab)} : 2$ prorſus ut communi calculo evincitur. Subſtitue nunc pro AT & AG, quæ non poſſunt eſſe rectæ quæſitæ, niſi in hypotheſi, quod M infinite abſit ab A, quod in ſchemate falſum eſt, ſubſtitue inquam AC & AE, poſteaquam earum valorem cognoviſti ideſt fac; $AC = \frac{1}{2}a$, & $AE = \frac{1}{2}\sqrt{(ab)}$.

4. Ad hæc non video quid aliud contradici poſſit, niſi illa eadem quæ quantitatibus infinite parvis reſpectu finitarum objecta fuere, dari ſcilicet non poſſe quantitates infinite magnas nec 1 nec 2 nec 3 nec &c. gradus. Sed eadem prorſus reſponſione utor: primo data hypotheſi, quod aſymptotus in infinitum reapſe producatur, alia omnia rite concludi, illam eſſe tangentem, abſciſſam & ordinatam evadere infinitas, MR & Rm, licet finitæ forent, tamen eſſe infinite parvas ratione habita PA & PM, rectangulum mixtum MmR non differre a rectilineo MmR, exſiſtere poſſe infinitum 1, 2, 3, &c. in infinitum gradus, propterea quod quantitates infinitæ in ſeipſas, vel in alias infinitas, quot vicibus quis voluerit, duci poſſunt, quo pacto infinita omnium graduum exſiſtunt, infinitum gradus inferioris eſſe nullum, ſi cum infinito ſuperioris conferatur, denique haberi valorem rectarum AC & AE primo implicatum quantitatibus infinitis, & idcirco nec verum, ſi quantitas infinita repugnat, nec notum, etiamſi cum ratione non pugnaret, & deinde ſolis finitis conſtantem; quod obtinuimus diviſione, ita nimirum omnes in partes curvæ æquationem verſando, ut valor evadat fractio, cujus tum denominatorem, tum numera-

 torem

torem eædem infinitæ quantitates occupent: ſecundo hanc hy- pothesim, tametſi dari non poſſit, tamen non temere ſumi, quia quod attinet ad ea, quæ dicta ſunt, concludenda, in aſym- ptoto ducenda numquam ad terminum poſſe perveniri perinde eſt, ac illam eſſe vere infinitam, & ſolum infinito ſpatio emen- ſo cum curvæ tangente congruere.

4. Sed antequam ab hoc loco diſcedam, illud notent Tyrones quantitates reſpectu aliarum infinite parvas tunc ſolum pro nullis putari, quando aliis infinitis adduntur aut detrahuntur; tunc enim propter infinite parvam exiguitatem perinde eſt, ac ſi non forent. At ſi per eas aliæ multiplicentur, aut dividan- tur, ratio illarum habenda eſt, propterea quod quantitatem ad aliud genus reducunt, ex. gr. lineam ad rectangulum, aut ad ſolidum, aut ad alia, aut viceverſa, quod genus ſervandum eſt, ut æquatio conſiſtat. Nam, ex. gr. in puncto parabolæ infinite diſtanti a vertice eſt $y^2 = ax$; quantitas a deleri non poteſt, nec haberi pro nulla; ſiquidem recta x per ſe tantum quan- tumvis infinita haberi non poteſt tamquam æqualis quadrato ordinatæ, quantumlibet hæc minor ſit. At ſi retineatur a licet infinite parva reſpectu infinitæ x, vel y, ſatis eſt, ut habeatur æquatio $y^2 = ax$, quia fieri poteſt hæc analogia $x : y = y : a$; unde infertur x eſſe infinitam habita ratione y, quia ſicuti y eſt infinita reſpectu a, ita x debet eſſe infinities infinita, reſpectu ſcilicet y infinitæ, quo analogia ſervetur. Idem in diviſione quantitatis infinitæ per infinite parvam ſtatuendum eſt. Nam ſi $y^2 = ax$, cum x, & y ſunt infinitæ, erit $\frac{y^2}{a} = x$; ex quo vides diviſorem a negligendum non eſſe, ut qui quadratum y^2 redi- git ad ſtatum lineæ, in quo lineæ x æquale eſſe poteſt. Quid igitur in ſuperiori demonſtratione aſymptoti hyperbolæ $\frac{ax}{a+2x}$ poſita eſt æqualis $\frac{ax}{2x}$, cum a locum teneat diviſoris? Ecce cauſ- ſam. Cum a in diviſore addita eſt aut detracta alteri rectæ $2x$, a deleta non idcirco ceſſat redigi quantitas dividenda ax ad alium ſtatum, quia remanet $2x$, qua redigatur. Quamobrem ob hanc cauſſam non eſt retinenda. Quia vero ut finita infini- tum diviſorem $2x$ nec auget nec minuit, idcirco penitus abji- cien-

cienda eſt, proptereaquod ax æque dividitur, & ad alium ſtatum redigitur ſola quantitate $2x$, ac quantitate $a+2x$. At cum a ſola eſt in diviſore, ut $y^2 : a = x$, quantitatem y^2 reducit ad alium ſtatum, in quo cum altera quantitate comparari, & illi æqualis eſſe poteſt. Unde intelligitur quanto acumine opus ſit in Analyſi Infinitorum, ne in errores eoſque palmares incidamus. Quod alio exemplo comprobari poteſt ex iis ipſis, quæ modo ſcripſimus, petito. Quæ num. 4. diſſeruimus, ea præbere poſſunt aliquibus occaſionem ſibi perſuadendi, in omnibus curvis æqualiter infinitas evadere abſciſſas ſimul & ordinatas, & ob eam cauſſam idcirco æqualiter etiam infinite parva earumdem differentialia. Quod conveniet quidem in hyperbolam, de qua tunc agebamus, in alias omnes curvas non item. In hyperbola quidem, quia cum in ea ſemper hæc æquatio ſit etiam in puncto curvæ, quod infinito intervallo a vertice abſit.

$$ay^2 = bax + bx^2,$$

& propter infinite parvum bax ſit

$$ay^2 = bx^2,$$

inde hæc analogia duci poteſt

$$a : b = x^2 : y^2$$

& $$\sqrt{a} : \sqrt{b} = x : y,$$

quæ facit perſpicuum inter x, & y eſſe rationem finitam, quemadmodum eſt inter $\sqrt{a}$, & $\sqrt{b}$, ac propterea x & y eſſe gradus ejuſdem infinitas. Atque hoc idem cadere poteſt in omnes illas curvas, in quarum æquatione x & y utrimque ad eamdem dimenſionem attolluntur. At e contrario res ſe habet in parabola. Cum enim in ea ſemper ſit $y^2 = ax$, etiam quando ordinata y eſt infinita primi gradus, inde elicietur hæc analogia

$$x : y = y : a,$$

quæ palam facit x eſſe infinitam ſecundi gradus, ſcilicet infinitam habita ratione infinitæ y, ſicuti y eſt infinita habita ratione finitæ a.

5. Ex quibus illud generatim concludi poteſt primariam curvæ æquationem digito quaſi monſtrare, quænam inter ordinatas, & abſciſſas proportio intercedat, cum ad diſtantiam infinitam curva producta intelligitur: immo ex eadem confici poſſe, quænam inter differentialia ordinatæ, & abſciſſæ in eodem ſtatu infinitatis interſit. Nam ſi æquatio parabolæ in infinita a vertice diſtantia eſt

$ax = y^2$, erit diff.

$$a\,dx = 2y\,dy,$$ Unde exſiſtit analogia
$$a : 2y = dy : dx,$$
Quæ oſtendit dx eſſe pariter infinitam reſpectu dy.
At in hyperbola cum ſit in diſtantia infinita
$$ay^2 = bx^2,$$ & diff.
$$2ay\,dy = 2bx\,dx;$$ unde exſiſtit analogia
$$2ay : 2bx = dx : dy,$$
concluditur dx, & dy eſſe in eodem ſtatu, eo quod etiam y & x, $2a$ & $2b$ in eodem ſtatu deprehenduntur.

§. 78. Propoſitio

Atque hæc ſunt, quæ in toto capite methodi Tangentium directæ explicatione opus habere putabam. Nam cetera, quæ in eo conſequuntur, nihil habent difficultatis, quod a nobis oporteat examinari. Quamobrem ad caput III. tranſimus, quod totum eſt de uſu calculi differentialis in Methodo de maximis & minimis, atque in eo nihil eſſe ſtatuimus, quod a ſeveriori demoſtrandi ratione minimum abſit. Qua in re Problema §. 63. quod eſt omnium quæ ſequuntur, fundamentum & baſis, primo ad examen vocabimus, de iis, quæ hinc concluduntur, poſtea diſputaturi. Sit igitur curva AMB, (*Fig.* 12.), in qua ordinatæ MP, GC uſque ad certum gradum creſcunt, aut decreſcunt, a quo rurſus imminuuntur, aut augentur, v. gr. ab A uſque ad GC ordinatis quidpiam accedit, a GC vero uſque ad B quidpiam decedit, itaut GC ſit omnium maxima. Oportet hic definire quantitatem hujus omnium maximæ GC, vel minimæ ordinatæ, ſi res e contrario ſuccedat, vel etiam quantitatem abſciſſarum, quæ hiſce maximis, vel minimis ordinatis reſpondent. Ad quod efficiendum ita via munitur. In hujuſmodi curvis maximum, vel minimum habentibus tangens TM tandem degenerat in tangentem DGE, quæ in puncto curvæ G, cui maxima ordinata GC reſpondet, ab axe AB æquidiſtat, ideoque cum illo quantumvis producto numquam concurrit; quod perinde eſt, ac ſi in puncto infinite diſtanti concurreret. Sed ne Tyronibus id aliquam difficultatem faceſſat, inter A, & G punctum aliud infinite parvo intervallo diſtans a G imaginemur, e quo ſi ducatur tangens, hæc fere congruet cum GD, & ſi in infinitum produci quiret, cum axe BA producto ad diſtantiam infinitam vere concurreret. Quamobrem huic tangenti reſpondebit ordinata ſolum infiniteſima parte minor maxima ordinata GC, & ideo æqualis eidem juxta ea calculi infinito-

rum

rum principia, quæ in ſuperioribus explicuimus. His poſitis *erit in caſu maximi, vel minimi* (ait Wolphius) *ſubtangens TP infinita atque ſubnormalis PH nihilo æqualis* (proptereaquod ante adverterat ipſam ordinatam GC normalem curvæ in G fieri ut conſtat). *Eſt vero PH* (pergit auctor) $= ydy : dx$ (§. 35.). *Quod ſi ergo ponatur* $ydy : dx = o$, *reperietur* $dy = o$, *& ob* $PT = ydx : dx = \omega$ (*quæ eſt nota infinitatis*) $dx = \omega$,

2. Sed cum res ita explicata in difficultatem incurrat, quam infra examinabimus, rem mihi explicare placet alio modo, qui apud neminem offendat. Præterquamquod paradoxum videtur dx eſſe infinitam, ſive ſpectetur ut differentiale quantitatis infinitæ x, ſive quatenus juxta 20. Wolphii §. in valorem ſubtangentis ingreditur; niſi tamen infinita dicatur ratione habita quantitatis infinite parvæ ſaltem ſecundi gradus, quo modo a nobis accipitur & probatur. Nam ſi feceris punctum M eſſe illud infinite proximum G, de quo ſupra locuti ſumus, intelliges ſubtangentem TP eſſe infinitam, & ſubnormalem PH eſſe infinite parvam; eo quod MP infinite parvo intervallo diſtat ab eo, ut ſit curvæ normalis. Cum vero MS ſit $= dx$, & $SG = dy$, erit ex ſupra oſtenſis.

$$GS : MS = MP : PT$$

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Sed y eſt infinite parva habita ratione infinitæ PT, ideſt $\frac{ydx}{dy}$. ergo ut proportio ſervetur dy, erit infinite parva, ſi cum dx infinite parva primi gradus conferatur. Quod etiam hac alia ratione oſtenditur (*Fig.* 12.)

$$PT : PH = \frac{ydx}{dy} : \frac{ydy}{dx}, \text{ \& divid. per } y$$

$$PT : PH = \frac{dx}{dy} : \frac{dy}{dx}, \text{ \& multipl. per } dy$$

$$PT : PH = dx : \frac{dydy}{dx}, \text{ \& multipl. per } dx$$

$$PT : PH = dxdx : dydy$$

Sed cum PT ſit infinita & PH infinite parva, erit PT reſpectu PH infinite magna 2. gradus. Ergo etiam $dxdx$ eſt infinite magnum ſecundi gradus ratione habita $dydy$. Sed, ut conſtat ex ſuperioribus, radices dx, dy rationem habent ſubduplicatam, ideſt infinitam primi gradus in hoc caſu; ergo cum dx ſit

ſit infinite parva primi gradus, erit dy infinite parva ſecundi; ideoque pro nulla putari poteſt. Si quis vero reconditiorem hujuſce myſterii rationem petat, cur nimirum in locis curvæ ab A, & G finite diſſitis differentialia dx, & dy ſint infinite parva ejuſdem gradus, ut conſtat ex eo, quod ibi ſubtangens eſt finita, & ex proportione

$dy : dx = y :$ ad ſubtangentem,

in loco autem puncto G maximæ ordinatæ proximo PC, ſive MS, ſive dx differentiale abſciſſæ x maneat infinite parvum primi gradus, & SG, ſive dy differentiale ordinatæ ad infinite parvum ſecundi gradus deſcendat, recordari debet ejus, quod de converſione differentialium in locis curvarum, quæ eadem parametro manente in infinitum extendi poſſunt, ab apice infinite diſtantibus ſupra meminimus, §. 77. num. 6. Nam quod ibi in infinitis a vertice intervallis obtinetur, id infinito acceſſu ad maximam, aut minimam ordinatam hoc loco habetur. Nam ordinatæ licet æqualem infinite parvam abſciſſæ partem intercipientes eo minori quantitate differunt, quo ad maximam ordinatam CG propius accedunt, propterea quod ſemper fieri poteſt hæc analogia

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy},$$

Sed cum y multo minus creſcat, quam ſubtangens $ydx : dy$, quia manente ordinata y adhuc finita ſubtangens infinita fit: ratio y ad $\frac{ydx}{dy}$ ſemper fit minor. Cum ergo ponamus dx manere conſtantem, hinc dy ſemper imminui concludetur, ſed ab aliquo puncto finite diſtanti a G uſque ad GC in abſciſſa AC infinitæ numero dx eſſe poſſunt, ſive infinitæ numero ordinatæ proximæ ad eam applicari poſſunt. Ergo a puncto hoc finite diſtanti a G uſque ad G infinitæ partes de dy detrahi debent, ac propterea in intervallo minimo a G dy fieri neceſſe eſt infinite minorem dx. Dices; ſi dx eſt infinite parva primi gradus, qui fieri poteſt, ut ſubtangens $\frac{ydx}{dy}$ ſit infinita? Nam ſi in ea aliæ duæ quantitates y, & dy conſiderentur, habita illarum ratione infinita eſſe non poteſt, propterea quod y eſt finita, & dy infinite parva ſecundi gradus. Verum ob id ipſum quod y eſt finita, & dx, quæ ducitur in y, eſt infinita parva primi gradus, & dy hoc productum dividens eſt infinita parva

ſecun-

ſecundi $y\,d\,x : dy$ eſt quantitas infinita primi gradus. Nam ut ſupra advertimus, ex Corradi, §.73. num. 3. quantitas finita per infinite parvam ideſt $\frac{1}{\text{infiniteſimam}}$ alterius quantitatis diviſa fit maxima, ideſt infinita. Quare cum parallelogrammum $y\,d\,x$ factum ex radice finita y in radicem infinite parvam primi gradus $d\,x$ ſit infinite parvum primi gradus, & diviſum per lineam ad ſtatum lineæ redigi alioquin compertum ſit; hinc parallelogrammum $y\,d\,x$ infinite parvum primi gradus, ſi per lineolam dy infinite parvam ſecundi dividatur, ad rectam, ſive ſubtangentem TP infinite parvam primi gradus reduci concludetur. Nam eo major linea ex diviſione rectanguli oritur, quo diviſor minor fuerit. Unde ſi diviſor fuerit infinite parvus ratione habita utriuſque lateris rectanguli, recta ex diviſione prodiens ſit infinita neceſſe eſt.

3. His ita explicatis facile nobis erit intelligere rationem omnium eorum, quæ ex hoc problemate a Wolphio concluduntur. Sit enim, ex. gr. (*Fig.* 12.) AMGB circulus, & omnia, quæ ſupra deſcripta ſunt, perficiantur, ideſt prope maximam ordinatam CG ducatur infinite proxima $PM = y$; ideoque $AP = x$, & diameter $AB = a$, erit

$$a\,x - x\,x = y^2, \quad \text{\& differentiando}$$
$$a\,d\,x - 2\,x\,d\,x = 2\,y\,d\,y, \quad \text{\& tranſponendo}$$
$$a\,d\,x = 2\,y\,d\,y + 2\,x\,d\,x$$

Sed cum parallelogramma $a\,d\,x$, $2\,x\,d\,x$ conſtent ex finitis a & $2\,x$ in $d\,x$ infinite parvam primi gradus ductis; parallelogrammum vero $2\,y\,d\,y$ ex finita $2\,y$ in infinite parvam ſecundi gradus dy ducta componatur, hinc parallelogrammum $2\,y\,d\,y$ erit infinite parvum habita ratione $2\,x\,d\,x$, & pro nullo haberi veriſſime poterit, ſi modo & alia concurrant, quæ §§. ſuperioribus monuimus, videlicet ſi alteri addatur, aut detrahatur, ut revera hic fit. Quamobrem

erit $\quad a\,d\,x = 2\,x\,d\,x$, & dividendo per $d\,x$

$$a = 2\,x, \text{ \& divid. per } 2$$
$$\tfrac{1}{2}\,a = x = AP = AC;$$

quod A P & A C ſolum infinite parva quantitate $PC = d\,x$ differunt, atque ideo pro æqualibus habentur. Ex quo primum conſtat abſciſſam AC, quæ maximæ ordinatæ GC reſpondet, eſſe in circulo æqualem medietati diametri AB, quod etiam Planæ Geometriæ principiis conficitur. Jam

Digitized by Google

Jam vero in æquatione ad circulum $ax - x^2 = y^2$ pro x ſubſtituatur ejus valor $= \frac{1}{2} a$ erit $\frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{4} a^2$. Sed cum $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ ſit $= \frac{1}{4}$, erit $\frac{1}{4} a^2 = y^2$, & extrahendo radicem $\frac{1}{2} a = y$. Quod denuo conſtat ex Geometria Plana.

4. Wolphius ſuis innixus principiis ita hoc in negotio ſe gerit:

$ax - x^2 = y^2$, & diff.

$adx - 2xdx = 2ydy$, & divid. per $2y$

$\frac{adx - 2xdx}{2y} = dy = 0$. Unde inferri poteſt

$\frac{adx}{2y} = \frac{2xdx}{2y}$, & divid. per dx, & multipl. per $2y$

concluditur $a = 2x$, & $\frac{1}{2} a = x$.

Verum in hac methodo id eſſe poteſt difficultatis, quod primo dx ponitur infinita, & viceverſa dy ponitur nulla, deinde allata in medium æquatione circuli $ax - x^2 = y^2$, differentia invenitur $adx - 2xdx = 2ydy$; quod verum eſſe non poteſt, niſi dx pro quantitate infinite parva accipiatur. Ne ego quidem inficias eo hanc methodum & noſtram eodem tandem recidere. Sed eo præſtat methodus noſtra, quod in evolvendis notionibus principiorum, ex quibus alia de maximis & minimis conficiuntur, nihil abſurdi, nihil paradoxi, nihil, quod non vel a tyronibus facile queat intelligi, affert, & ex una illa hypotheſi, quod prope maximam GC ducatur alia ordinata infinite proxima MP, cujus hypotheſis poſſibilem ſenſum in ſuperioribus explicavimus, omnia alia dilucide ſimul & neceſſario concludit.

5. Ceterum ad id confirmandum placet etiam in ellypſi definire maximam ordinatam y, & abſciſſam illi reſpondentem x. In ellypſi eſt

$bx - bxx : a = y^2$, & diff.

$bdx - 2\, bxdx : a = 2ydy$, & tranſp.

$bdx = 2bxdx : a + 2ydy$, cumque

$2ydy$ ſit infinite parva reſpectu $2bxdx$,

erit $bdx = 2bxdx : a$, & divid. per dx erit

$b = 2bx : a$, & multiplicando per a erit

$ab = 2bx$, & divid. per b

$a = 2x$, & divid. per 2, erit $x = a : 2$

Unde liquet etiam in ellypſi abſciſſam reſpondentem maximæ ordi-

Digitized by Google

ordinatæ ecce $\frac{1}{2}a$, ſive $\frac{1}{2}$ axis majoris. Si vero in prima æquatione ſubſtituatur pro x valor $a:2$ fiet $ba:2-ba:4=y^2$, ideſt $y^2=ba:4$, & $y=\sqrt{(ba)}:2$.
Quod pariter conſtat ex ſectionibus conicis.

§. 79. Propoſitio

Manet igitur, qua ratione definienda ſit maxima, vel minima ordinata, & abſciſſa, quæ illi reſpondet, in curvis algebraicis, in quibus ordinatæ uſque ad certum gradum augentur, vel minuuntur, unde iterum minuuntur, vel augentur. Verum alius eſt etiam hujus methodi uſus in definiendis aliis quantitatibus, quæ ad certum pariter gradum creſcunt, vel decreſcunt, ex quo deinceps decreſcere, vel creſcere incipiunt, tametſi curvarum ordinatæ non ſint, immo quantumvis intra illas curvas reperiantur, quarum ordinatæ vel ſolum augentur in infinitum ut ordinatæ intra hyperbolam & parabolam, vel ut ordinatæ intra ſpatium aliquod aſymptoticum, ſolum imminuuntur. Verum hæ quantitates exprimendæ ſunt per ordinatas alterius curvæ, ut hic docturi ſumus. Ex dato itaque (*Fig.* 13.) puncto R in axe AX curvæalgebraicæ ducere oportet ad perimetrum curvæ AM rectam RM, quæ ſit minima omnium, quæ ab eodem puncto R ad perimetrum duci poſſunt. Sit $AP=x$, $PM=y$, $AR=c$, erit $PR=c-x$, & ob $PM^2+PR^2=RM^2$ (§. 417. Geomet. Wolphii) erit $RM^2=c^2-2cx+x^2+y^2$. Ponamus autem aliam curvam, cujus minima applicata ſit MR, ad convexitatem ſcilicet curvæ. Nimirum (*Fig.* 14.) ſuper rectam HS ad aliquid ejus punctum C erigatur perpendicularis CG, quæ ſit $=$ RM (*Fig.* 13.), & vocetur z, cujuſque quadratum ſit $=c^2-2cx+x^2+y^2$, & ad eamdem rectam HS (*Fig.* 14.) applicentur aliæ utrimque ordinatæ majores, v. gr. PM, TR, quæ eadem æquatione exprimantur.

2. His poſitis differentiale z^2, quod eſt $2z\,dz$, erit quantitas infinite parva ſecundi gradus habita ratione differentialium, quæ ex quadratis ordinatæ PM, vel TR exſiſtunt, ideoque loco nihili habendum eſt, ſcilicet $2z\,dz=0$ §. ſuperiore. Cumque z^2 ſit $=c^2-2cx+x^2+y^2$ ex hypotheſi, erunt etiam eorum differentialia alterum alteri æquale, nimirum

$$-2c\,dx+2x\,dx+2y\,dy=2z\,dz=0,$$ & divid. per 2 erit $y\,dy+x\,dx-c\,dx=0$, & tranſponendo

$$y\,dy=-x\,dx+c\,dx$$

Quod

Quod ſi ex æquatione data cujuſdam curvæ ſubſtituatur valor ipſius ydy, eruere licebit valorem x, & inde ſitum, ſive qualitatem minimæ RM.

3. Ex. gr. in parabola ex §. 21. Anal. Infin. Wolphii $\frac{1}{2}\ adx = ydy$; ergo ſubſtituendo valorem hunc in ſuperiore æquatione erit

$$\frac{1}{2}\ adx = cdx - xdx,$$

& dividendo per dx ut evaneſcant infinite parva juxta ea, quæ alias advertimus erit

$\frac{1}{2}a = c - x$, & iterum tranſp.

$x = c - \frac{1}{2}a$ Hinc multipl. per a parametrum

$ax = ac - \frac{1}{2}a^2 = y^2$ Ex æquatione parabolæ.

Ex quibus eruetur valor ipſius RM (*Fig.* 13.). Nam $c - x = PR$ ex hypotheſi; unde $PR = a : 2$, & $(PR)^2 = a^2 : 4$, & $(RM)^2 = (PR)^2 + (PM)^2 = a^2 : 4 + y^2 = a^2 : 4 + ac - a^2 : 2 = ac - a^2 : 4$, & $RM = \sqrt{(ac - a^2 : 4)}$
Quia PR utpote æqualis $c - x$ eſt $= a : 2$, evidens eſt PR eſſe ſubnormalem, atque ideo MR normalem, atque ideo patet. Theorema. Perpendicularis ad parabolam eſt minima omnium, quæ ex dato in axe puncto ad eam duci poteſt.

4. Hæc fere cum Wolphio locuti ſumus, ſed cum is ne verbum quidem faciat de proportione, quam intercedere oportet inter ordinatas, & abſciſſas illius curvæ, quæ aſſumitur, cujuſque minima applicata CG (*Fig.*14.) rectam RM (*Fig.*13.) exæquat; in eo definiendo magna mihi ſe objicit difficultas. Nam vel pono inter ordinatas hujus curvæ diverſam ab illa rationem, quam habent rectæ aliæ a puncto R (*Fig.* 13.) ad perimetrum curvæ ex utraque parte RM ductæ, quæ omnium breviſſima ponitur: vel pono eamdem, itaut cum CG (*Fig.* 14.) ſit æqualis rectæ RM (*Fig.* 13.) etiam aliæ omnes PM, TM (*Fig.* 14.) ſingulis aliis a puncto R (*Fig.* 13.) ad perimetrum ductis æquales ſint. Si primum; non video quomodo ex eo quod z^2, ſive $(CG)^2$ (*Fig.* 14.) eſt $= (MR)^2$ (*Fig.* 13.) $= c^2 - 2cx + x^2 + y^2$, etiam eorum differentialia $2zdz$, $2xdx + 2ydy - 2cdx$ eſſe æqualia rite concludatur. Nam differentialia

tialia quantitatum æqualium æqualia non ſunt, niſi quando illæ quantitates æqualiter & in eadem proportione creſcunt, §. 73. num. 2. At ſi inter ordinatas curvæ VR (*Fig.* 14.), & inter rectas (*Fig.* 13.) RM, & alias omnes a puncto R ad perimetrum curvæ ductas alia, & alia proportio eſt, quis unquam dicet CG (*Fig.* 14.) æqualiter creſcere ac MR (*Fig.* 13.), tametſi æquales poſitæ fuerint. Sin vero alterum ordinatæ hujuſmodi æquales ordinatis RM, R*m*, R*u* non ſemper eadem æquatione exprimentur; contra quam in methodo tangentium directa, qua methodus de maximis & minimis innititur, ut conſtat, ponere videmur. Siquidem cum agitur de ordinatis æqualibus rectæ R*m*, & aliis omnibus ſuperioribus uſque ad verticem A, res bene ſe habet, quia *p*R ſemper eſt = AR — A*p*, ſcilicet $c - x$; at in omnibus infra RM poſitis res non cadit ſimiliter, propterea quod RM aliquando convertitur in ordinatam R*u*, & tunc $(Ru)^2 = y^2$ tantum prorſus evaneſcente PR, aliquando in R*m* infra ordinatam R*u*, & tunc R*n* fit æqualis non $c - x$ ut antea, ſed A*n* — AR, ſcilicet $x - c$.

5. Verum abſolute pronuntiandum eſt ordinatas hujuſmodi eſſe oportere rectis RM, R*m*, R*u* &c. æquales ut nimirum dicta, inter differentialia æqualitas habeatur. Quo uno hæc de maximis, & minimis methodus maxime innititur. Ut vero id explicetur dilucide, primum fac RM, R*m* (*Fig.* 13.) eſſe infinite propinquas, & centro R deſcribe arcum M*ſ*, qui non diſcrepabit a recta M*ſ*, quæ haberi poſſit loco illius, quæ rectis MR, *ſ*R ad perpendiculum inſiſtit. Siquidem ex puncto M ducta M*n* parallela rectæ *ſ*R, efficietur angulus *n*MR infinite parvus utpote æqualis alterno infinite parvo MR*m*, atque ideo nullus habita ratione alterius *ſ*MR, qui ob eam cauſſam rectus exſiſtet. Inſuper ex puncto *m* ducatur perpendicularis *mr* ad MP. His poſitis cum MR ſit $= z$, erit $mſ = dz$, ſive erit differentiale ipſius z; & $Rm = z + dz$. Cum vero abſciſſa AP $= x$ hic decreſcat, & in A*p* vertatur, erit $pP = mr = - dx$, & $Ap = x - dx$; cum vero pariter ordinata PM decreſcat, & in ordinatam *mp* degeneret, erit $MV = - dy$, & $pm = y - dy$. Viceverſa ſi initium ſumamus ab *m*R, & ideo ſit $mR = z$, $Ap = x$, $mp = y$, erit $MR = Rm - Sm = z - dz$, $AP = x + dx$, & $MP = y + dy$, quod ponere præſtat, ut æquatio differentialis ſimilior ſit æquationis Wolphianæ. His poſitis cum hæ quantitates ita creſcant ut ſemper eadem æqua-

tio-

tio ſervetur; nimirum R*m*, $RM=z$ ſint ſemper æquales $c^2 - 2cx + x^2 + y^2$, earum differentialia ſemper æqualia iis, quæ diximus, §. 73. num. 1. conficientur ſcilicet

$$-2cdx + 2xdx + 2ydy = -2zdz$$

Quod ſi infra RM ſumatur alia R*m*, itaut abſciſſa R*n* fiat $= AP - AR = x - c$, nihilominus eadem æquatio ſubſiſtit; proptereaquod ſive ad potentiam quadratam eleves $x - c$, ſive $c - x$, idem quadratum $c^2 - 2cx + x^2$ exſiſtit. Quare difficultatis cardo erit in ordinata R*u*, quæ eſt æqualis ordinatæ curvæ AM, cujuſque idcirco quadratum $z^2 = y^2$. Verum id nihil obſtare docebimus, ut hujuſmodi RM, R*m*, R*m* ad aliam curvam tranſtulerimus:

6. Nam ſuper rectam HS (*Fig.* 14.) ad perpendiculum erigamus CG æqualem minimæ RM (*Fig.* 13.), & PM, TR (*Fig.* 14.) infinite parvo intervallo diſſitas a CG, & æquales R*m*, R*u* (*Fig.* 13.) & alias infinitas lineas rectas æquales rectis omnibus, quæ ab R ad perimetrum A*m*M*u* duci poſſunt. Inde exſiſtet curva VGX (*Fig.* 14.), in qua ab V uſque ad G ordinatæ decreſcunt, & a G uſque ad X augentur. Quamobrem hæc methodo de maximis, & minimis erit obnoxia, præſertim cum eadem æquatione ordinatæ omnes contineantur. Id tamen docendum relinquitur differentialia CG, PM eſſe æqualia differentialibus R*m*, RM (*Fig.* 13.) ut, quod neceſſarium eſt, inde concludere poſſimus differentiale z^2 eſſe æquale differentiali $c^2 - 2cx + x^2 + y^2$. Quamobrem ajo (*Fig.* 14.) MS differentiale PM habita ratione CG eſſe æquale lineolæ *ſm* (*Fig.* 13.), quo diſcrimine R*m* differt ab RM. Sit (*Fig.* 15.) enim ordinata PA, & alia ordinata creſcens PS cum illa ad angulum infinite parvum APD concurrens, fiat alia $CN = PS$ parallela PA, compleanturque rectangulum APCD, & triangulum DS*e* rectangulum in *e*, immo etiam in S ob infinite parvum angulum D: eritque ob ſimilitudinem triangulorum PDC, SD*e*, PD : DC = SD : *e*D, ſed PD ſolum differt infinite parva quantitate a DC; ergo SD pariter differt ab *e*D, ſive ND = *e*D = DS. Quo conficitur id, quod propoſui; rem enim ita ſic ſe habere nemo non videt; quamobrem differentiale SM (*Fig.* 14.) differet ab S*m* (*Fig.* 13.) quantitate ſolum infinite parva, atque idcirco erit æquale: ergo ordinatæ CG, PM (*Fig.* 14.) & erunt æquales ordinatis RM, R*m* (*Fig.* 13.), & eadem.

æqua-

æqualitatis proportione augebuntur, ſi modo etiam abſciſſæ CP (*Fig.* 14.) interceptæ inter duas quaslibet ordinatas contiguas CG, PM fiant $=$ rectis Mf (*Fig.* 13.) ut colligitur ex *Fig.* 15. in qua $AD = PC$ reſpondet abſciſſis Mf (*Fig.* 13.). Quo fit, ut differentiale quadratorum PM, CG (*Fig.* 14.) $=$ ſit differentiali quadratorum RM, Rm (*Fig.* 13.), atque $-2cdx + 2xdx + 2ydy = 2zdz = 0$, ut conſtat ex ſuperioribus; ergo $-2cdx + 2dx + 2ydy = 0$. Q. E. Oſtendendum. Quamvis autem in Ru abſciſſa x ſit $= AR = c$, atque ideo $x - c$, vel $c - x = 0$, tamen eadem æquatio ſubſiſtere poſſet, ſcilicet $z^2 = y^2 + c^2 + x^2 - 2cx$, tametſi perinde eſt ac ſi termini $c^2 + x^2 - 2cx$ adjecti non fuiſſent: quia cum $c^2 + x^2$ ſint $= 2cx$, erit $c^2 + x^2 - 2cx = 0$. Cum vero ante reſolutionem problematum ponatur quidem RM eſſe minima omnium, ſed ignoretur, quem occupet ſitum, an ordinatæ Ru, an ſitum ſupra illam, an infra; retinenda eſt æquatio $z^2 = y^2 + c^2 + x^2 - 2cx$, & expectandum, dum ex æquationis generalis ad caſus ſpeciales curvarum applicatione eruatur, utrum $c - x = 0$, quod indicat x eſſe æqualem c, atque ideo z confundi cum ordinata, an $c - x =$ quantitati poſitivæ, quod ſignificat x eſſe minorem c, & z cadere (*Fig.* 13.) ſupra ordinatam, ut revera contingit, & reſolutio docet in ſectionibus conicis, v. gr. in parabola $c - x = \frac{1}{2} a$, an denique $c - x =$ quantitati negativæ, quod exprimeret x eſſe majorem c, & minimam z cadere infra ordinatam. Quemadmodum enim calculus in ſecundi cognitionem nos duxit, quia res ita ſe habet, ita ſi res aliter foret, in alteram cognitionem manu quaſi duxiſſet.

7. Sed quoniam de theorematis, in quibus dy eſt infinite magna non quidem in ſe, ſed ratione habita dx, verbum adhuc non fecimus, ante præſtat in hunc locum pauliſper excurrere, quam ad calculum integralem veniamus. Cum itaque tangens curvæ in eo puncto, ad quod pertinet maxima vel minima ordinata, ſit parallela axi, & ſemiordinatæ ad angulos rectos inſiſtit, dy reſpectu dx infinite parvam fieri vidimus. Nunc videndum eſt quid contingere oporteat, cum hæc tangens in puncto, ubi eſt maxima, vel minima applicata, cum ſemiordinata congruit, ſive ab illa æquidiſtat, & diametrum ad rectos angulos ſecat. Sit ex. cauſſa parabola

Digitized by Google

VG (*Fig. 16.*), cujus vertex in G; diameter BE finito intervallo diſtans a vertice G, tangens in vertice G cum ſemiordinata GC congruet: ſumatur infinite parva GM, & ad punctum M ducantur tum alia ordinata MB, ad quam erigatur perpendicularis GH a puncto G, tum tangens LM, quæ producta tranſiet per G, & cum diametro AE concurret in puncto T, quod ob infinite parvum angulum BMT intervallo minimo diſtabit a B, atque ideo ſubtangens TB infinite parva. Quibus poſitis

erit $$MB : BT = MH : HG$$

$$y : BT = dy : dx$$

Sed y finita ex hypotheſi eſt infinite magna reſpectu $BT = y\,dx : dy$; ergo dy hoc in loco tametſi infinite parva, nihilominus eſt infinite magna, ſi ratio habeatur dx, quæ idcirco $= o$, ſi cum dy comparetur, ſive $=$ infinite parvo ſecundi gradus, propterea quod dy ponitur infinite parva primi. Quare non video cur Wolphius, §. 63. Anal. Infin. dicere potuerit. *Sunt nimirum tum* d x, *quam* y *intuitu* d y *infiniteſimæ*. Id enim cadit in dx, non in $y = BM$, quæ cum ſit finita, eſt ſemper infinite major dy. Quare, ut leviſſime dicam, hic loquendi modus nimis improprius eſt, qui etſi præſtantes Geometras, e quorum numero eſt Wolphius, in ſolutione problematum in errorem non trahit, tamen nimium tyronibus, qui ſine Præceptore ad hæc animum appellunt, negotium facit. At ſi res ita ut fecimus tractetur, nihil eſt neque in generali problemate, ut modo oſtendimus, neque in problematis ſpecialibus inde profectis, ut mox docebimus, quod non planiſſimum ſit.

Sit itaque ex §. 68. Anal. Inf. Wolphii

$$y - a = a^{1:3}(a - x)^{2:3}$$ erit differen.

$$dy = -2a^{1:3}\,dx : 3\,(a - x)^{1:3}$$

Quamobrem erit $dy \cdot 3\,(a - x)^{1:3} = -2a^{1:3}\,dx$; ex qua æquatione educitur hæc analogia

$$-2a^{1:3} : 3\,(a - x)^{1:3} = dy : dx.$$

Cum alterutrum ex dy, vel dx ſit infinite parvum reſpectu alterius, ut conſtat ex dictis, propterea quod tangens in puncto maximæ, vel minimæ ordinatæ vel cum ordinatis congruit, vel iiſdem ad angulos rectos, aut obliquos inſiſtit; hinc vel $-2a^{1:3}$ debet eſſe infinite parva reſpectu $3(a - x)^{1:3}$, cum ſcilicet dy eſt $= o$ reſpectu dx, vel $3\,(a - x)^{1:3}$ reſpectu $-$

2 a

$2a^{1:3}$, ſi e contrario $dx = 0$ reſpectu dy. Sed cum hoc in loco primus terminus habeat ſolum quantitatem conſtantem a, ſecundus autem conſtantem a variabili x mulctatam, ſatis conſtat $-2a^{1:3}$ eſſe non poſſe infinite parvam reſpectu $3(a-x)^{1:3}$; bene vero $3(a-x)^{1:3}$ reſpectu $-2a^{1:3}$. Sed cum quantitas a ſit finita, $3(a-x)^{1:3}$ alia ratione nequit eſſe $= 0$, ſive quantitati infinite parvæ, niſi x ſit $= a$, ſive ab ea ſolum quantitate infinite parva diſcrepet. Ergo ex his optime concluditur eſſe $3(a-x)^{1:3} = 0$, & etiam $3(a-x) = 0$; itemque $a-x=0$, & $a=x$. Unde cum $y-a$ ſit $= a^{1:3}(a-x)^{2:3} = a^{1:3}.0$, erit $y-a=0$, & $y=a$.

8. Atque hac ratione in omnibus aliis problematis veniri poteſt in cognitionem, quandonam dy ſit infinite parva, quando vero dx. Nullum aliud exemplum affero. Verum tyrones id tentent in ſuperioribus exemplis, & omnem ſcruplum, ſi quis reſedit, eximet experientia, v. gr. in circulo eſt $ax - x^2 = y^2$; unde in puncto maximæ vel minimæ ordinatæ erit

$$a\,dx - 2x\,dx = 2y\,dy;$$

ex qua æquatione hæc analogia exſiſtit $a - 2x : 2y = dy : dx$. Cum vero $2y$ nequeat eſſe infinite parva, utpote finita, reliquum eſt ut ſit infinite parva $a - 2x$, quod eſſe non poteſt, niſi $2x$ ſit $= a$, ſive infinite parva quantitate ab a differat. Cum vero $a - 2x$ ſit infinite parva reſpectu $2y$, ſequitur dy eſſe pariter infinite parvam reſpectu dx.

9. Hac vero methodo poſſumus etiam in cognitionem venire curvarum, quæ nullum maximum, aut minimum habent. Sit enim, ex. cauſſa æquatio parabolæ

$$ax = y^2; \quad \text{erit differentiando}$$
$$a\,dx = 2y\,dy; \quad \text{unde elicitur hæc analogia}$$
$$a : 2y = dy : dx,$$

Ex qua dignoſcitur neutrum ex dy, & dx eſſe poſſe reſpectu alterius infinite parvum, propterea quod primi duo termini a, & $2y$ finiti ſunt, nec ullo modo alter eſſe minimus poteſt, ſi cum altero conferatur, niſi $2y$ infinite parvus ſumatur, ſcilicet prope verticem, quo loco dy eſt infinite magnus reſpectu dx, aut infinite parvus in diſtantia a vertice infinita, quo loco dx eſt infinite magnus ratione habita dy. Ex quibus concluditur cum a & $2y$ ſunt finita, parabolam maximum, aut minimum non habere.

Sit etiam æquatio hyperbolæ

 ay^2

$ay^2 = abx + bx^2$, & diff.

$2aydy = abdx + 2bxdx$; unde educitur hæc anal.

$2ay : ab + 2bx = dx : dy$

Ex qua iterum concluditur neutrum ex terminis eſſe poſſe reſpectu alterius infinite parvum.

10. Sed ut hanc materiem concludam, ne unquam hic offendamus, certi prius eſſe debemus maximum, aut minimum exſiſtere, quam illius quantitatem inveniamus. Hoc enim pacto nodos Guinæi vitabimus, de quibus vide Crouſatium in Comment. ad Artic. 46. Anal. Inf. Hoſpitalii. Re autem vera in transferenda hac methodo ad Phyſicam & Aſtronomiam quantitas minima, aut maxima ſemper certa eſt, & ex natura problematis quænam ſit maxima, aut minima dignoſcitur.

Scholion

Atque hæc omnia arbitratus ſum late explicanda, ne quid in methodo de maximis, & minimis reſtaret, quod ejus demonſtrationibus tenebras aliquas offunderet. De his, quod ego ſciam Geometræ ne verbum quidem; verum hac de cauſſa fieri puto, ut multi, qui ingenio ceteroquin pollent, atque etiam in communi Analyſi verſati ſunt, præſertim in Provinciis, in quibus non ſunt idonei Præceptores, præſtantiſſimam hanc eamdemque omnium maxime utilem Analyſis partem, quæ de infinitis agit, non attingant. Nam ipſe per ſe calculus infinitorum in quamplurimis mihi non videtur in majores incurrere difficultates, quam multæ communis Algebræ partes, illæ præſertim, quæ de æquationibus deque locis Geometricis diſſerunt. Sed maxima difficultas jam tum, cum ad hanc diſciplinam appuli, mihi ſemper viſa eſt poſita in dilucide percipiendo, quomodo ſubductis juxta Regulas Calculi Differentialis atque Integralis rationibus, quod Mathematici volunt, conficiatur. Hanc difficultatem ut tollerem, hunc in locum orationem induxi meam, & ſuperiora de Calculo differentiali ſum commentatus plura quoque in eumdem finem in ſequenti articulo diſputaturus.

A R-

Digitized by Google

ARTICULUS IV.

De nonnullis, quæ in Calculi Integrali difficultatem facere poſſunt.

§. 80. Propoſitio

CAlculo differentiali, quem hactenus explicavimus, modo accidit, ut demonſtrationes abſolvantur, ut in methodo tangentium directa, & in methodo de maximis & minimis fit, modo ut inchoentur ſolum perficiendæ alio Calculo, quem Integralem, ſive ſummatorium appellant, quique contrarius eſt differentiali, quemadmodum multiplicatio diviſioni. Nam quæ quantitas finita Calculo differentiali ad infinite parvam redigitur, illa integrali reſtituitur, ſive ejus differentiale ad finitam, unde exiſtit, reducitur, ut ſi quantitas per ſecundam dividitur, & minor fit, multiplicata per eamdem ſecundam rurſus exſiſtit. Fundamentum hujus calculi eſt, quod cum in differentiali, finita quantitate in infinitas numero partes, ſed infinite parvas diviſa, ejuſdem finitæ quantitatis pars, aut aliquot tantum partes infinite parvæ ſumantur, in integrali ſumma infinita horum omnium infinite parvorum eſt æqualis eidem quantitati finitæ, atque ideo omnia infinita numero minima in unam ſummam colligenda ſunt, ut inde quantitas finita conſiat. Quemadmodum enim ſi, recta in centum partes diviſa, una centeſima, aut aliquot centeſimæ conſiderentur, ſumma 100 partium, quarum ſingulæ illi $\frac{1}{100}$ ſint æquales, dat illam rectam, Ita ſi per diviſionem infinitam ex quantitate finita pars, aut partes infinite parvæ extrahantur, ſumma infinita partium, quæ huic parti, vel partibus ſint æquales, quantitatem finitam reſtituit.

2. Immo advertendum eſt, quod uti ſumma infinita infinite parvorum 1. gradus dat quantitatem finitam, ita ſumma infinita infinite parvorum 2. dat ſolum quantitatem infinite parvam 1. & ſumma parvorum 3. dat infinite parvam 2. pariter ſi ſummam infinitam quantitatum finitarum colligas, infinita 1. gradus exſiſtit; ſi ſummam infinitarum 1. gradus, infinita 2. generis oritur & ita porro in infinitum. Quæ omnia ita per ſe clara ſunt, uti illud principium per ſe notum; totum

eſt æquale ſuis omnibus partibus una ſumptis, quo innituntur. Verum in eo difficultas poſita eſt, qui hujuſmodi ſummæ infinitæ colligantur. Lex Generalis eſt, ut obſervantes, quæ ex quaque quantitate differentialia naſcantur, & quo quæque modo habeantur, eas quantitates ſummas infinitas putemus differentialium ſimilium iis, quæ ex datis quantitatibus ortum habent, & ad eas inveniendas modum contrarium ei, qui differentiando adhibitus fuit, uſurpemus. Ita quia differentiando x habetur dx, integrando dx, ſi in aliquo problemate occurrat, rurſus exſiſtere x, ſcilicet lineam, qua exprimitur x, cognoſcemus. Ita quia differentiale $x+y$, vel $x-y$ eſt $dx+dy$ vel $dx-dy$, ſi in illud inciderimus, integrale erit $x+y$, vel $x-y$, videlicet duæ rectæ. Ita quia differentiale $xx=x^2$ eſt $xdx+xdx=2xdx=2x^{2-1}dx$ & differentiale x^3 eſt $=x^2dx+x^2dx+x^2dx=3x^2dx=3x^{3-1}dx$, & differentiale $x^4=4x^3dx=4x^{4-1}dx$, ideſt, quia generatim loquendo differentiale cujuſcumque potentiæ habetur multiplicando radicem per exponentem potentiæ, & per differentiale ejuſdem radicis, & elevando radicem ad exponentem unitate minorem, ex. gr. x^4 multiplicando per $4dx$, & efficiendo $4x^4dx$, & exponentem 4 mulctando unitate $4x^{4-1}dx=4x^3dx$, quod generatim ita exprimi ſolet diff. x^m, intellecto per m quocumque exponente, eſt $mx^{m-1}dx$; idcirco ſumma horum omnium ideſt $S\,2x^1dx$, ſive $S\,2xdx=x^2$ quadrato, $S\,3x^2dx=x^3$ cubo, $S\,4x^3dx=x^4$ potentiæ quartæ, & univerſim $S\,mx^{m-1}dx=x^m$, & omnes has ſummas contrariis operationibus habebimus, ſcilicet quia ex exponente detracta eſt unitas, exſiſtet exponens addendo unitatem, unde $3x^2dx$ primo transformabitur in $3x^3dx$; quia vero radix multiplicata fuit per exponentem, & per ejus differentiale ſcilicet per $3dx$, per eadem dividetur $3x^3dx$, & exſiſtet x^3 ſumma, & generatim $mx^{m-1}dx$ integrabitur, ſi primo exponenti $m-1$ unitatem adjicias, & fiat $mx^{m-1+1}=mx^m\,dx$, & inde per hujuſmodi novum exponentem, & per dx ſcilicet per mdx partiaris $mx^m\,dx$, & x^m obtineas. Ceterum ex his nondum conficitur, qualis ſit horum integralium quantitas, ſed illud tantum, utrum integralia reſpondeant quantitatibus vel ſeorſim ſpectatis, ut x, an conjunctis per additionem, vel detractionem, ut $x+y$, vel $x-y$, an multiplicatis, aut diviſis, ut x^2, vel $x:y$.

3. Quod ipſum tamen ſua difficultate non caret; nam primo cum

cum differentiale $x+a$, vel $x-a$ ſit ſolum dx, perinde ac ſi foret tantum x, quod conſtans nec creſcit, nec imminuitur, ſi obviam fiat in quodam ſolvendo problemate, quis diſpicere poterit, quandonam ejus integrale ſit tantum x, vel quandonam $x+a$, quando $x-a$? Deinde ſuſpicari poſſumus differentialia oriri poſſe a diverſis quantitatibus, & circa quas diverſæ operationes factæ fuerint. Ut in Algebra ex eo, quod habemus numerum 30. inferri non poteſt id factum eſſe ex duobus numeris ſe multiplicantibus, ut ex 10. ducto in 3, propterea quod ex duobus numeris additis, v. gr. a 10. + 20. fieri potuit. Quid ni accidat idem in analyſi infinitorum? ut nimirum certum, ex. gr. ſit x^3, ſi differentietur, eſſe $3x^2dx$, non tamen certum & exploratum eſt $3x^2dx$ oriri ſolum ab x^3, atque idcirco integrando ad x^3 reduci oportere. Nonne $3x^2dx$ fieri poteſt ex xdx multiplicato per quantitatem $3x$? Denique cum x^{-1} ſit $=\frac{1}{x}$, integremus, ſi placet, per illam generalem Regulam $x^{-1}dx$, & videamus, quæ quantitas inde exſiſtat: ſcilicet exponens augeatur unitate, & fiat $x^{-1+1}dx$, & erit erit $x^0 dx$, non autem xdx, quod in xdx x intelligitur elevata ad potentiam primam ſcilicet $x=x^1$. Deinde quantitas $x^0 dx$ dividatur per $0dx$; quo facto quænam bone Deus! inexplicabilis quantitatis ſpecies exſiſtet $\frac{x^0 dx}{0dx}=\frac{x^0}{0}$? Quamobrem ille modus potentiarum differentialia integrandi univerſe tutus non eſt.

4. His ut ex parte nunc ſatisfaciamus, nam in præſenti id omnino præſtare non poſſumus, ſciendum eſt calculi integralis problemata quatuor potiſſimum perfici. Primo ordimur ab æquatione curvæ conſtante, quæ vel aliunde nota eſt, vel ad arbitrium ponitur. Tum hujus æquationis terminorum differentialia invenimus. Poſtea per hæc differentialia valorem detegimus elementi quantitatis illius, cujus notitiam inveſtigamus. Hoc autem modo in cognitionem venitur quantitatis conſtantis, quæ vel addenda, vel ſubducenda eſt, ut verum quantitatis valorem habeamus. Ceterum hæc, quæ generatim enuntiata obſcura videbuntur, ita infra faciemus perſpicua, ut tyronibus ipſis ea nos probaturos ſperemus.

5. Quod ad alterum attinet, nego idem differentiale poſſe habere ortum ex quantitatibus diverſis, circa quas diverſæ opera-

Digitized by Google

tiones factæ fuerint, v. gr. a duabus, quarum altera alteri addita fuerit, & ab aliis duabus, quarum altera per alteram fuerit multiplicata, ut ſæpe uſuvenit in analyſi finitorum. Nam differentialia non ſunt, niſi minima quantitatum elementa, quibus minimo tempore augeri, aut mulctari eædem quantitates intelliguntur. Quamobrem elementa potentiæ 1, ſive linearum nequeunt eſſe, niſi lineolæ, quæ exprimuntur per dx, vel per $dx+dy$, vel per $dx-dy$; elementa vero potentiæ ſecundæ, vel ſuperficierum, quæ duabus quantitatibus ſe multiplicantibus exprimuntur, eſſe non poſſunt, niſi parva rectangula, quæ ita efferuntur ydx, vel xdy, & elementa potentiæ 3, vel ſolidorum, quæ ſaltem tribus quantitatibus in ſe ductis ſignificanda ſunt, non ſunt, niſi exigua ſolida, quæ tribus quantitatibus in ſe ductis coaleſcunt, quarum duæ ſunt finitæ, tertia vero infinite parva, ut $yzdx$. Idemque ratiocinare de omnibus aliis potentiis. Multum igitur abeſt, ut eadem differentialia referantur ad quantitates, circa quas diverſæ operationes additionis & multiplicationis factæ fuerint. Nam quod objectum fuit $3x^2dx$ poſſe oriri tum a quantitate infinite parva xdx multiplicata per quantitatem finitam $3x$, tum ab x^3, nihil obeſſe poteſt iis, quæ ſtatuta fuerunt. Cum enim eſt differentiale unius variabilis, ſive illius augmentum, aut decrementum, aliorum omnium variabilium differentiale, ſive augmentum, vel decrementum exſiſtat neceſſe eſt. Non enim in variabilium numerum referendæ forent, niſi creſcentibus, aut decreſcentibus quibuſdam variabilibus ipſæ quoque creſcerent, aut imminuerentur. Quamobrem in quo problemate habetur xdx, in eo $3x$ conſtans eſſe non poteſt.

6. Ad tertium eorum, quæ objecta ſunt, ajo cum Cl. Corradi *Mem. Anal. del Cal. Diff. num.* 142. qui ſimilem formam vulgari methodo enucleandam ſuſcepit in eo caſu hanc methodum haud eſſe idoneam: ex quo tamen inferri non poteſt in aliis caſibus, in quibus exponens variabilis unitate addita remanet $=$ quantitati aut poſitivæ, aut negativæ, eam non eſſe attendendam. Quamquam etiam in hoc caſu methodum non eſſe omnino ineptam conficitur ex eo, quod altera ex parte $\frac{x^0}{0}$ eſt $= \frac{1}{0}$, ideſt $=$ quantitati finitæ per infinite parvam diviſæ,

ideo-

ideoque quantitati infinitæ; ex altera vero integrale differentialis $dx : x$ eſt pariter quantitas infinita, ut infra oſtendemus. Ceterum reconditiora hæc analyſis myſteria alium in locum rejcienda puto, ut explicatione eorum, quæ magis obvia ſunt, viam nobis ad eadem intelligenda muniamus, & præſertim ad explicationem non levis difficultatis adverſus calculum ſummatorium petitæ ex aliquibus ſcholiis tom. 1. Mechan. Cl. Euleri.

§. 81. Propoſitio

His de calculo integrali generatim & univerſe notatis venio ad Caput 11. Sect. 11. Wolphii, quo ad quadrandas curvas, ſive ad dimetiendas curvarum areas primum hujuſmodi calculus accommodatur. Sit itaque (*Fig.* 11.) curva quæcumque AMQ, abſciſſa finita $AP = x$, ordinata $PM = y$, differentiale ſive elementum abſciſſæ $= Pp = dx = MR$, quæ perpendicularis duceretur ad ordinatam contiguam pm, cujus differentiale erit $= mR = dy$. Quibus poſitis differentiale, ſive elementum totius areæ dimetiendæ APM erit rectangulum $PMRp = ydx$, quod erit infinite parvum habita ratione totius finitæ areæ, & horum elementorum infinita ſumma erit = toti areæ. Intellige tamen y eo magis imminui, quo propius ad originem A accedimus. Nec te moveat, quod cum rectangulum $PMRp$ totam ſpatium non occupet interceptum inter abſciſſam Pp, & curvæ partem Mm deficiente parvo triangulo $MRm = \frac{1}{2} MR . Rm = \frac{1}{2} dxdy$, eadem ſumma omnium rectangulorum, deficientibus infinitis parvulis rectangulis, totam aream APM exæquare non poſſit. Nam cum $\frac{1}{2} dxdy$ ſit infinite parva ratione habita ydx pariter infinite parvi, ſed primi gradus, erit infinite parva ſecundi. Quare ſumma infinita triangulorum non faciet niſi quantitatem infinite parvam primi gradus, §. 80. num. 2. quæ ratione habita areæ finitæ APM pro nulla haberi poteſt. Illud autem adverte ad ſignificandam ſummam infinitam, v. gr. ydx præponi quantitati litteram S, ſcilicet $Sydx$ exprimit ſummam infinitam rectangulorum omnium, quæ per ydx exprimuntur. Atque hoc rectangulum ydx varium eſt pro varietate rationis, qua abſciſſæ & ſemiordinatæ in quaque curva creſcunt, aut decreſcunt, in eoque maxime poſita eſt vis calculi differentialis & integralis, quod propter infinite parvam

vam partium exiguitatem evaneſcente triangulo M R m rectangulum M P p R evadit elementum, juxta quod creſcit area A M P, & in locum y ſubſtituendo quantitatem, quam æquatio curvæ docet eſſe æqualem, hujus elementi quantitas nota ſit in minimis earum quantitatum, quibus æquatio curvæ continetur, atque integrata quantitate area A M P in iiſdem finitis quantitatibus innoteſcit. Sed præſtat rem perſpicuam facere exemplis, poſtquam objectum propoſuero & paucis diluero. Dixi paulo ſupra in hoc calculo fieri non poſſe ut ydy multiplicatum intelligatur per $3y$, propterea quod omnium variabilium differentiale exſiſtat neceſſe eſt. At hic habetur ydx, ſed nequaquam differentiale y, ſcilicet dy. Qui ergo hæc conveniunt? Ecce. Hic non eſt tantum differentiale ydx, ſed etiam differentiale y, ſcilicet $\frac{1}{2}\ dxdy$ exhibitum triangulo M R m. Sed quia $\frac{1}{2}\ dxdy$ eſt infinite parva habita ratione ydx, idcirco ejus nulla habetur ratio, ut oſtendimus. Quamobrem alterum cum altero minime pugnat.

2. Sed ut unum, vel alterum ex multis exemplis proferam, proponatur quadrandum (*Fig.* 11.) ſpatium A M P parabolæ, in qua quadratum ſemiordinatæ P M = eſt rectangulo ex abſciſſa A P in parametrum a, ſcilicet

$y^2 = ax$, & extrahendo radicem

$y = \sqrt{(ax)} = \sqrt{a}.\sqrt{x}$,

& exprimendo radices per exponentes fractos

$y = a^{1:2}x^{1:2}$, & multipl. per dx

$ydx = a^{1:2}x^{1:2}dx$, & integrando

$Sydx = 2a^{1:2}x^{3:2} : 3$

nam ſi exponens 1 : 2 variabilis x augeatur unitate fiet 3 : 2, ſi hoc producto per dx, ſcilicet quantitate $3dx : 2$ dividatur, differentiale $a^{1:2}x^{1:2}\ dx$ fiet $= 2a^{1:2}x^{3:2} : 3$

Sed $2a^{1:2}x^{3:2} : 3$ fit ex multiplicatione $2a^{1:2}x^{1:2} : 3 = 2y : 3$ per x, ſive addendo unitatem exponenti 1 : 2 variabilis x; ergo area A P M $= Sydx$ erit $= 2yx : 3$. Qua in re non video, quid non bene concludatur, tametſi minima rerum elementa deſignari non poſſint. Nam cum y ſit $= a^{1:2}x^{1:2}$, vera eſt hæc propoſitio hypothetica, ſi abſciſſæ creſcentis A P $= x$ minimum differentiale dx dari poſſit, cujus tamen conditionis poſſibilem ſenſum jam explicavimus, erit $ydx =$

a-

$a^{1:2} x^{1:2} dx$. Ex quo intelligimus cujus naturæ ſit parvum elementum ydx. Si ergo colligamus infinita ydx, hæc erunt æqualia infinitis $a^{1:2} x^{1:2} dx$. Sed infinita multitudo elementorum $a^{1:2} x^{1:2} dx$ cognoſcitur integratione, qua quantitas infinite parva redigitur ad finitam, in qua infinities continetur. Igitur infinita ydx, ſive $Sydx$, ſive area AMP ſunt

$$= 2a^{1:2}x^{3:2}: 3 = 2xy: 3$$

3. Sit etiam integrandum ſegmentum ſpatii parabolici PMNQ (*Fig.* 17.) inter duas ſemiordinatas PM, & QN interceptum, itaut AP ſit conſtans; & origo abſciſſæ PQ ſit in P. AP ut conſtans dicatur $= b$, $PQ = x$, & $AQ = b + x$. Item $QN = y$, & parameter $= a$. Erit ex æquatione parabolæ

$y^2 = ab + ax$, & extrah. rad.

$y = \surd(ab + ax)$, & multipl. per dx

$ydx = dx\surd(ab + ax)$

Quoniam vero hoc elementum ſuperioribus regulis integrari non poteſt, $\surd(ab + ax)$ ponenda eſt æqualis alteri quantitati, quæ per dx multiplicata facile ad integralem reducatur; eoque peracto in locum hujus denuo ſubſtituenda eſt $\surd(ab + ax)$, ſed ad eam potentiam elevata, ad quam per integrationem aſſumta quantitas æqualis aſcendit. Sit igitur

$\surd(ab + ax) = v$ erit elevando ad quadratum

$ab + ax = v^2$, & differentiando

$adx = 2vdv$, & divid. per a

$dx = 2vdv : a$, & multipl. per $y = v$

$ydx = 2v^2dv : a$, & integ. per reg. gen.

$Sydx = 2v^3 : 3a$ & pro v^3 ſubſtituen. valorem

erit $= 2\surd(ab + ax).\surd(ab + ax).\surd(ab + ax) : 3a$

$= 2(ab + ax).\surd(ab + ax) : 3a$, & divid. per a

$= 2(b + x)\surd(ab + ax) : 3$

Putabit aliquis jam integrationem eſſe peractam, ſcilicet ſpatium PQNM eſſe æquale $2(b + x)\surd(ab + ax) : 3$; verum fallitur: nam quoniam in P abſciſſa $x = o$, & ſpatium QNMP evaneſcit; fiat $x = o$, & videamus quid ex integratione relinquitur. Si enim nihil reliquum eſt, integrationem eſſe perfectam conjicitur, ut accidit in ſuperiori quadratura parabolæ. Nam cum ibi ſit $Sydx = 2yx : 3$, ſi x ponatur $= o$, nullum erit totum rectangulum $2yx : 3$, quod $2y : 3$ producta per nihil nihil eſt. At ſi quid reſtat, id vel detrahendum, ſi eſt quantitas poſitiva, vel addendum, ſi negativa, quo totum integrale habeatur.

tur. Ut hic poſita $x = o$ rectat $\frac{2}{3} b\surd(ab)$. Quare ut ſpatii QPMN quadraturam habeamus, ex ſuperiori quadratura hæc quantitas detrahenda eſt. Scilicet QNMP $= 2(b+x)\surd(ab+ax) : 3 - 2b\surd(ab) : 3$. Quod res ita ſe habere debeat, facile a poſteriori intelligi poteſt ex iis, quæ Wolphius §. 108. docuit. Nam ex quadratura parabolæ num. 1. ſpatium AQN $=$ 2AQ. QN $: 3 = 2(b+x).\surd(ab+ax) : 3$, quia hic oſtenſum eſt y, ſive QN $= \surd(ab+ax)$; item ſpatium APM $=$ 2AP. PM $: 3 = 2b\surd(ab) : 3$. Nam cum PM ſit ordinata, erit $(PM)^2 = ab$, & PM $= \surd(ab)$. Jam vero ſegmentum PQNM eſt $=$ AQN $=$ APM; ergo idem ſegmentum $= 2(b+x)\surd(ab+ax) : 3 - 2b\surd(ab) : 3$

4. Ratio vero a priori, cur fieri debet ſubductio, eſt, quia poſtquam inventa eſt $y = \surd(ab+ax)$, & $ydx = dx\surd(ab+ax)$, in ſequentibus aliud nihil fit, quam quadrare totam aream parabolicam AQN, quæ cum minor ſit ſegmento PQNM, quid mirum ſi ad habendam hujus perfectam quadraturam detrahendum eſt aliquid, ſcilicet APM? Aſſumtum autem ita conficio. Nam ſic demonſtratio procedit; fiat $\surd(ab+ax) = v$, atque ideo $= y =$ QN, deinde elevando ad quadratum

$$ab+ax = v^2 = y^2$$

Quis non videt hanc eſſe æquationem parabolæ in Q, in quo abſciſſa eſt AQ $=$ AP $+$ PQ $= b+x$, & ordinata eſt QN $= y = v$, & parameter $= a$, nam ſi diviſerimus per a, fiet

$$b+x = v^2 : a = y^2 : a$$

Ex quo liquet $b+x$ eſſe abſciſſam. Tum differentiatur æquatio

$$ab+ax = v^2 = y^2, \quad \text{\& inde oritur}$$

$$adx = 2vdv = 2ydy, \quad \text{\& div. per } a$$

$$dx = 2vdv : a = 2ydy : a, \quad \text{\& mult. per } y = v$$

$$ydx = 2v^2dv : a = 2y^2dy : a$$

Quod eſt elementum, ſed non ſolius ſegmenti QPMN, ſed areæ totius QAN; quia differentiale dx refertur ad totam abſciſſam AQ compoſitam ex conſtante b & ex variabili, utpote quod habitum eſt differentiando terminos æquationis ad totam aream pertinentes. Quamobrem etiam $2v^2dv : a$, vel $2y^2dy : a$ eſt elementum totius areæ. Ex quo conficitur, ſi illud quadremus, non ſolum ſegmentum, ſed totam aream eſſe prodituram. Mirum igitur videri non debet, ſi ad habendum ſegmentum ex peracta quadratura quidpiam detrahendum eſt, ſcilicet

area

area A P M. Quid vero non ſolum hic, verum & generatim detrahendum ſit, quid addendum, bene dignoſcitur ex poſitione $x = o$; nam cum poſita $PQ = x = o$ reſtat aliquid, id argumento eſt reſiduam eſſe omnem illam quantitatem, quæ in dicta quadratura major eſt, aut minor in aliis caſibus ſegmento PQNM, propterea quod evaneſcente x hoc evaneſcit, & quidem hoc ſolum. Hujus de quadrando parabolæ ſegmento problematis ſolutio eſſe poteſt exemplar etiam pro dandis ſolutionibus omnium ſegmentorum aliarum curvarum, quæ ad ſimilem formam redigi poſſunt.

5. Jam vero tranſeamus ad illa problemata, in quibus etſi areæ quadrantur, nihilominus additio, aut detractio faciendæ ſunt; & in manum ſumamus Problema 31. Wolphii §. 113. quo curva quadretur, in qua

$$y^2 = (x^4 + a^2 x^2) : b^2$$

Ita ſolutio procedit. Extrahendo radicem

1. $y = \sqrt{(x^4 + a^2 x^2)} : b$
2. $y = x\sqrt{(x^2 + a^2)} : b$ & multipl. per dx
3. $y\,dx = x\,dx\sqrt{(x^2 + a^2)} : b$

Ut elementum integrabile reddatur, fiat

4. $\sqrt{(x^2 + a^2)} = v$

Quo loco nota v non eſſe $= y$, ut paulo ante accidebat.

5. Hinc $x^2 + a^2 = v^2$ & differen.
6. $2x\,dx = 2v\,dv$, & divid. per 2.
7. $x\,dx = v\,dv$, & mul. per $\sqrt{(x^2 + a^2)}$, & per v æqualia fit
8. $x\,dx\sqrt{(a^2 + x^2)} : b = v^2\,dv : b$ Unde
9. $y\,dx = v^2\,dv : b$, & integrando
10. $S y\,dx = v^3 : 3b =$, & ſubſtituendo valorem v^3
11. $= (x^2 + a^2)\sqrt{(x^2 + a^2)} : 3b$

Ponatur $x = o$, reſiduum erit

$$a^2\sqrt{a^2} : 3b = a^3 : 3b$$

Ergo perfecta quadratura curvæ erit

12. $(x^2 + a^2)\sqrt{(x^2 + a^2)} : 3b - a^3 : 3b$

6. Quid vero hujuſmodi æquationes exprimant, & quid iis integrandis quadretur, enucleatius explicandum eſt, ut conſtet ratio, cur inde quæſita quadratura eliciatur. Sit itaque curva AM, (*Fig.* 19.) cujus abſciſſa $AP = x$, AV conſtans $= a$, ordinata $PM = y$, & ejus natura æquatione hac definiatur $y^2 = (x^4 + a^2 x^2) : b^2$, itaut y ſit $= x\sqrt{(x^2 + a^2)} : b$. Fiat $v =$

$\sqrt{(x^2+a^2)}$ erit $v^2 = x^2+a^2$, & $x^2 = v^2 - a^2$, quæ æquatio eſt ad hyperbolam æquilateram BS (*Fig.* 18.), cujus axis tranſverſus $BH = 2a$ & abſciſſæ v incipientes a centro C, itaut CB ſit $= a$, & $CQ = v$: ſemiordinatæ vero QL ſunt $= x$. Nam poſito $BQ = z$, & ideo $= QC - CB = v - a$, ex natura hyperbolæ æquilateræ §. 507. Anal. 1. p. Wolphii erit $x^2 = 2az + z^2$, & ſubſtituendo valorem $z = v - a$, & $z^2 = v^2 - 2av + a^2$, erit $x^2 = 2av - 2a^2 + v^2 - 2av + a^2 = v^2 - a^2$. Unde abſciſſa AP curvæ AM, (*Fig.* 19.) cujus quadratura quæritur, applicatur ad hyperbolam BS (*Fig.* 18.) & eſt $=$ QL, & CQ erit $= v$; hæc autem curva eſt omnino alia ac AM (*Fig.* 19.). Jam vero in AM poſita x abſciſſa $= o$ etiam ordinata y ſit $= o$, ut ex valore y^2 colligitur. In BS vero (*Fig.* 18.) poſita ordinata $x = o$, v reſtat $= a$, quia $v^2 = x^2 + a^2$, & revera in hyperbola BS ad punctum ſive verticem B evaneſcit ordinata $QL = x$, ſed abſciſſa $CQ = v$ ſit $= CB = a$.

8. Differentietur nunc æquatio curvæ BS, ſcilicet $v^2 = x^2 + a^2$, & erit $x\,dx = v\,dv$, in quo differentiale dx, quod eſt linea ſexta ſuperioris operationis, idem non erit ac differentiale dx ejuſdem rectæ x in curva AM, (*Fig.* 19.) quod eſt linea tertia ejuſdem. Quamvis enim ſit eadem abſciſſa x, tamen ejus differentiale ſive parvum augmentum dx eſſe idem non poteſt, quia primo loco x eſt abſciſſa curvæ AM, cujus æquatio eſt $y^2 = (x^4 + a^2x^2) : b^2$, cujuſque differentiale eſt $2y\,dy = (4x^3\,dx + 2a^2x\,dx) : b^2$, ſecundo vero loco eſt ordinata curvæ BS, cujus elementa diverſo modo progrediuntur, ut conſtat ex æquatione $v^2 = x^2 + a^2$. Quis autem ex iis quæ §§. ſuperioribus diſſeruimus, non colligit eamdem quantitatem alio in aliis curvis modo & proportione fluentem diverſa habere differentialia, & parva elementa ſuis quantitatibus, unde oriuntur, proportione non reſpondere? Quare $dx = Tl$ (*Fig.* 18.) non eſt idem ac $dx = Pp$ (*Fig.* 19.). Hoc animadverſo termini $x\,dx = v\,dv$ ducantur in $\sqrt{(x^2+a^2)} : b = v : b$, & erit $x\,dx\sqrt{(x^2+a^2)} : b = v^2\,dv : b$. Cum ergo $\sqrt{(a^2+x^2)}$ ſit $= v = CQ$, (*Fig.* 18.) & dx differentiale ordinatæ QL ſit $= Tl$, ex centro C ducatur CV æquidiſtans ab ordinatis, & LN, ln æquidiſtantes a diametro CX, eritque $LN = CQ = v$, & $CN = QL = x$, & $Nn = Tl = dx$, eritque areola $NLRn = dx\sqrt{(x^2+a^2)}$, & area $CNLB = S\sqrt{(x^2+a^2)}\,dx$. Quare $\frac{x\,dx\sqrt{(x^2+a^2)}}{b} = \frac{v^2\,dv}{b}$ eſt parvum rectan-

ctangulum, cujus altitudo eſt x, & baſis eſt areola $dx\surd(x^2+a^2)$ diviſa per b. Unde integrando $xdx(x^2+a^2):b = v^2dv:b$ quadratur hujuſmodi ſolidum, & ideo $v^3:3b = (a^2+x^2)\surd(x^2+a^2):3b$ erit quadratura ejuſdem. Quam quadraturam non eſſe perfectam patet ex iis, quæ de quadratura ſegmenti parabolici ſupra diſſeruimus. Nam etiam hic facta NC ſive abſciſſa $x=0$ non evaneſcit ordinata $NL=v$, ſed fit $=CB=a$. Quare etſi in principali æquatione curvæ AM diſpareat ordinata y, ſimul ac abſciſſa x evaneſcit, tamen reſtat $v=0$ facta $x=0$ in alia æquatione, ad quam prima reducitur. Quare cum hæc æquatio aſſumta, quæ aliam exhibet, quadratur, quidpiam ſubducendum eſt, ut perfectam ſuiſque omnibus numeris abſolutam quadraturam obtineamus; illud ſcilicet quod facta $x=0$ reſiduum eſſe apparet.

9. Sed quo id magis magiſque explicemus, & alia quoque confirmentur, aliud exemplum ponamus ex elementis arcus parabolæ ſecundi generis ſive cubicæ, cujus æquatio $x^3=ay^2$, in qua littera a ſignificat parametrum, quæ ab aliis vocatur p, x abſciſſam, & y ordinatam. Sit hæc parabola AM (*Fig.* 19.), cujus ordinata $y=PM$, abſciſſa $x=AP$, & AM ſit $=ſ$, & tandem $AB=a$; ducta ordinata infinite proxima pm erit $Pp=Mn=dx$, & $nm=dy$, $Mm=dſ$. Jam vero oſtendente Reyneav Anal. Tom. 2. §. 584. eſt $dſ=dx\frac{1}{2}(4a+9x)^{1:2}:2a^{1:2}$. Ut hoc elementum integrari poſſit, fiat $\frac{1}{2}a^{1:2}(4a+9x)^{1:2}=PE=v$; erit $v^2=a\frac{(4a+9x)}{4}$. Intelligatur itaque PE, ſive v ordinata alterius curvæ VE, itaut omnes aliæ ordinatæ ſint ſemper æquales $a^{1:2}\frac{(4a+9x)^{1:2}}{2}$. Cumque x fiat ſemper minor verſus A, ordinatæ quoque decreſcent, ſed in puncto A curva VE non deſinet, ſed præciſe in puncto V, itaut AT ſit $=a$, & $AV=\frac{4}{9}a$. Nam in æquatione $v^2=a\frac{(4a+9x)}{4}$ facta $x=0$, erit $v^2=a^2$, & ideo $v=a$. Cum autem ſit $v^2=$

a(4a-

$\frac{a(4a+9x)}{4}=a\left(a+\frac{4}{9}x\right)$, tum dividendo per $\frac{9}{4}$ quantitatem intra parentheſim, tum multiplicando eam, quæ extra eſt, erit $v^2=\frac{9}{4}a\left(\frac{4}{9}a+x\right)$, quæ æquatio eſt ad parabolam Apollonianam, cujus parameter eſt $\frac{9a}{4}$, & abſciſſa componitur ex conſtanti $\frac{4a}{9}$, & ex x. Cum vero AP ſit $=x$, erit $AV=\frac{4}{9}a$. Sed ut id, quod propoſitum eſt, abſolvamus, æquationem $\frac{a(4a+9x)}{4}=v^2$ differentiemus, eritque $\frac{9adx}{4}=2vdv$, & $dx=\frac{8vdv}{9a}$. Cumque ſit $\frac{1}{2}a^{1:2}(4a+9x)^{1:2}=v$, erit $\frac{\frac{1}{2}dx(4a+9x)^{1:2}}{a^{1:2}}=\frac{v}{a}$. Quare elementum $df=\frac{1}{2}\frac{(4a+9x)^{1:2}}{a^{1:2}}dx$ erit $=\frac{8v^2dv}{9a^2}$, & integrando f, ſive MA $=\frac{8v^3}{27a^2}=\frac{8}{27a^2}a\frac{(4a+9x)}{4}a^{1:2}\frac{(4a+9x)^{1:2}}{2}=\frac{1}{27\sqrt{a}}(4a+9x)(4a+9x)^{1:2}$.

Cumque facto $x=0$ reſtet $\frac{1\cdot 4a\sqrt{(4a)}}{27\sqrt{a}}=\frac{8a}{27}$, tandem f erit $=\frac{1}{27\sqrt{a}}(4a+9x)(4a+9x)^{1:2}-\frac{8a}{27}$. Ratio vero cur hæc quantitas ſubducenda ſit, patet ex dictis; nam ex altera parte rectificatio arcus AM parabolæ cubicalis redigitur ad quadraturam areæ ſive ſegmenti APET parabolæ Apollonianæ, quia $df=\frac{1}{2}dx(4a+9x)^{1:2}:a^{1:2}$, quod eſt elementum arcus, monſtratum eſt $=\frac{8v^2dv}{9a^2}$. Cum autem v ſit æquale ordinatæ PE =

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}a^{1/2}(4a+9x)^{1/2}$, & $\frac{8}{9a}v\,dv = dx = Pp$, erit $\frac{8v^2dv}{9a}$ elementum ejuſdem ſegmenti, & ideo $\frac{8v^2dv}{9a^2}$ elementum ſegmenti diviſum per a. Ex altera autem integrando hanc formulam non ſolum quadratur id, quod ſegmento APET continetur, ſed etiam id, quod area AVT, ut ſupra accurate obſervavimus. Quare ut veram ſegmenti ſive areæ cubicalis, quæ ſegmentum exæquat, ſummam habeamus, area AVT diviſa tamen per a ſubducatur oportet. Re autem vera $\frac{8}{27}a$ eſt area AVT diviſa per a in eum ſcilicet finem, ut lineam exæquare poſſit. Nam AVT eſt $= \frac{2}{3}$ AV.AT $= \frac{2}{3}.\frac{4}{9}a^2 = \frac{8}{27}a^2$. Quod vero non tota area PVE, ſed ſolum ſegmentum PATE diviſum per a exprimat longitudinem MA arcus parabolæ cubicalis patet ex eo, quod eadem abſciſſa AP tam arcui, quam ſegmento reſpondet, & abſciſſa evaneſcente utrumque diſparet, contra quam accidat in area PVE, ex qua reſtat AVT, cum abſciſſa PA ſit nulla. Ex quibus colligitur in hoc & ſimilibus caſibus myſterium in eo poſitum eſſe, quod prima formula differentialis unius quantitatis monſtratur æqualis formulæ differentiali alterius, quæ ſummæ colligendæ magis idonea reperitur. Sed hæc ſecunda integrata dat non ſolum quantitatem, quæ primam exæquat & exprimit, ſed vel majorem ut in hoc caſu, vel minorem ut in aliis. Unde concluditur nihil eſſe quod miremur, ſi ad obtinendam priorem quidpiam vel ſubducere vel addere oporteat.

§. 82. Propoſitio

His explicatis videamus utrum in memorato capite de quadraturis curvarum aliud aliquid ſit, quod Philoſopho difficultatem facere poſſit, Philoſopho, inquam; mihi enim nunc propoſitum haud eſt omnia explanare, quæ in ſtudio Analyſis Infinitorum Tyronibus aſpera videri poſſunt. Eſt enim hoc alterius indaginis. Sed illa ſolum expendenda ſuſcipio quæ cum receptis Philoſophiæ Principiis pugnare videntur. Hanc ob cauſſam omnes illas Wolphii Quadraturas, quæ ſerie quadam infinita perficiuntur, omitto, quod Philoſophus ad geneſim ſerierum attendens, atque ad illud certum principium, continuum quodlibet ea

ſaltem ratione, quæ a nobis tradita eſt, in infinitum dividi poſſe, nihil in iis offendere poteſt, quod ejus notiones evertat. Atque in manus ſumo quadraturam Ciſſoidis Dioclis §. 133. Anal. Inf. Wolphii, ut difficultatem mox proponendam amoveam, & calculum elementorum, quæ in locis ab origine curvæ infinito ſpatio diſtantibus eſſe ponuntur, antecedentibus §§. identidem explicatum magis etiam illuſtrem. Sit itaque ſemicirculus ANB (*Fig.* 20.) & Ciſſois AI, quæ cum BH numquam concurrit, abſciſſa $AD = x$, ſemiordinata DT in circulo $= v$, ordinata ad Ciſſoim $DG = y$, diameter $AB = a$, ideoque $DB = a - x$, erit §. 548. p. 1. Anal. Wolphii

$$a y^2 - x y^2 = x^3, \quad \text{ideoque differentiando}$$
$$2 a y d y - 2 x y d y - y^2 d x = 3 x^2 d x, \ \text{\& divid. per } y$$
$$2 a d y - 2 x d y - y d x = 3 x^2 d x : y$$
$$2 (a - x) d y - y d x = 3 x^2 d x : y$$

Quia vero (§. 547. par. 1.) $x^2 = v y$, & $\frac{x^2}{y} = v$,

poſita $a - x = DB = z$, habebimus

$$2 z d y - y d x = 3 v d x, \quad \text{\& integrando}$$
$$2 S z d y - S y d x = 3 S v d x$$

Eſt autem $v d x = DTVZ$ elemento areæ circuli ATD, $z d y$ eſt elementum GSHI areæ AGSB ciſſoidalis, propterea quod $z = DB = GS$, & $dy = LI$; & $y d x$ eſt elementum DGLZ areæ ciſſoidalis AGD. Jam vero ſi abſciſſa $AD = x$ fiat ſolum infinite parva quantitate DB minor diametro $AB = a$; illa tria elementa in hæc alia convertent TBD reſpectu totius areæ ſemicirculi, GSHI reſpectu totius areæ ciſſoidalis, & DBHLG reſpectu ejuſdem areæ. Quamobrem ſumma elementorum GSHI erit æqualis ſummæ elementorum DBHLG, ſive $S y d x = S z d y$; atque ideo $2 S z d y - S y d x = S z d y$. Unde conſequens eſt, cum in eadem hypotheſi ſumma TDB ſive $S v d x$ aream ſemicirculi exæquet, eſſe

$$2 S z d y - S y d x = S z d y = 3 S v d x,$$

ſcilicet totum ſpatium ciſſoidale in infinitum productum eſſe ſemicirculi genitoris ANB triplum.

2. Quo loco Tyrones advertant, quantumvis integralia elementorum DBSG, & GSHI ſint æqualia, tamen hanc inter ipſa elementa æqualitatem non intercedere; nam DBHIG eſt productum ex recta infinita BH in infinite parvam ſecundi gra-

dus

Digitized by Google

dus DB in diametro circuli, ſive GS; at GSHI ſit ex eadem infinite parva GS in quantitatem finitam SH, quæ eſt differentiale rectæ infinitæ BH. Neque id videatur abſurdum poſſe ex elementis, quorum alterum altero ſit infinite majus, eamdem quantitatem oriri; nam quod eſt infinite majus ſcilicet BDGS, illud idem ſi verſus A originem ſpatii, cujus dicitur elementum, progredi percipiamus, infinities minus fieri, quam elementum GSHI in eodem loco, comperiemus. Siquidem prius elementum in infinite parvo intervallo ab A eſt æquale rectangulo ex finita AB in alteram ex infinite parvis quantitatibus elementi, quod a DBHG æquidiſtet: fieri autem omnino poteſt, ut eadem omnino quantitas generetur duobus his modis, ut quanto elementa unius modi a principio ſunt majora elementis alterius, tanto verſus finem elementa alterius excedant elementa primi. Ut triangulum T*pm* tam generatur (*Fig.* 24.) elemento P*pm*M, quam elemento MR*m*, tametſi hoc illo ſit infinities majus, propterea quod primum ad verticem T abit in elementum infinities minus elemento, in quod abit MR*m*. Quo loco illud etiam animadvertendum, tametſi elementum MR*m* in triangulo (*Fig.* 24.) aut elementum (*Fig.* 20.) GSHI ſpatii ciſſoidis, ſive TDB ſemicirculi ſint infinite parva ſecundi gradus, videlicet ſi cum elementis aut P*pm*M (*Fig.* 24.) aut DGSB (*Fig.* 20.) vel M*mo*O comparentur, non tamen infinitam horum ſummam ſolum conficere aream ſive generatim quantitatem infinite parvam primi gradus, propterea quod finitam, vel etiam infinitam faciunt; cujus rei genuina ratio ab iis, quæ modo ſtatuta ſunt, ab incremento ſcilicet eorumdem elementorum petenda eſt.

Scholion

Atque hic locus eſt excurrendi ad eam difficultatem, quæ ex tomo primo Mechanicæ Euleri duci poſſe adverſus calculum ſummatorium in ſuperioribus indicavi. His enim, quæ modo ſtatuimus, ad eam ſolvendam munivimus viam. Ut autem via ac ratione procedat oratio, res aliquanto altius petenda eſt, & quædam ex Mechanicis ſunt hic prælibanda. Primo itaque ponamus vim ſive preſſionem, qua corpus perpetuo ſolicitatur, eſſe $= p$, ſpatium ab eo confectum $= s$, velocitatem in illo ſpatio acquiſitam $= v$, demum tempus in eodem conficiendo inſumtum $= t$; elementa harum quantitatum erunt dp, dv, ds, dt. Jam vero cum preſſionem, quæ in minimis ſpatiolo & tempuſculo ſe explicat, pro conſtanti haberi poſſe principia ſupra expoſita calculi diffe-

rentialis evincant, velocitas eodem tempuſculo genita erit $=$ producto ex preſſione p in idem tempuſculum, ſcilicet $dv = pdt$. Cumque ſpatiolum ds percurratur a corpore velocitate finita eademque conſtanti v acquiſita in ſpatio s, quia quod tempuſculo dt generatur velocitatis ſcilicet dv, eſt infinite parvum, ſi cum velocitate v conferatur, hinc effici poteſt tempuſculum eſſe in ratione directa ſpatioli ds, & inverſa velocitatis v, ideſt $dt = \frac{ds}{v}$. Quare cum ſit $dv = pdt$, ſubſtituendo valorem dt, erit $dv = \frac{pds}{v}$, & $vdv = pds$.

2. His duabus formulis $vdv = pds$, & $dt = \frac{ds}{v}$ conſtitutis ponamus ſecundo preſſionem p eſſe in ratione aliqua ſpatii ad perfectam aliquam potentiam elevati, ex. gr. ſit $p = \frac{s^2}{a}$; in formula $vdv = pds$, erit $vdv = \frac{s^2 ds}{a}$, & integrando $\frac{1}{2} v^2 = \frac{s^3}{3a}$, & $v^2 = \frac{2s^3}{3a}$ & $v = \sqrt{\left(\frac{2}{3a}\right)} s^{3:2}$. Quare $dt = \frac{ds}{v}$ fiet $= \frac{\sqrt{(3a)} ds}{\sqrt{2} . s^{3:2}} = \frac{\sqrt{(3a)} .}{\sqrt{2}} s^{-3:2} ds$, & integrando $t = - \frac{3\sqrt{3a}}{\sqrt{2}} s^{-1:2} = - \frac{3\sqrt{(3a)} .}{\sqrt{2} . s^{1:2}}$. Ut videamus an aliquid reſtet ſubducendum vel addendum, fiat $s = o$, eritque $t = - \frac{3\sqrt{3a}}{\sqrt{2.0}}$, quæ quantitas eſt infinita, eo quod quantitas finita $\sqrt{a}$ per quantitatem infinite parvam dividitur. Unde $t =$ quantitati infinitæ $- \frac{3\sqrt{3a}}{\sqrt{2s^{1:2}}}$, ideſt $=$ quantitati infinitæ, eo quod altera finita pro nulla haberi poteſt, ſi cum infinita comparetur. Ex quo efficitur hanc hypotheſim, qua preſſio ponitur $= \frac{s^2}{a}$ eſſe non poſſe; nam ad ſpatium finitum s conficiendum tempus infinitum requireretur. Quod eodem revol-

volvitur, ac corpus ea vi moveri non poſſe, eo quod ſemper in principio ſpatii reperiretur. Idem convenit in omnes alias hypotheſes, in quibus preſſio ponitur in ratione ſpatii, cujus exponens ſit poſitivus, & potentia aliqua unitate major verbi gratia $3, 4, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$ &c.

3. Nunc videamus quid uſuveniat, cum exponens ſpatii eſt numerus quidem poſitivus, ſed unitate minor ex. gr. p ſit $=$ $a^{1:2}s^{1:2}$, erit $v\,dv = p\,ds = a^{1:2}s^{1:2}ds$, & $\frac{1}{2}v^2 = \frac{2a^{1:2}s^{3:2}}{3}$, &

$v^2 = \frac{4a^{1:2}s^{3:2}}{3}$, & $v = \frac{2a^{1:4}s^{3:4}}{\sqrt{3}}$. Quare $dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{3}.s^{-3:4}ds}{2a^{1:4}}$,

& $t = \frac{4\sqrt{3}s^{1:4}}{2a^{1:4}}$. Cumque facto $s = o$ nihil reſtet, id argumento eſt integralem ſummam eſſe perfectam, nihilque aut addi aut ſubduci oportere. Unde ſequitur in hac hypotheſi ſpatium finitum tempore finito peragrari. Idem vero in omnibus aliis hypotheſibus, in quibus exponens ſpatii eſt numerus poſitivus unitate minor, uſuvenire comperiemus, ſi periculum fecerimus. Ex quibus conficitur corpus hiſce viribus percitum tempore quodam finito ſpatium pariter finitum metiri.

4. Verumtamen Cl. Eulerus §. 314. tom. 1. Mech. diſſerens de corpuſculo, quod repellente centro virium in ratione aliqua directa diſtantiarum a centro, ſive ſpatiorum percurſorum, uti eſt in hypotheſi modo expenſa, in eodem centro poſitum ſit, affirmare non dubitat etiam in caſibus, in quibus exponens ſpatii eſt numerus quidem poſitivus, ſed unitate minor, non egreſſurum a centro ſive ab initio ſpatii, niſi finita quadam velocitate a principio cieatur, tametſi ex formularum integrationibus in conficiendo ſpatio finito finita tum velocitas, tum tempus eruantur. Nititur autem hac ratione, quam §. 315. affert, quod *corpus* (ſunt ejus verba) *in ipſo centro virium repellente poſitum perpetuo ibi ſit permanſurum, ſi vis centrifuga in ipſo illo puncto fuerit infinite parva ſeu nulla; id quod evenit quando exponens dignitatis diſtantiarum, cui vis centrifuga eſt proportionalis, eſt numerus nihilo major ſeu poſitivus.* Cui rationi ab ipſa natura motus petitæ potius fidendum eſſe ait, quam calculo, quem a vero

ro aberrare affirmat, dum poſitis loco exponentis numeris fractis poſitivis, ſed unitate minoribus tempus finitum ſuppeditat. *Ratio hujus aberrationis calculi a natura* (pergit auctor eamdem rem confirmare §. 320.) *in ipſo principio motus ſine dubio eſt ſita. Atque hoc loco lex alias univerſalis de incremento velocitatis a potentiis producto perperam adhibetur. Quoniam enim hæc lex* (intellige formulam $v\,dv = p\,ds$) *locum habet tantum, quando corpus finitam habet celeritatem, ſemper in principio motus temere uſurpatur. Cum autem iſte error in ipſo tantum primo elemento inſit, plerumque eſt infinite parvus, & hanc ob rem non eſt reſpiciendus. Eſt vero infinite parvus, quoties primum elementum ſpatii tempuſculo infinite parvo percurritur: tum enim neque in celeritatibus neque in temporibus conſiderabile diſcrimen poterit producere. Evenit hoc ſi potentia, qua corpus in ipſo principio motus ſolicitatur, eſt finitæ magnitudinis, vel etiam infinite magnæ: perſpicuum enim eſt hoc caſu primum elementum temporis puncto percurri. At ſi potentia, ut in noſtro caſu uſuvenit, in principio eſt infinite parva, ſeu potius nulla, ad primum tantum elementum abſolvendum non modo finito, ſed etiam infinito tempore opus eſt, quia corpus quieſcens a nulla potentia pulſum de loco ſuo numquam excedet.*

5. Hactenus Eulerus, cujus ſententia, ſi vera eſt, ingentes edit ruinas in toto calculo ſummatorio; nam ſi in colligendis aliquibus ſummis is aberrat a vero, tametſi ne latum quidem unguem ab ejuſdem regulis diſcedamus; quidni ſuſpicari poſſumus etiam in quamplurimis aliis illum a vero longiſſime abeſſe? Verum ne huic opinioni, cum in eam incidi, ſubſcriberem, illud primum obſtitit, quod mihi perſuaderi non poteſt calculum ſummatorium adeo a vero abhorrere, & præſertim ob hanc rationem, quia ut innumerabiles caſus omittam, in quibus ſi quid impoſſibile aſſumtum fuerit, is dat integrationes imaginarias vel infinitas, quæ rei aſſumtæ impoſſibilitatem ſub oculos ponunt, in hac eadem hypotheſi exponentis ſpatii = unitati poſitivæ, aut majoris illa ſive preſſionis creſcentis in aliqua directa ratione ſpatii ad exponentem unitati æqualem, vel majorem elevati ſuppeditat tempus infinitum in abſolvendo ſpatio finito, unde effici queat corpuſculum tali vi moveri non poſſe. Quidni ergo etiam in hypotheſi exponentis poſitivi ſed unitate minoris præbet tempus infinitum, ſi tali vi corpuſculum loco moveri non poteſt? An non integratione formulæ $v\,dv = p\,ds$ colligitur ſumma elementorum omnium dv, & ds etiam

eorum

eorum, quæ primitiva dicuntur? Qua de cauſſa æquationis parabolæ $ax=y^2$ differentia capta ſcilicet $adx=2ydy$, & illa in analogiam diſpoſita $a : 2y = dy : dx$, ex ea colligitur in vertice parabolæ, in quo $2y$ eſt infinite parva reſpectu finitæ a, dx eſſe infinities minorem dy, niſi quia rectulis dx & dy etiam primitiva elementa exhibentur? Hæc me primum retinuerunt, ne in ſententiam Euleri deſcenderem, & nunc multo magis retinent, cum omnibus diligentius perpenſis ad ipſa rei incunabula mihi videor perveniſſe. Nam aliud eſt conſiderare cujuſdam quantitatis elementum ipſum per ſe, aliud vero rationem habere ipſius, quatenus aliam quantitatem generat, ideſt quatenus fluit, & hujuſmodi fluxu quantitatem gignit. Nam ſi priore modo ſpectetur, tamquam nullum haberi debet, ſin autem ſecundo, idem non ſemper negligendum eſt, quia quantumlibet infinities parvum, talem fluendi legem habere poteſt, ut quantitatem finitam gignere queat perinde ac aliud, quod ſit infinite parvum quidem, ſed ratione habita illius infinite magnum. Ut id ſub oculos ponam, ſit parabola AQ (*Fig.* 11.), cujus axis AC, & in ea abſcindatur primum abſciſſæ elementum AP, ad quam primum ordinatæ elementum PM applicetur. Certe AP eſt infinite parvum ratione habita PM pariter minimi, ut paulo ante vidimus. Nihilo tamen minus in puncto h, quod finito intervallo abſit ab A, utrumque elementum in quantitates finitas Ah, hQ abit. Immo harum rectarum elementa dx, & dy rationem inter ſe finitam habent, eamdem ſcilicet ac $2y$ ad a. Cujus ratio ex lege fluxus a natura æquationis parabolæ pendente ducenda eſt: & revera ſi corpus grave projectum per AE perpendicularem ad Ah, ſecundum cujus directionem gravitas ſe explicare ponatur, deſcribat parabolam AQ, de quo ſuo loco fuſius, liquido oſtendit rationem, qua utrumque elementum augetur. Sint enim AP, Ph, hL, &c. ſpatia, quæ ſingulis temporis æqualibus particulis vi gravitatis deorſum percurruntur, & PM, hQ, LN &c. ordinatæ, ſive ſpatia, quæ iiſdem temporibus vi impreſſa & celeritate æquabili ſecundum directionem AE conficiuntur; ſpatia vi centripeta & motu accelerato ſingulis temporibus confecta creſcent in ratione numerorum imparium 1, 3, 5, 7, 9 &c. & ideo totæ abſciſſæ AP, AH, AL &c. in ratione quadratorum 1, 4, 9, 16, 25, ordinatæ vero, ſive ſpatia motu æquabili peragrata in ratione numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, 5 &c. Ex quo colligere potes poſt 5 minuta abſciſ-

Digitized by Google

ſciſſam fieri $=25$, & ideo quinquies & vigeſies majorem prima $=1$; ordinatam vero $=5$, & idcirco ſolum quinquies majorem prima ordinata, poſt 6 minuta abſciſſam fieri $=36$, & ideo trigeſies ſexies majorem prima, ideſt poſt tempus finitum tum abſciſſam quam ordinatam ſingulas ſuis primis majores fieri, ſed quo numero ordinata quæcumque primam ordinatam excedit, illius quadrato ab abſciſſa reſpondente primam abſciſſam ſuperari. Unde inferri poteſt poſt infinita tempuſcula æqualia ideſt poſt tempus finitum tam abſciſſam, quam ordinatam ſuis quaſque primis fieri quidem infinities majores, ſed ita, ut abſciſſa ſua prima ſaltem uno gradu infinities major evadat, quam ordinata illi reſpondens ratione habita ſuæ, quo ſcilicet quadratum numeri infiniti eumdem numerum infinitis vicibus excedit. Idque adeo verum eſt, ut poſt infinitum tempus tam abſciſſa, quam ordinata in infinitum quidem augeantur, ſed abſciſſa ad altiorem, quam ordinata, gradum aſcendat; ut colligitur ex æquatione $ax=y^2$; unde hæc ducitur analogia $a:y=y:x$, ex qua poſita y infinita efficitur y eſſe tanto infinities minorem x, quanto finita a ab infinita y ſuperatur. Quorum omnium ratio a priori eſt, quod quantitas ab elemento generata non pendet tantum a magnitudine elementi, quod ratione habita quantitatis finitæ nullius determinati gradus nec primi, nec ſecundi, nec alius in infinitum infinite parvum eſſe infra oſtendemus, quo loco toti huic rei lux accedet, quantum a ratione & velocitate, qua fluit. Unde quemadmodum ſi recta infinite parva celeritate infinita fluat, & alia recta finita velocitate pariter finita feratur, utraque eodem tempore finitum rectangulum generant, & ſi illa infinities infinita velocitate moveatur, hæc ſolum finita, prima rectangulum infinitum, ſecunda vero ſolum finitum gignit; ita in omnibus omnium quantitatum elementis res ſimiliter contingere poteſt. Ergo manet in hoc negotio attendendam eſſe fluxus & progreſſionis legem non diſſimilem progreſſionis ſerierum, quibus in ſummam colligendis non tantum quantitatis primi termini ratio eſt habenda, verum etiam immo & multo magis ipſius legis, qua termini progrediuntur; atque idcirco calculum integralem, qui omnia elementa a primo ad ultimum fluentia juxta ſuam quæque progrediendi legem unam in ſummam colligit, cum ipſam legem progreſſionis obſervare, tum veras quantitates ab iiſdem generatas elicere

Digitized by Google

cere & offerre. Hæc omnia confirmat id, quod paragrapho ſuperiore obſervavimus de duobus elementis ſive ſpatii ciſſoidalis, ſive trianguli, quorum alterum tametſi altero infinite minus, eamdem finitam quantitatem, ſive ſpatium ciſſoidale generat, proptereaquod tali lege fluunt, ut quod ex una parte ciſſoidis eſt infinite majus, verſus alteram dum progreditur, perpetuo minuatur, donec infinities minus evadat, quod vero ex eadem parte eſt infinite minus, verſus alteram procedens in infinitum augeatur.

6. His conſtitutis nemo non videt etiam in negotio preſſionum, quibus tamquam elementis vires motrices generantur, non quantitatem ipſam ex ſe ſe primæ preſſionis primique elementi vis eſſe attendendam, ut inde inferatur, utrum eadem preſſione tempore finito vis finita & ideo celeritas item finita gignatur, nec ne, ſed legem progreſſionis ejuſdem ab æquatione preſſionis ad ſpatium relatæ pendentem, & calculum ſummatorium, qui eamdem progreſſionis legem ſecutus preſſiones colligit, quæ finito tempore fluunt. Quo plane corruit fundamentum Euleri, qui ex hoc uno, quod in hiſce hypotheſibus prima preſſio, ſeu primum elementum vis eſt infinite parvum, efficit corpuſculum ea vi loco moveri non poſſe, nec tempore finito finitam vim & celeritatem comparare. Quod quamvis ex iis, quæ diſſeruimus, univerſe perſpicuum fiat, tamen ne quis in re tanti momenti ſcrupulus reſideat, rem oculis ſubjiciam exemplo, quod ſupra dedimus num. 3. preſſionis $p = a^{1:2}\, s^{1:2}$, in qua hypotheſi elicitur velocitas $v = \frac{2 a^{1:4}\, s^{3:4}}{\sqrt{a}}$, & tempus $t = \frac{2\sqrt{3}\, s^{1:4}}{a^{1:4}}$, & ideo $t^4 = \frac{16.9.s}{a}$; nam ex his æquationibus $p = a^{1:2}\, s^{1:2}$, & $t = \frac{2\sqrt{3}\, s^{1:4}}{a^{1:4}}$, ſi tam preſſiones, quam tempora ad ſpatia applicentur, compertum fit preſſiones multo plus creſcere quam tempora, preſſiones videlicet creſcere in ratione ſolum ſubduplicata ſpatiorum, quæ ab initio percurruntur, tempora autem in ratione tantum ſubquadruplicata. Quid ergo mirum ſi quamvis preſſio a primo ſit infinite parva, tamen tempore finito fluxus creſcens in tanto majori ratione, quam tempuſculum primitivum, in vim finitam, quæque idcirco velocitatem finitam generet, eodem finito tempore abire poſſit? Sed ut id magis

ad

ad vivum reſecemus, fiat s ſpatiolum primitivum infinite parvum ratione habita quantitatis finitæ a. Ex æquatione $p = a^{1:2} s^{1:2}$, & ideo $p^2 = a s$ elicitur analogia $a : p = p : s$. ex qua efficitur preſſionem p tametſi infinite parvam eſſe infinities majorem ſpatiolo s, quod ejuſdem virtute percurri debet. Ex æquatione $v^2 = \frac{4 a^{1:4} s^{3:2}}{13}$ colligitur $\frac{4a^{1:2}}{3} : v = v : s^{3:2}$, ſcilicet velocitatem initialem v eſſe tanto majorem radice ſpatii ad cubum elevati, quanto finita quantitas $\frac{4}{3} a^{1:2}$ eſt major. Ex æquatione denique $t^2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot s^{1:2}}{a^{1:2}}$ educitur analogia $\frac{12}{a^{1:2}} : t = t : s^{1:2}$, & inde efficitur tempus t radice ſpatii eſſe tanto infinities majus, quanto quantitas finita $\frac{12}{a^{1:3}}$ eſt infinities major tempuſculo t.

Jam vero ſi æquationes preſſionis & temporis invicem conferamus, erit $t^4 = \frac{16.9.s}{a}$, & $\frac{a t^4}{16.9} = s$, & $\frac{a^2 t^4}{16.9} = a s = p^2$, & $t^4 = \frac{16.9 p}{a^2}$, & $t^2 = \frac{12 p}{a}$, quæ æquatio eſt ad parabolam, cujus parameter $= \frac{12}{a}$, abſciſſæ preſſiones p, & ordinatæ tempora t. Ergo propter illa, quæ de parabola ſupra diſſeruimus, mirum videri non debet, ſi facto tempore finito etiam ſumma preſſionum in ratione duplicato majori quam tempora creſcentium finita pariter fiat, & idcirco etiam velocitas, quæ ab iis generatur. Dices ex analogiis $a : p = p : s$, & $\frac{12}{a^{1:2}} : t = t : s^{1:2}$ effici etiam initio ſpatii minimam preſſionem eſſe infinities majorem tempuſculo; qui ergo illa poteſt eſſe abſciſſa parabolæ, & tempuſculum ordinata, quæ abſciſſam infinities ſuperare debet. Nego tempuſculum eſſe infinities minus preſſione primitiva, immo infinities majus eſſe ajo. Nam poſito s infinite parvo $s^{1:2}$ eſt infinities majus s; cujus ratio a priori eſt, quia infiniteſi-

teſimæ ſunt fractiones , quarum numerator eſt unitas , & denominator eſt numerus infinitus. Unde quemadmodum in fractionibus extrahendo radices quantitas augetur, v. gr. $\sqrt{\frac{1}{16}}$ fit $= \frac{1}{4}$, ita extrahendo radices quantitatum infinite parvarum quantitas in infinitum augetur . Ergo $s^{1:2}$ eſt infinities majus s . Cum ergo p ad s habeat rationem eamdem, quam quantitas finita a ad s, & t ad $s^{1:2}$ ideſt ad quantitatem infinities majorem pariter habeat rationem quantitatis finitæ $\frac{12}{a^{1:2}}$ ad t, ſequitur t initio ſpatii eſſe infinite majus preſſione .

7. Quod vero attinet ad rationes Euleri , ex iis , quæ diſputavimus ſatis conſtat, quid ad eas dici poſſit , ut neceſſe non ſit in iiſdem refutandis valde immorari. Id unum adverto preſſionem quidem initio ſpatii eſſe infinite parvam, ſi cum quantitate finita conferatur, infinite vero magnam, ſi comparetur cum ſpatiolo percurrendo; idque aperte colligitur ex æquatione $a : p = p : s$ num. 6. Quare ſatius duco ad alia tranſire .

ARTICULUS V.

De calculo exponentiali , & difficultatibus , quæ in eo occurrere poſſunt .

§. 83 Animadverſio

HActenus expendimus difficultates, quæ occurrere ſolent in calculo differentiali atque integrali earum curvarum , quarum omnia puncta eadem æquatione continentur , ſive ut accuratius loquamur, in quibus etſi dignitates radicum variabilium occurrunt, illarum tamen exponentes conſtantes ſunt. Sic in parabolæ ſingulis punctis eſt $a x^1 = y^2$, qua in æquatione 1, & 2 exponentes variabilium x , & y inter quantitates conſtantes ſunt referendi. Nunc vero ad examen revocaturi ſumus quæ difficultatem facere poſſunt in eo curvarum genere , quæ exponentiales dicuntur , quæ eadem quidem æquatione ubique definiuntur , ſed radicum aut variabilium , aut etiam conſtantium exponentes variabiles habent. Ita exponentialis eſt illa curva cujus abſciſſæ x , & ordinatæ y illiuſmodi ſunt , ut ubique ſit vel $x^x = y$, vel $a^x = y$, vel $x^x = y^y$, vel $x^y = y$, vel quid ſimile.

Qui-

Quibus in æquationibus per ſe conſtat aliud eſſe xx, aliud x^x. primam formulam ſignificare potentiam ſecundam radicis x, ſive x^2 ita ut ſi $x = 4$, xx ſit $= 16$; ſecundam vero ſibi velle radicem x elevatam ad potentiam, quam eadem radix x tamquam exponens indicat, itaut ſi $x = 4$, x^x ſit $= 4^4 = 256$, ſi $x = 6$, x^x ſit $= 6^6$.

2. Quæ formulæ tangentium, ſubtangentium $\frac{ydx}{dy}$, ſubnormalium $\frac{ydy}{dx}$, arearum ydx, rectificationis curvarum $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ &c. in curvis algebraicis deprehenduntur, illæ eædem in curvas exponentiales conveniunt. Sed hujuſmodi formulæ nulli ſunt uſui, niſi æquationes exponentiales differentientur. Nam ut ex duobus capitibus ſuperioribus conſtat, æquationum differentialia invenienda ſunt, quo in ſingulis curvis formularum, quæ quantitatibus differentialibus conceptæ ſunt, valores in communibus quantitatibus cognoſcantur. Jam vero per communes calculi differentialis regulas compertum non fit, qui quantitates variabiles, aut conſtantes ad potentiam ſed variabilem elevatæ differentiari debeant. Non enim ſolius radicis, ut etiamnum fecimus, differentia invenienda eſt, ſed exponentis etiam, propterea quod variabilis eſt. Immo in æquatione $a^x = y$, ſolius exponentis x differentia quæritur, cum conſtans radix a nullam ipſa per ſe habeat, Difficile vero eſt intelligere quodnam ſit differentiale variabilis, quamdiu hæc locum occupat exponentis.

3. Quamobrem totum calculi exponentialis artificium in eo ſitum eſſe debet, ut in æquationibus exponentes variabiles è loco, in quo ſunt, ad locum radicum, tamen ſervata æquatione, retrahantur, quo regulis calculi differentialis, & inde profecti integralis ſubmitti poſſint. Id autem logarithmis perficitur. Qua in re illud primum loco principii ſine alia explicatione ab Auctoribus ſtatuitur, quod quantitatum æqualium logarithmi æquales ſunt. Verum ne quid obſcuri notiones involvant, in duabus progreſſionibus geometricis, inter quarum terminos eadem proportio eſt, non in progreſſionibus diverſæ proportionis hoc principium ut verum admitti debere pronuncio. Nam ſi fiant hæ duæ progreſſiones geometricæ cum ſua quæque progreſſione arithmetica, cujus termini ſingulorum alterius terminorum ſunt logarithmi

1	2	4	8	16	32	64	128	256
0	1	2	3	4	5	6	7	8

in qua

in qua termini creſcunt in ratione dupla, &

1 4 16 64 256
0 1 2 3 4

in qua termini creſcunt in quadrupla, ejuſdem numeri 256 duo ſunt differentes logarithmi 8 & 4. Quamobrem ut numeri 256 idem ſit logarithmus 8, debet hic numerus in eadem progreſſione dupla conſiderari, vel ſi ſpectetur in quadrupla, termini progreſſionis arithmeticæ ab 0 incipientes ſola unitate diſcrepare non debent, ſed duabus, v. gr.

1 4 16 64 256
0 2 4 6 8

Cum autem in logarithmica (*Fig.* 21.) VZ, cujus axis TS, partes AC, CE, EI &c. AG, GM, MS &c. ſint æquales, ideoque ſi origo abſciſſarum conſideretur in A, AC, AE, AI itemque AG, AM, AS æquidifferentes, & BA, DC, HE, KI in proportione geometrica creſcant, AB vero, LG, NM, ZS in eadem proportione geometrica decreſcant, ſi fiat primus terminus BA = 1, erit AC logarithmus rectæ DC, AE logarithmus HE, & AI logarithmus KI, itemque AG, ſive — AG logarithmus rectæ LG, — AM logarithmus NM &c. Primi vero termini BA = 1 logarithmus = *o*, quod ibi nulla eſt abſciſſæ pars. Quare ſi progreſſio geometrica in ordinatis logarithmicæ, & arithmetica in abſciſſis axis ejuſdem curvæ conſideretur, ut revera conſiderari poſſunt, verum erit æqualium quantitatum æquales eſſe logarithmos, ſi in duabus logarithmicis loco primi termini, ſive unitatis æquales AB accipiantur, & inter AB aliaſque ordinatas in utraque logarithmica eadem ratio geometrica intercedat.

4. Alterum vero calculi exponentialis principium eſt logarithmum alicujus dignitatis eſſe æquale logarithmo radicis per exponentem multiplicato, v. gr. in ſerie prima logarithmus $2^2 = 4$ eſt = logarithmo radicis 2, qui logarithmus = 1, multiplicato per 2, item logarithmus $2^3 = 8$ eſt æqualis logarithmo 1 radicis 2 multiplicato per 3. Unde generatim $la^x = xla$, item $lx^x = xlx$. Qua de re a multis dilucide explicata plura verba non faciam.

5. Quod attinet ad differentialia logarithmorum, jam conſtat ex §. 243. Wolphii, ſi ſubtangens logiſticæ ſit $= a$, dly eſſe $= \frac{ady}{y}$, & $dlx = \frac{adx}{x}$. Quod ſi ſubtangens Logiſticæ utpote conſtans fiat $= 1 = AB$, quod fieri poteſt ſi AB ſumatur = ſubtan-

tangenti (*Fig.* 21.) erit $dly = \frac{dy}{y}$, & $dlx = \frac{dx}{x}$. Ex quo facile eſt eruere generalem regulam differentiandi logarithmos, quorum alius in alium ducitur, ſive logarithmorum potentias. Nam juxta regulas generales differentiandi differentiale $lxlx = dlx^2$ eſt hujuſmodi $2lx^{2-1}\,dlx$, item $dlxlxlx = dlx^3$ eſt $= 3lx^{3-1}\,dlx$, & generatim $dlx^n = nlx^{n-1}\,dlx$; ſed in his omnibus $dlx = \frac{dx}{x}$. Ergo $dlx^2 = \frac{2lx^{2-1}\,dx}{x}$, $dlx^3 = \frac{3lx^{3-1}\,dx}{x}$ & generatim $dlx^n = \frac{nlx^{n-1}\,dx}{x}$.

6. His conſtitutis, per quæ cetera calculi exponentialis principia a Wolphio & ab aliis explicata facile intelliguntur, paucis declaremus modum, quo idem Wolphius ad Problema 114. §. 268. curvam exponentialem conſtruere docet. Sit itaque conſtruenda curva exponentialis, ad quam $x^x = y$. Fac (*Fig.* 22.) eſſe deſcriptam quamvis logarithmicam I M B O, cujus axis H λ; ſumatur in ea curva ordinata A B, quæ ſit = ſubtangenti logiſticæ, & A B fiat = 1 primo ſcilicet termino geometricæ progreſſionis, quæ eſt inter illius ordinatas. Sitque P M $= x$, erit A P $= lx$. Cum vero ex hypotheſi ſit $x^x = y$, erit ex iis, quæ modo explicavimus, $xlx = ly$. Ex qua æquatione hæc exſiſtit analogia $1 : lx = x : ly$, ſive $1 : x = lx : ly$. Itaque datis tribus $1 =$ A B, $x =$ M P, & P A $= lx$, invenietur quartus proportionalis ly major lx, ſicuti x eſt major 1; & huic quarto ly fiat = A H, ductaque ordinata H I ad logiſticam hæc H I ex natura logiſticæ erit $= y$, ſiquidem A H eſt $= ly$ logarithmus ordinatæ y. Jam vero fiat A C = P M $= x$, & C M G = H I $= y$, dico punctum G eſſe in curva quæſita G K S Δ, ad quam $x^x = y$. nam ſi AE conſideretur ut axis curvæ, & C G, B K &c. ut ordinatæ, abſciſſa A C $= x$ & ordinata C G $= y$ hujuſmodi erunt, ut ſit $1 : x = lx : ly$, ideoque $xlx = ly$; & tandem $x^x = y$. Q. E. O. Hoc modo omnia alia puncta definiri poterunt, quamdiu abſciſſa $x =$ P M ſumetur ſupra B A $= 1$, ideoque major B A, illudque conſtat ex analogia $1 : x = lx : ly$ ordinatas H I, ſive C G augeri vel minui, prout abſciſſa P M $= x$ plus vel minus abeſt ab A B.

Sed pone P M ita acceſſiſſe ad A B ut cum ea congruat, & ſit $x =$ A B $= 1$, tunc nullus erit logarithmus x, ſive $lx = 0$, & ſupe-

ſuperior analogia $1 : x = lx : ly$ in hanc mutabitur $1 : 1 = o : ly$ Quamobrem etiam logarithmus $ly = o$. Sed cum logarithmus eſt o, terminus illi reſpondens in progreſſione geometrica ſive in ordinatis logiſticæ eſt unitas; igitur $y = 1 =$ AB, cui ſi ex modo dictis BK fiat æqualis, erit BK ordinata curvæ exponentialis, & K punctum erit in eadem. Alio etiam modo invenire poſſumus BK eſſe $=$ AB $= 1$. nam intelligatur PM eſſe in diſtantia infinite parva ab AB; tunc in analogia $1 : x = lx : ly$, cum 1 & x ſint quantitates finitæ, & lx infinite parva, erit etiam ly infinite parva, ideoque $= o$, quo rurſus evincitur ordinatam y illi reſpondentem eſſe $=$ AB $= 1$. Quo vero alia puncta DSXΔ curvæ determinare poſſimus, ordinata MP $= x$ diſcedat a BA, quicum congruere vidimus, & abeat in YZ $= x$, atque in alias ordinatas ſemper minores BA. Erit nihilominus $1 : x = -lx : -ly$. Cum 1 ſit majus x, erit etiam $-lx =$ AZ major AQ $= -ly$, ductaque NQ $= y$, & YF $=$ AZ $= -lx$, fiat FD $=$ QN; erit ex dictis punctum D in curva. Cumque NQ ſit minor BA $=$ BK, erit etiam FD minor BK. Eadem ratione omnes alias ordinatas VS, OX uſque ad ΔA conſtruemus. Quod autem pertinet ad ultimam ordinatam AΔ, illa eſt $=$ BA $=$ BK, ſed ratio, qua id probat Wolphius, in aliquam difficultatem videtur incurrere. Nam ita ſe habet. In analogia ſuperiori eſt $1 : -lx = x : -ly$. Sed x in puncto A eſt $= o$; ergo etiam $-ly$ eſt $= o$, ideoque y, cui fieri debet $=$ AΔ, erit $= 1 =$ AB $=$ BK. Difficultas autem in eo eſt, quod ſi $x = o$, $-lx$ fit $= \omega$, cum quo ordinatæ ad logiſticam ſcilicet YZ, VT &c. minores fiunt, abſciſſæ AZ, AT $= -lx$ eo plus creſcant, & ordinata Oλ in infinitum minuta, abſciſſa A$\lambda = -lx$ infinito æqualis evadat. Quo poſito non patet in dicta analogia $-ly$ eſſe $= o$. Verum id facile ſolvitur, ſi geometricam progreſſionem ab unitate AB profectam, & ordinatis NQ, YZ, VT expreſſam minui percipiamus, & in infinitum continuari, ſubſcriptam autem arithmeticam ab o incipientem, & per abſciſſas AQ, AZ, AT, Aλ &c. deſignatam augeri, & pariter in infinitum continuari intelligamus. Hoc enim pacto termino geometricæ infinite ab unitate diſſito, & ideo $= o$ infinitum in arithmetica terminum, ſive logarithmum reſpondere comperiemus. Jam vero intelligatur Aλ in infinitum primi gradus producta, ducaturque O$\lambda =$ x ordinata ad logiſticam; erit x infinite parva ſecundi gradus: nam

nam ſicuti cum duæ progreſſiones altera geometrica, arithmetica altera ab unitate, & ab *o* incipientes augentur, plus infinito geometrica, quam arithmetica creſcit, ita cum geometrica in infinitum minuitur, & arithmetica in infinitum augetur, infinito plus minuitur illa, quam hæc augeatur. Unde ſi A λ = — *lx* ponitur infinita primi gradus, o λ = *x* poni debet infinite parva ſecundi. Hoc poſito ut ſervetur analogia 1 : *x* = — *lx* : — *ly*, cum 1 ſit finita, *x* infinite parva ſecundi gradus, & — *lx* infinite magna primi, — *ly* debet eſſe infinite parva primi gradus, ideoque = *o*, ſi conferatur cum A Q; unde conſequens ſit — *ly* in hoc caſu eſſe oportere logarithmum unitatis = A B.

7. Sed hæc infirmari videntur iis, quæ num. 120. doctiſſimi libelli inſcripti *Memorie del Calculo Differenziale, ed Integ. P. I.* ſcripſit Corradi. Negat enim poſſe in Logarithmica exſtare ordinatam aut infinitam, aut = *o*, aut abſciſſam infinitam. Primum ita ſuadere nititur. Fac H I eſſe infinitam, & abſciſſam A H in duas medietates in P partire. Ducta ordinata P M inter A B, & H I proportione reſpondebit, atque idcirco infinitum rectangulum ex A B in H I erit = quadrato ex P M, quod ideo foret infinitum. Hoc autem nullo modo eſſe poteſt, quoniam quadratum P M habet aut figuram lateribus contentam, aut terminos undequaque finitos. Alterum vero eadem ratione conficere conatur. Si enim (inquit) o λ = *o*, erit quadratum rectæ Y Z ab o λ & B A æquali intervallo diſſitæ = rectangulo ex A B in o λ ſcilicet nihilo, quod pariter pugnat. Utrumque autem hac alia ratione confirmat, quam ipſius verbis in latinum translatis exprimam. *In Logarithmica ratio ordinatæ primitivæ (v. gr. A B) ad ſuam contiguam non poteſt non eſſe æqualis rationi alius cujuſcumque primitivæ ad ſuam contiguam. Si igitur in logarithmica inter duas ordinatas ratio finiti ad finitum intercedit, ut neceſſarium eſt, numquam fieri poteſt, ut inter quamcumque aliam primitivam ſuamque contiguam ratio detur, aut finiti ad infinitum, aut nihili ad finitum, atque idcirco ut ordinata = vel infinito, vel* o *ducatur.* Cum vero multo minus abſciſſæ, quam ordinatæ creſcant, ex hoc tertium deducit abſciſſam fieri non poſſe infinitam; & inde etiam hoc aliud ſpatium logarithmicum abſciſſæ ſubjectum ſemper manere finitum; tametſi, ut ipſe advertit, utramque quantitatem fieri poſſe infinitam Clariſſimi Viri crediderint.

8. Sed ego nihilominus perſto in ſententia, quam in ſimili materia de ſpatio aſymptotico hyperbolæ defendi §. 76. num. 3. quem

quem conſule. Vel enim Corradus propoſitum habet his rationibus conficere nullam eſſe poſſe quantitatem aut infinite magnam, aut infinite parvam: vel eas vult pertinere ſolum ad ordinatas & abſciſſas Logiſticæ. Si primum, nunc non valde repugno qui quantitates infinite parvas deſignari poſſe nullis rationibus effici alias oſtendi, in poſterioribus examinaturus, quantum momenti in iis aliis ſit, quibus multi conantur oſtendere quantitates infinite magnas aut parvas eſſe non poſſe; modo tamen is quoque aſſentiatur, quod inſignem Algebræ Præceptorem facile aſſenſurum puto, nihil inde hunc calculum detrimenti capere. Sin autem ſecundum, in ejus ire ſententiam minime poſſum, & ajo, ut ſemel aliis in curvis quidpiam aut infiniti, aut minimi conſtare poteſt, nihil eſſe in logarithmica peculiare, quod cum infinita, aut minima magnitudine conciliari non queat. Quid enim, ut a primo incipiam, abſurdi eſt, quod ad logarithmicam ſpeciatim attineat, ordinatæ PM inter infinitam HI, & finitam AB mediæ proportionalis quadratum eſſe = rectangulo infinito ex HI in AB? Aliud nihil eſt opus, niſi ut HI ſit infinita ſecundi gradus, PM infinita primi, & BA finita. Quod data hypotheſi poſſibilitatis cujuſdam quantitatis infinitæ fieri poſſe nemo non videt, & nos ſupra abunde confecimus. At enim quadratum $(PM)^2$ figuram habet lateribus contentam, & undique terminis circumſcribitur. Verum quid veritati hypotheticæ infinitatis rectæ PM termini poſſunt obeſſe, ſi convenienter hypotheſi, quod infinita abſciſſa AH ducta fuerit & in duas medietates AP, PH pariter, ut opus eſt, infinitas diſpecta, ordinata PM debeat eſſe infinitis vicibus major finita BA? fortaſſe id oberit veritati abſolutæ non hypotheticæ, quam & hic & in aliis Analyſis Infinitorum Problematis ſatis eſſe defendimus; quod quale ſit, alias videbimus. Deinde nonne ex hypotheſi concedit Corradi, niſi velit Analyſim funditus tollere, ad infinitam rectam AH poſſe duci duas rectas infinite diſtantes, quarum altera BA finita, altera HI infinite magna ſecundi gradus, & ope circini poſſe deſignari mediam proportionalem PM, quæ ad medium intervallum inter A & H abſciſſæ infinitæ AH ordinetur? Jam vero per tria puncta BMI logarithmicam tranſire ejus natura liquidum facit. Ab his autem hypotheſibus aſymptoti infinitæ nihil abſurdi concludi patet vel ex methodo directa tangentium, in qua adminiculo hypotheſis aſymptoti infinitæ vera illius ori-

origo & diſtantia centri a vertice in hyperbola determinatur §. 77. Quæ omnia transferri poſſunt paucis mutatis ad ſolvendam illius ſecundam rationem adverſus ordinatas infinite parvas; ſi modo nomine ordinatæ $= o$ ordinatam infinite parvam, quæ habita ratione finitæ nihil eſt, intelligit. Nam ſi neget aliquam ordinatam fieri poſſe = vero nihilo, ejus ſententiæ & rationi, qua illam firmavit, ſubſcribo; & ajo fieri poſſe ſolum infinite parvam 1, 2, 3 &c. in infinitum gradus, quo trium ordinatarum eadem ſemper proportio ſervetur. Quod vero attinet ad tertiam rationem, explicet mihi Corradus, ſi poteſt, qui in aliqua curva ordinatæ vel abſciſſæ ex finitis infinitæ fiant, & punctum aliquod inveniat, quo deſinant ordinatæ finitæ, & infinitæ incipiant? Hoc punctum, inquiet, inveniri ac determinari nequit, utpote quod infinite diſtat, & alioquin omnino repugnat aliquam ordinatam finitam ordinatæ infinitæ proximam eſſe, cum inter duas quaslibet contiguas ſolum infinite parvum diſcrimen intercedat neceſſe ſit. Addet etiam fortaſſe a Geometris quantitates infinitas ſolum ex hypotheſi aſſumi, ex qua nihilominus multa abſolute vera deducuntur. His, quæ Cl. Auctor reſpondebit adverſus Impugnatores quantitatum omnium, quæ aut infinite magnæ ſint, aut infinite parvæ, ego utor contra ipſum, & ajo datis duabus contiguis finitis ordinatis in Logarithmica numquam dari poſſe duas alias contiguas, quarum altera finita ſit, altera infinita, aut infinite parva: ſed ſolum duas, quarum utraque ſit infinite aut major, aut minor finita. Ex quo nihil abſurdi concludi poteſt, propterea quod finita ad finitam eſſe quit ut vel infinita ad aliam in eodem gradu infinitam, vel infinite parva ad alteram pariter ejuſdem gradus infinite parvam.

8. Quamobrem nihil a Corrado affertur, quod traditum modum evertat curvæ exponentialis conſtruendæ. Quo conſtituto ſit invenienda ſubtangens curvæ, in qua $a^x = y$. Si itaque ſpectemus a^x & y ut ejuſdem bis poſitæ logiſticæ ordinatas, erit logarithmus unius = logarithmo alterius, ſcilicet $x\,la = ly$. Quod ſi in eadem logiſtica ſubtangentem uti conſtantem = 1 ponamus, erit $la\,dx = dy : y$ (§. 243. Wolphii) cum la ut conſtans nullum differentiale habeat, & dividendo per la erit $dx = dy : y\,la$. Ergo ſi in ſubtangente $y\,dx : dy$ valor dx nunc inventus ſubſtituatur, erit hæc ſubtangens $y\,dy : y\,la\,dy = \frac{1}{la}$,

quæ

quæ cum conſtans ſit, evincit propoſitam æquationem $a^x = y$ eſſe ad logiſticam, cujus ſubtangens $= \frac{1}{la}$. Quid, inquies, neceſſe eſt ex eo, quod ex propoſita æquatione $a^x = y$ naſcitur ſubtangens conſtans $= \frac{1}{la}$, concludere dictam æquationem ad logiſticam pertinere, atque ad eam logiſticam, cujus ſubtangens $= \frac{1}{la}$, cum a^x & y ut ordinatas ejuſdem logiſticæ initio poſuerimus, atque iis ita ſpectatis ſuos logarithmos pariter æquales, ac ſunt ordinatæ, ſubſtituerimus? Accipe. Potes quidem a^x & y ut ordinatas ejuſdem logiſticæ conſiderare, propterea quod ex infinito numero logiſticarum, quæ eſſe poſſunt, illa ſeligi poteſt, in qua ordinatæ a^x & y ad alias ordinatas ſint in continua geometrica progreſſione, dum abſciſſæ illius rectæ, ad quam illæ ordinatæ applicantur, in arithmetica progrediuntur. Sed ex eo, quod duæ ordinatæ æquales ſint a^x & y, non continuo potes inferre dari talem æquationem ad omnes alias ordinatas y logiſticæ, propterea quod adhuc neſcitur utrum geometrica ordinatarum & arithmetica abſciſſarum progreſſio talem æquationem patiantur. Quod ſi compertum id fiat ex eo, quod ex tali æquatione conſtans ſubtangens oritur, quæ talis non eſt, niſi in Logiſtica, tunc efficere poteris logiſticam, cujus ſubtangens $= \frac{1}{la}$, hac æquatione $a^x = y$ contineri. Et revera paulo poſt faciemus perſpicuum æquationem $x^x = y$ non pertinere ad logiſticam, propterea quod inde oritur ſubtangens variabilis. Nunc conſtruamus ſubtangentem $\frac{1}{la}$, ſive lineam rectam illi æqualem determinemus (*Fig.* 23.). Sit recta $AC = a$, abſcindatur pars $AB = 1$, & ad axem RAP applicentur ordinatæ ab AB verſus M creſcentes, & ab AB verſus N decreſcentes, ſed cum aliqua geometrica progreſſione, quam natura logiſticæ deſiderat. Sit hæc logiſtica curva MBN, & ex C ducatur axi AP parallela CM, quæ in aliquod punctum M Logiſticæ utpote ſe in infinitum explicantis incurret. Et ducta MP parallela rectæ CA, ideoque $= CA = a$, & $PA = la$ puncta P, B recta PB conjungantur. Quibus factis ſume $PQ = BA = 1$, & ex puncto Q duc parallelam rectæ BA, quæ parallela erit $= \frac{1}{la}$. nam ex. ſimilit. Triang. erit

 PA:

$PA : AB = PQ :$ ad hanc parallelam

$la : 1 = 1 : \frac{1}{la}$

9. Ut vero quadremus ſpatium interminatum BASI Logiſticæ, ſit Logiſticæ tangens RB, & ſubtangens $RA = \frac{1}{la}$, $AB = y$, AV infinite parva ſumta in abſciſſa, & ideo $= dx$ erit

$a^x = y$ (271. Wolphii in Anal. Infin.)

$xla = ly$ (341. Arit.), & differ.

$ladx = dy : y$ (243.), & divid. per la

$dx = dy : yla$, & multipl. per y, ut elementum areæ exſiſtat, $ydx = ydy : yla = dy : la$, & integ.

$$Sydx = y : la = y \times \frac{1}{la} = AB . AR$$

Cum vero AB. AR ſit duplum trianguli contenti tangente RB, ſubtangente RA, & ordinata AB, erit ſpatium interminatum ABIS duplum dicti trianguli RAB. Vide quomodo diſparentibus quantitatibus ita intricatis & captu difficilibus $a^x = y$, ut qui enuntiari debeant, ſatis non intelligatur, theorema non ſolum quod verum ſit, ſed quod etiam ab omnibus intelligi facile queat, eliciatur. At enim non liquet cujuſcumque logiſticæ, quæ quadranda ſit, ſubtangentem eſſe poſſe $= \frac{1}{la}$ Illud ſaltem liquet hanc eſſe conſtantem. Ponatur igitur $b = AR$, $AB = 1$, & AP tertia proportionalis. Ad punctum P erigatur PM = conſtanti alteri a, & inter AB, PM tanquam ordinatas deſcribatur logiſtica BM; erit

$PA = la$, unde $AR : AB = AB : AP$.

$b : 1 = 1 : la$. Ex quo infertur $bla = 1$, & divid. $b = \frac{1}{la}$. Q. E. Oſt.

10. Quibus poſitis facile definietur ſubnormalis Logiſticæ. Quoniam $ladx = dy : y$, erit multipl. per y

$dy = yladx$, & multipl. per y, & divid. per dx

$ydy : dx = y^2 ladx : dx$

Sed $ydy : dx$ eſt ſubnormalis. Igitur ſubnormalis

$= y^2 ladx : dx = y^2 la = y^2 : \frac{1}{la}$

Eſt ideo ſubnormalis tertia proportionalis ad ſubtangentem AR

=

$= \frac{1}{la}$, & ordinatam PM $= y$. Nam

$$\frac{1}{la} : y = y : \left(y^2 : \frac{1}{la} \right),$$ quæ $\frac{1}{la}$ eſt ſubtangens.

Quod ſi parabola deſcribatur, cujus parameter = ſubtangenti logiſticæ $= \frac{1}{la}$, ſemiordinatæ parabolæ eædem ſunt ac ordinatæ logiſticæ ſcilicet $= y$, & abſciſſæ eædem ac ſubnormales ſcilicet $= y^2 : \frac{1}{la}$; nam in parabola quadratum ex ſemiordinata eſt = rectangulo ex abſciſſa in parametrum. Sed hæ tres quantitates $\frac{1}{la}, y, y^2 : \frac{1}{la} = \frac{y^2 la}{1} = y^2 la$ ſunt in continua proportione, atque ideo quadratum ex y eſt æquale rectangulo ex parametro $\frac{1}{la}$ in $y^2 : \frac{1}{la}$ abſciſſam parabolæ = ſubnormali logiſticæ. Ergo conſtat quod propoſitum eſt.

11. Ut vero compertum fiat æquationem exponentialem quandoque ad logiſticam non pertinere, ſed ad curvam, quæ logiſtica conſtruitur; ſit curva exponentialis, ad quam $x^x = y$. Quoniam $x\,lx = ly$ (341. Arit.) erit differen.

$$lx\,dx + x\,dx : x = dy : y$$
$$lx\,dx + dx = dy : y, \text{ \&multipl. per } y$$
$$y\,lx\,dx + y\,dx = dy$$

Ergo ſubtan. $y\,dx : dy = \frac{y\,dx}{y\,lx\,dx + y\,dx}$ & divid. per $y\,dx$ erit ſubtang. $= \frac{1}{lx+1}$. Quæ ſubtangens cum ſit variabilis ob lx, indicat ſe, & æquationem $x^x = y$ non pertinere ad logiſticam, ſed ad curvam ΔSKG (*Fig.* 22.), quæ per logiſticam conſtruitur; ſcilicet ſi ad punctum Φ ducatur tangens ΦΨ, erit PΨ ſubtangens $= \frac{y\,dx}{dy} = \frac{1}{lx+1}$; ut paulo ante monſtravimus.

12. Concludamus hunc locum explicatione problematis, quo (*Fig.* 22.) minima applicata FD in curva exponentiali, ad quam $x^x = y$, determinatur. Quoniam ex altera parte $y\,lx\,dx + y\,dx = dy$, num. 11. & ex altera ubi eſt minima applicata,

ex methodo de maximis & minimis liquet dy eſſe $= o$ erit
$ylxdx + ydx = o$, & divid. per ydx erit
$lx + 1 = o$, ideoque
$lx = -1$. Quod cum ita ſe habeat,
ſuperior illa analogia $1 : lx = x : ly$
in hanc aliam mutabitur ſubſtituto -1 pro lx
$1 : -1 = x : -ly$

Ex qua primum conficitur logarithmum lx debere eſſe æqualem $1 =$ AB, ſed in ſenſu contrario ſcilicet negativo ideoque ab A verſus λ. Unde abſcindatur AZ $=$ AB $= 1$, & ordinata ZY $= x$ ducatur, cujus logarithmus lx erit $= -1$. Deinde conſequitur, quemadmodum 1 eſt $= -1$, ſed in ſenſu contrario, ita & x debere eſſe $= -ly$, ſed pariter in ſenſu contrario. Cumque YZ $= x$ ſit poſitiva, ſumere oportet quartam proportionalem $-ly = x$, ſed negativam, & ideo ab A verſus λ. Fiat itaque AQ $= -ly = x =$ YZ, & ordinata NQ ducatur $= y$, quæ y applicetur ad FD, ut ſit FD $=$ QN $= y$. Erit FD ordinata ad curvam exponentialem, & punctum D in illa, ut ex conſtructione dictæ curvæ ſuperius tradita conſtat, & quidem minima omnium, propterea quod ex hypotheſi $dy = o$, ſive Methodo de Maximis & Minimis talis determinata fuit.

13. Quæres hic, quem ſitum occupet punctum F an medium præciſe inter B, & A, nec ne. Ad id reſpondeo prius definiendam eſſe naturam illius Logiſticæ, qua curva exponentialis conſtructa fuit, quam tibi ſatisfaciam. Nam ſi Logiſtica IBVO tali modo deſcripta eſt, ut poſita ſemiordinata AB $= 1$, & abſciſſa AZ $=$ AB $= 1$, applicetur YZ ſubdupla ordinatæ AB, ſumtaque Zλ $=$ AZ, pariter RO ſubdupla rectæ YZ fieret; tunc nemo non videt ducta YF parallela AZ, ut ad definiendum punctum F duci debet, rectam FA fore æqualem rectæ YZ $= \frac{1}{2}$ AB, ideoque punctum F ab extremis A & B æqualiter abeſſe. At ſi inter ordinatas logiſticæ talis proportio ſit, ut vel YZ ſit major $\frac{1}{2}$ AB, vel minor, punctum F in priore caſu futurum eſſe propius B, in ſecundo propius A plane concluditur.

AR-

Digitized by Google

ARTICULUS VI.

De Calculo differentio-differentiali, & difficultatibus, quæ in eo occurrunt.

§. 84. Propoſitio

Atque hæc de calculo exponentiali dicta ſint ſatis; nunc aliqua de differentio-differentiali, deque Methodis inde profectis dicamus. Quod ad leges attinet inveniendi differentialia differentialium, ſcilicet infinite parvum augmentum, aut decrementum quantitatum infinite parvarum, illud principii loco ſtatuitur eaſdem profecto eſſe ac leges, quibus quantitatis finitæ differentialia inveniuntur. Fac enim, ex. cauſſa, differentiandum eſſe rectangulum $x\,dx$ ſive productum ex finita x in infinite parvam dx; x ita creſcet, ut contigua fiat $x+dx$, dx vero ita, ut contigua fiat $dx+ddx=dx+d^2x$. Jam vero ducendo has duas quantitates

$$\begin{array}{c} x+dx \\ dx+d^2x \end{array}$$

exſiſtit $x\,dx+dx\,dx+x\,d^2x+d^2x\,dx$, quorum terminorum primus tollendus eſt, quia cum ſit illa eadem quantitas, cujus parvum augmentum deſideratur, ipſummet augmentum eſſe non poteſt. Quamobrem augmentum poſitum eſt in tribus, qui ſequuntur; ſed quartus ob hanc rationem delendus eſt; quod nihil eſt habita ratione ſecundi & tertii; nam rectangula $dx\,dx$, $d^2x\,dx$ ſuper iiſdem baſibus dx, dx conſtituta habent eamdem rationem ac altitudines dx, d^2x; ſed d^2x eſt infinite parva, ratione habita dx; ergo etiam $d^2x\,dx$ eſt infinite parvum ratione habita $dx\,dx$, ideoque pro nullo habendum eſt. At ſi $dx\,dx$ cum $x\,d^2x$ comparetur, ſunt infinite parva ejuſdem gradus; ſiquidem rectangulum factum ex lateribus infinite parvis primi gradus, uti eſt $dx\,dx$, eſt infinite parvum ejuſdem gradus ac rectangulum, cujus alterum latus eſt finitum $=x$, alterum infinite parvum ſecundi gradus $=d^2x$. Quod etiam ex eo patet, quia poteſt eſſe analogia inter has quatuor quantitates $dx : x = d^2x : dx$, atque idcirco $dx\,dx$ factum ex extremis eſſe $=x\,d^2x$ facto ex mediis, quod evincit utrumque eſſe infinite quidem parvum, ſed tamen ejuſdem gradus, atque ideo retinendum, utpote quia aliud alius reſpectu pro nullo haberi non poteſt. Manet igitur diff. $x\,dx$ eſſe $dx\,dx+x\,d^2x$, ſive

$dx^2 + xd^2x$, ſcilicet differentiale duarum quantitatum ſe mutuo multiplicantium x & dx eſſe rectangulum ex ſecunda dx in differentiale primæ x, & rectangulum ex prima x in differentiale ſecundæ dx, quod eſt $ddx = d^2x$.

2. Unde etiam conficitur

$$d.(dx\,dx) = d(dx^2) = 2dx\,d^2x$$
$$d(dx^3) = 3dx^2\,d^2x$$
$$d(dx^4) = 4dx^3\,d^2x, \text{ \& in genere}$$
$$d(dx^m) = m\,dx^{m-1}\,d^2x.$$

Ex his autem Wolphius bene concludit §. 299. Anal. Inf. quibus legibus finita differentiantur, iiſdem infinite parva differentiari, & §. 300. hæc duo elicit differentio-differentialia, ſcilicet ut $d\,\frac{1}{dx}$ ſit $= -d^2x : dx^2$, & $d(ydy) : dx) = (dy^2 + yd^2y) : dx$, ſi dx ſit conſtans; vel $= (dx\,dy^2 - ydy\,d^2x) : dx^2$, ſi dy conſtans.

3. Quo vero intelligant tyrones, quomodo fieri poſſit, ut dx pro conſtante ſumatur, tametſi x ſit varia; ſint duæ curvæ AM (*Fig.* 24. & 25.) quarum altera (*Fig.* 24.) axi AQ concavitatem obvertit, altera (*Fig.* 25.) convexitatem. Intelligatur recta MP motu æquabili, ſibique parallela moveri verſus SQ ita, ut æqualibus tempuſculis æquales rectas Pp, pQ percurrat, & interea ſuper rectam PM productam ab extremo M indeſinenter ferri punctum quoddam ſed motu retardato, hoc punctum per duas vires ad angulum oppoſitas, quarum una ſemper eadem manente æquabiliter defertur per PQ, ſive per parallelam MR, altera retardata recedit a PQ, ſed ſuper rectas, quæ eidem PQ ad angulum rectum ſemper inſiſtunt, curvam deſcribet MV, proptereaquod vis altera perpetuo major ſit non ipſa quidem per ſe, ſed ratione habita alterius, quæ indeſinenter minuitur. Duc itaque ordinatas PM, pm, QV infinite, ſed æqualiter contiguas, & rectas MR, mr parallelas, & ideo æquales minimis rectis Pp, pQ. His conſtitutis cum AP ponatur eſſe x, erit P$p = dx$, ſicuti & $= p$Q, MR, mr. Cumque PM, pm, QV ſint $= y$, erunt Rm, rV $= dy$. Jam vero ducatur tangens TM, quæ producta cum infinite parva lineola curva Mm congruet, eo quod, ut alibi advertimus, ab extremo m ordinatæ Rm infinite parvæ primi gradus lineola infinite parva ſecundi diſtabit, quam tamen lineolam ſi quis mente ſubſtituat inter m, quatenus eſt in tangente, & inter m, quatenus eſt in curva, interceptam, bene ſibi conſulet ad ea

facilius

Digitized by Google

facilius percipienda, quæ infra dicturi ſumus. Producatur tangens T M m, donec cum ordinata Q V producta concurrat in S; ex quo intelligemus exſiſtere S V lineolam pariter infinite parvam ſecundi gradus; nam quod V ſit infra S in ſchemate 24. patet ex eo, quia T M tangit in M curvam A M V, quæ ob ejus concavitatem jugiter accedit ad axem A Q, & ideo a tangente T M producta deorſum verſus recedit; & e contrario in *Fig.* 25. Quod vero ſit infra aut ſupra ſolum diſtantia V S infinite parva ſecundi gradus, conficitur ex eo, quod cum M V infinite parva utpote ex duobus infinite parvis M m, m V coaleſcens cum tangente S M ſolum ad angulum S M V infinite parvum concurrat, nequit ab illa tangente diſcedere niſi intervallo ſecundi gradus minimo; quod etiam compertum ſit ex eo, quod punctum incipiens declinare a recta per angulum infinite parvum, tempuſculo infinite exiguo nequit niſi infinite parvum ſecundi gradus intervallum divertere. Neque dixeris rectam, quæ duas finitas curvam & rectam tangentem comprehendat, eſſe finitam, tametſi angulus ſit infinite parvus, atque ideo rectam, quæ ſolum infinite parvas primi gradus tangentem & curvam complectatur, ſolum infinite parvam primi eſſe oportere: nam idcirco in diſtantia finita a vertice latus angulo ſubtenſum finitum ſit, quod curva cum diſtantia finita diſcedit a vertice, interea infinitis inflexionibus a tangente divertit, quorum utroque ſit, ut latus evadat finitum, tametſi in diſtantia infinite parva primi gradus idem latus fuerit infinite parvum ſecundi. Unde eſt aliquod diſcrimen inter latera, quæ duas rectas ad angulum infinite parvum concurrentes comprehendunt, interque latera, quæ tangentem & curvam complectuntur; nam illa in diſtantia infinite parva primi gradus a vertice ſunt quidem infinite parva ſecundi, in quo conveniunt cum his, ſed in diſtantia finita ſunt tantum infinite parva primi; quod contra in his accidit, propterea quod rectæ a ſe mutuo non divertunt niſi vi anguli verticis, qui cum ſit infinite parvus primi gradus, debet in diſtantia finita facere divaricationem ſolum infinite parvam primi gradus. At in angulo mixto latus divertit etiam vi infinitarum inflexionum. Atque in hiſce ac in ſimilibus, quæ ſupra explicavimus, verſari, ut opinor, deberent elementa curvarum, quæ teſte Wolphio in Hiſtoria Matheſeos etiamnum deſiderantur.

4. Sed in viam redeo, unde pauliſper diverti. Conſtat igitur (*Fig.* 24.) ordinatas R m, r V in curva A M V, quæ concavitatem

tatem obvertit axi AQ, minores fieri quantitate infinite parva ſecundi gradus, dum abſciſſæ Pp, pQ, ſive MR, $mr = dx$ conſtantes & ſemper æquales nullum hujuſmodi ſubeunt decrementum. In curva autem AMV, quæ convexitatem obvertit, (*Fig.* 25.) ordinatas Rm, rV majores fieri pariter quantitate infinite parva ſecundi gradus SV. Nam in triangulis ſimilibus (*Fig.* 24. & 25.) MRm, mrS & æqualibus, utpote quæ latera MR, mr æqualia habent, latus $Rm = rs$, ideſt in primo caſu $= rV + VS$, & in ſecundo $= rV - VS$. Cum autem rV infinite parvum primi gradus ſit $= dy$, erit VS infinite parvum ſecundi ſcilicet differentia inter Rm, & $rV = d^2y$.

5. His poſitis ſit curva AMQ (*Fig.* 26.) primum ab A uſque in M concava verſus axem AF, deinceps ab M uſque in Q convexa. Utrinque abſcindantur abſciſſæ æquales SR, ST, RV, TG, VN, GF, & applicentur ordinatæ NB, VD, RI, SM, TO, GP, FQ, & abſciſſis æquales ducantur BE, DK, IN, My, Ox, Ps, itemque tangentes BC, DH, IL, quæ in concava AM extra cadent, & cum ordinatis VD, RI &c. extra productis concurrent, & tangentes Mz, Ot, Pr, quæ in convexa MQ cum ordinatis TO, GP, FQ intra convenient. Quare cum origo curvæ ſit in A verſus M & Q, in comparandis ordinatis initium ſumendum eſt ab iis, quæ propius abſunt ab A. Ita fit ut in parte concava AM differentialia ſecundi gradus d^2y, ſcilicet DC, IH, LM ſint poſitiva, & in parte convexa Oz, Pt, Qr negativa ſint. Nam $ED = KH = KI + IH = dy + d^2y$, item $KI = NL = NM + ML = dy + d^2y$; ergo in parte concava omnes d^2y, ſcilicet DC, IH, ML ſunt poſitivæ. Rurſus $NM = yO - Oz = dy - d^2y$, item $yO = xP - tP = dy - d^2y$, & $xP = sQ - Qr = dy - d^2y$. Ergo liquet etiam alterum in parte convexa MQ omnes d^2y eſſe negantes. Quamobrem d^2y in puncto flexus M a ſtatu poſitivo ad negativum tranſeunt; & ſimul ab A uſque in M minores fiunt, atque ab M uſque in Q augentur. Quod infra oſtendetur. Id autem fieri non poteſt, niſi in M nihilo æquales evadant, ſive d^2y in $M = ML$ fiat infinite parva etiam habita ratione d^2y in aliis punctis finite tamen diſtantibus ab M, v. gr. IH, DC, ſi modo aliquod ex iis in diſtantia finita ab M verſus A ſumtum fuiſſet. Nam ſuper finitam AS infinitus numerus parvarum SR, RV &c. ſumi poteſt.

6. Quare in puncto flexus M erit $d^2y = 0$, ſive infinite par-

vum

vum habita ratione d^2y in aliis punctis ſive I H, D C; cum vero D C; I H ſint pariter infinite parva, ſi aut cum D E, I K &c. $= dy$, aut cum B E, D K, &c. $= dx$ conferantur; erit d^2y in M minimum etiam reſpectu quantitatis, quæ infinite parva ſit habita ratione dx conſtantis. Cumque poſita dx infinite parva primi gradus, dx^2 ſit infinite parva ſecundi, ut alibi docuimus, hinc tandem conſequitur, cum curva primum eſt concava ad axem, quicum tangentes concurrunt, & deinde convexa, in puncto flexus ejuſdem eſſe d^2y infinite parvum, ſi cum dx^2 comparetur. Dixi *quicum tangentes concurrunt*; nam ſi tangentes cum eo non congruant, aliter res ſe habet; ut infra videbimus.

7. Jam vero quid contingere oportet, cum curva primum convexa eſt, & deinde concava? Sit curva T M X (*Fig.* 27.) primum convexa ad A I uſque in M, & ab M uſque in X concava, cujus tangentes P n, G z, V t productæ concurrerent cum A I producta verſus A; & pariter in concava tangentes M Q, R N, O L, cum eadem eodem verſus. Hic aliter accidet, ac in altero caſu; nam ſemiordinatæ dy ſcilicet G r, V y, M x, jugiter creſcent uſque in M, ſcilicet erit G r = V y — V z, & V y = M x — M t. Quare hic differentialia ſecundi generis ſcilicet G n, V z, M t = $-d^2y$ erunt primum negativa in parte convexa, & e converſo cum in concava M x ſit = S R + R Q = $dy + d^2y$, & S R = p O + O N = $dy + d^2y$ &c. erunt in concava differentialia d^2y poſitiva, itemque a T uſque in M augentur, ut ab M uſque in X imminuuntur. Quod eſſe non poteſt, niſi in puncto flexus hoc differentiale M $t = d^2y$ fiat infinite magnum habita ratione aliorum differentialium V z, G $n = d^2y$. Ergo cum curva primum eſt concava, & deinceps convexa, in puncto flexus $d^2y = 0$; cum vero primum eſt convexa, & deinde concava, $d^2y = \omega$

8. Quæ duo ut magis confirmentur, ſit circulus, aut ellypſis, aut qualibet alia figura in ſe radiens C L P S (*Fig.* 28.), cujus centrum E, axes C P, S L. Quia tangentes B T & ſubtangentes B D a vertice C uſque ad S, augentur & ultra S in contrariam plagam tendunt, ſcilicet cum diametro C P verſus P O producta concurrunt, & ideo ſi antea poſitivæ, poſt S negativæ fiunt, & e converſo ſi antea negativæ, poſitivæ evadunt; idcirco in S infinitæ exſiſtunt. Quia vero ab S uſque in P imminuuntur, & a P uſque in L augentur, itemque ab S uſque in

in P verſus P & O feruntur, & a P uſque in L in contrariam plagam ſcilicet a P verſus L & E tendunt, idcirco in P tangentes & ſubtangentes infinitæ parvæ ſive nullæ evadunt. Ex quibus elici poſſunt hæc duo generalia theoremata 1. Si quantitas uſque ad aliquod certum punctum augeatur, indeque rurſus imminuatur, & in eo puncto ab alio ad alium ſtatum tranſeat, ſcilicet in contrarias partes tendat; hæc quantitas in eo puncto fit infinite magna 2. Si vero tranſeat quidem a ſtatu ad ſtatum, ſed primum imminuatur uſque ad punctum, indeque denuo creſcat, in eodem puncto fit infinite parva. Quæ duæ conditiones cadunt in curvas, quæ punctum habent contrarii flexus.

9. Nam primo (*Fig.* 26.) ſumtis extremis rectarum dy in concava, d^2y, ſive DC, IH, ML tendunt ab iis extremis verſus C, H, L extra curvam & ab axe NF recedunt, & ipſis ordinatis adjiciuntur; at in extremis convexæ O, P, Q tendunt ab O, P, Q verſus axem, & de ordinatis yO, xP, sQ ſubducuntur. Deinde in eadem parte concava uſque ad M jugiter imminuuntur, & in convexa ab M uſque in Q jugiter creſcunt. Nam triangula BED & DKH ſunt æqualia; ſiquidem tangens DH producta cum parte BD curvæ congruit: quia vero tres NB, VD, RI ſunt parallelæ, angulus BDE erit = angulo DHI externus interno. Item anguli ad E & K ſunt æquales utpote recti, & latus BE eſt æquale lateri DK ex hypotheſi. Igitur totum triangulum BED eſt = triangulo DKH, & baſis ED = baſi KH. Quare ED = dy, erit major KI = dy, eademque ratione oſtendemus KI = dy eſſe majorem NM = dy. Quod ſi ED ſumta fuiſſet in diſtantia finita ab M, interpoſitas infinitas numero quantitates differentiales jugiter minores fieri ED = dy monſtrari poſſet. Quare NM = dy in puncto flexus eſt infinitis partibus minor ED = dy, & aliis omnibus dy, quæ in finito ab M intervallo ſumuntur. Ergo etiam illius differentiale ML = d^2y erit infinite parvum, & ideo = o ratione habita CD = d^2y, & differentialium aliarum dy, quæ, ut dixi, finitam ab M diſtantiam habent. Viceverſa ab M verſus Q differentiales primi gradus quantitates NM, yO, xP, SQ = dy jugiter augentur, quia NM = yz, qua yO = dy eſt major, item yO = xt, qua xP = dy pariter eſt major, & ita porro. Ex quibus liquet in puncto flexus M, cum curva primum eſt concava ad axem,

axem, & deinde convexa, $LM = d^2 y$ fieri infinite parvam, & ideo $= o$, ſi cum aliis $d^2 y$, & ideo ſi cum $d x^2$ compararetur: e contrario ſi primum eſt convexa uſque in M (*Fig.* 27.) & inde concava, $M t = d^2 y$ eſſe infinite magnam reſpectu G *n* & aliarum $d^2 y$, quæ in finita diſtantia ab M verſus T ſumuntur. Quod eadem ratione confici poterit.

10. Probe notanda ſunt duo paulo ante memorata Problemata, & eorum converſa, ideſt ſi una quantitas indeſinenter augeatur, & tandem infinita fiat, in puncto, in quo infinita eſt, ab alio ad alium ſtatum contrarium tranſit, ideſt ex poſitiva negans fit & ex negante poſitiva. Idem accidit, ſi ſemper minuatur, & tandem infinite parva evadat. Nam inde quamplurima maximi momenti inferemus in legibus motuum definiendis, in quibus aut nihil adhuc certi ſtatui potuit, aut ſi quid ſtatutum fuit, etiam a doctiſſimis Viris erratum eſt; illudque præſertim ubi vis attractrix uſque ad aliquod punctum ita augetur, ut in eodem infinita fiat, ex attrahente in repellentem converti, idemque uſuvenire, ubi ita minuitur, ut infinite parva evadat; cujus fœcundiſſimi principii uſum primum videbimus hoc priore tomo in definiendis motuum legibus in colliſione corporum perfecte durorum, deinde multo magis in ſecundo, cum diſſeremus de viribus centralibus, quæ in hujus principii cognitionem me prima vice deduxerunt.

ARTICULUS VII.

An probari poſſit repugnare quantitates infinite magnas, aut parvas.

HUjus capitis initio jam docui nullis certis rationibus effici quantitates infinities parvas exſtare aut deſignari poſſe. Nunc quod multis locis polliciti ſumus, probandum reſtat nec ullis certis argumentis teneri quantitates infinite aut magnas aut parvas repugnare. Id quod hic aggredior.

§. 85. Definitio

Nomine rei infinitæ intelligo rem, quæ tot in ſe complectitur poſitiva & abſoluta, ut in eorum enumeratione ad ultimum perveniri repugnet. Ita extenſio cujuslibet corporis quantum ad par-

partium deſignationem infinita dicitur, eo quod in ea tot partes partium inveniri poſſunt, ut ad ultimam, qua minor deſignari nequeat, perveniri non poſſit. Hoc autem infinitum duplex diſtinguitur aliud actu, quod *categorematicum* vocant, & aliud potentia, quod *Sincategorematicum*. Illud infinita attributa ſimul & eodem tempore complectitur, ut foret infinitum corpus, quod eodem tempore infinitos palmos haberet; hoc vero ſolum alia poſt alia.

§. 86. Definitio

E contrario nomine finiti intelligo rem, quæ tot poſitiva & abſoluta prædicata complectitur, ut in eorum enumeratione ad ultimum perveniri queat.

§. 87. Scholion

Antequam hac in re procedam, eorum, quæ definitio infiniti complectitur, ratio reddenda eſt. Primum infinita attributa, quæ in infinito ſunt, debent eſſe poſitiva: ſiquidem negativa, tametſi infinita forent, non efficerent rem infinitam. Nam ſi forent res infinitæ numero, quarum ſingulæ ſpecie differrent, de qualibet ex iis aliæ omnes infinitæ negari poſſent, quin tamen illa per ſe infinita foret. Cujus ratio petitur ex natura negationis, quæ proprie eſt in mente res inter ipſas diſſimiles comparante eaſque non convenire cognoſcente. Deinde neceſſe eſt ut ſint abſoluta non autem relativa, propterea quod ſi forent, ex. cauſſa, infiniti homines, idem finitus homo per eadem finita attributa infinitis rebus ſimilis foret, & nihilominus finitus maneret. Ad ſummum autem infinitæ ſimilitudinis relationes rem infinitam evincerent, quando inter illam rem, aliaſque infinitas non ſolum infinitæ numero, ſed etiam ſpecie diverſæ ſimilitudines intercederent. Nam inde confici poſſet infinita prædicata ſpecie diverſa in eadem ineſſe, quæ infinitarum ſimilitudinum fundamentum forent. Tertio quæri poteſt, qua ratione mens noſtra, quæ finita eſt, infinitum intelligere & explicare queat? Cui quæſtioni ſic ſatisfacio. Cum infinitum ſit res maxime poſitiva, utpote cui nihil deeſt eorum, quæ ineſſe poſſunt, illud intelligere & explicare poſitive quantum in ſe eſt, & illius omnia attributa mente complecti diſtincteque cognoſcere nequaquam poſſumus. Nihil tamen prohibet, quominus in cognitionem ejus negativam veniamus; quod tamen eo recidit, ut poſitive, licet confuſe percipiamus. Nobis enim conceditur

tur percipere infinitum tamquam illud, in cujus attributorum enumeratione ad ultimum perveniri non poteſt, quod eſt infinitum percipere per negationem finiti & finium. Quia vero ex altera parte fines rei aliud nihil adjiciunt niſi negans, & ex altera negatio negationis inter res poſitivas numeranda eſt, hujuſcemodi cognitio ad ſpeciem quidem negans, re tamen vera poſitiva judicari debet, tametſi confuſa, propterea quod hoc pacto omnia infiniti attributa diſtincta cognitione nequaquam complectimur.

§. 88. Propoſitio

Ita explicata definitione infiniti inquirendum eſt, utrum aliqua quantitas infinita exſiſtere poſſit. Nam etſi ab ætate Divi Thomæ ad hæc uſque tempora multi ex Ariſtotelæis in oſtendendo actu infinitam quantitatem repugnare, ingenii vires contenderunt, tamen ignoratione calculi Infinitorum factum eſt, ut nedum Recentioribus, verum nec Peripateticis aliis ſuam operam probare potuerint. Nec immerito. Quod ut doceam, ajo nullis certis rationibus confici infinitam quantitatem ſive continuam, ſive diſcretam cum ratione pugnare. Nam quod attinet ad quantitates extenſas, una ex præcipuis rationibus hæc eſt. Sit (inquiunt) ſi fieri poteſt, infinita recta AB (*Fig.* 30.) terminis A & B definita, & ad perpendiculum ſuper AB ad punctum A erigatur perpendicularis AD unius palmi, compleaturque rectangulum ADCB. Quo facto duci poterit diagonalis BD, quæ ſimul cum AB rectam AD finitam & unius palmi ex hypotheſi comprehendet, & infinitam, ut oſtenditur ex eo, quod puncta A & D rectarum BA, BD cum infinito intervallo abſint ab anguli vertice B, in infinitum divaricantur, ideoque rectam infinitam AD complectantur neceſſe eſt: quæ duo pugnant inter ſe. Sed hoc argumentum, quod multi Peripatetici efficaciſſimum putant, præſertim cum alii ex diſcipulis Ariſtotelis veris calculi Infinitorum principiis expertes portentoſas quaſdam ſolutiones, ut videre licet apud Maſtrium in Met. Diſp. X. Quæſt. IV. num. 63. attulerint, plumbeum eſſe pugionem exiſtimandum eſt. Si enim baſis AD finita duobus lateribus ad infinitam diſtantiam concurrentibus comprehenditur, id argumento eſt angulum ABD eſſe infinite parvum; ex quo non ſequitur id, quod ſe conficere putant Peripatetici quidam, baſim AD infinitam eſſe oportere, contra

quam

quam poſita fuit. Nam ſi ad finitum a vertice B intervallum ducatur HM parallela baſi AD, hæc HM erit infinite parva primi gradus, proptereaquod angulus B infinite parvus eſt, & latera BH, BM finita. Jam vero finita BH ita ſe habet ad infinite parvam primi gradus HM, ut infinita primi gradus BA ad quartam proportionalem AD. Ergo ut ſit proportio, quæ in triangulis ſimilibus BHM, BAD ſervanda eſt, AD ſit finita neceſſe eſt. Quamobrem nihil hac ratione & aliis ſimilibus, quas Ariſtotelis Aſſeclæ adhibuerunt, cogi & effici poteſt adverſus eos, qui quantitates infinitas conſtare poſſe volunt, niſi prius quantitates infinite parvas eſſe non poſſe oſtendatur.

2. Quoniam vero alio loco monſtravimus nulla certa ratione confici quantitates infinite parvas deſignari poſſe, tentemus hic an aliquid afferri queat, unde illarum poſſibilitas labefactetur. Sit ergo finita recta BA (*Fig.* 31.), & ſi fieri poſſit, abſcindatur CA infinite parva primi gradus. Secta BA in duas partes æquales in D, centro D intervallo DA deſcribatur circulus BNA, & ad punctum C perpendicularis & ſemiordinata CN ducatur. Hoc poſito erit CN infinite parva, ut conſtat, & quidem minoris gradus, quam CA; nam ob circuli proprietatem ita eſt BC ad CN, uti CN ad CA. Cum vero BC ſit infinita reſpectu CN, erit etiam CN infinita reſpectu CA. Sed cujus gradus CN infinite parva eſſe poterit, cum CA poſita ſit infinite parva primi? Ego certe non video, qui CN infinitis partibus ſuperare poſſit CA infinite parvam primi ratione habita CB finitæ, niſi pariter CN finitis terminis concludatur. Quod eſſe non poteſt. Nam ſi CN ſit finita, quomodo eſſe poterit media proportionalis inter CB finitam, & CA infinite parvam primi gradus, cum a prima finitis partibus ſuperetur, poſteriorem vero ſuperet infinitis? Illud, quia inter CB finitam & inter CA minimam primi gradus alia nulla quantitas media proportionalis intercipi poteſt, quæ a finita CB infinitis partibus ſuperetur, & infinite parvam primi gradus CA infinitis excedat; hoc vero, quia contraquam poſtulat natura circuli, tres rectæ BC, CN, CA in continua geometrica proportione nequaquam progrederentur. Concludendum eſt igitur non poſſe ſuper recta BA deſignari partem, ſive quantitatem infinite parvam primi gradus. Jam vero ponatur CA infinite

par-

Digitized by Google

parva ſecundi, eritque C N infinite parva primi. Quamobrem e recta B A abſcindatur A H = C N, & perpendicularis H G erigatur. In rectam H G omnia illa valebunt, quæ adverſus C N, quando C A minima primi gradus poſita fuit, concluſimus. Quare nec infinite parva ſecundi gradus delineari poterit. Quod idem argumentandi genus transferri poteſt etiam adverſus infinite parvas C A 3^{i}, 4^{i}, 5^{i}, 6^{i}, 7^{i}, & alius cujuſcumque definiti gradus, niſi quod tertius, 5, 7 &c. gradus etiam alia ratione refelluntur; nam inter finitam quantitatem, & infinite parvam 3^{i} gradus nulla media proportionalis interponi poteſt, propterea quod ex duplici genere quantitatum, quæ omnino interjiciuntur, nulla fungi poteſt munere mediæ proportionalis finitam inter, & infinite parvam 3^{i} gradus, quod alterum genus minimarum in primo ſolum infinitis vicibus finita contineatur, & infinities infinitis minimam 3^{i} gradus contineat, alterum autem minimarum in ſecundo infinities infinitis partibus a finita deficiat, & ſolum ſemel infinitis minimam tertii gradus excedat. Quorum neutrum conciliari poteſt cum natura mediæ proportionalis, quæ deſiderat, ut quot partibus a prima ſuperatur totidem tertiam excedat. Hæc autem ratio convenit etiam in minimas 5^{i}, 7^{i}, 9^{i} gradus, & ita uſque in infinitum. Conſtat igitur nec 1^{i}, nec 2^{i}, nec 3^{i}, nec alterius cujuſcumque definiti gradus infinite parvam deſignari poſſe. Unde conſequens eſſe videtur nullam omnino infinite parvam quantitatem exſiſtere poſſe, quia nullum habet ſtatum & gradum, in quo conſiſtere queat.

3. Verum hæc quidem evincunt nullam definiti gradus minimam eſſe poſſibilem, non tamen plane evertunt poſſibilitatem minimæ A C, quæ infinitis gradibus diſtet a finita. Ex hac enim minima non conſequuntur illa pugnantia, quæ ex minima definiti gradus concludi monſtravi. Quod enim certum Principium obſtat, quominus deſignari poſſit alia minima C N, quæ tametſi nullo definito infinitæ parvitatis gradu abſit a finita C B, tamen media proportionalis inter B C, & C A intercedat, propterea quod totidem infinitis gradibus deficiat a C B, quot excedit C A?

4. Dices dari quantitatem infinitis gradibus finita minorem, & ſimul infinitis gradibus alia infinite parva majorem id ab omni ratione diſſentaneum eſt; nam ſi eſt infinitis gradibus finita minor, in omni omnino infinitæ parvitatis genere infinite parva eſt; ſi vero infinitis gradibus aliam infinite parvam excedit, non in omni penitus genere minima eſt.

5. Antequam reſpondeam, per tranſennam adverto ex his intelligi, cum Mathematici alias quantitates infinite parvas 1ⁱ gradus, alias infinite parvas 2ⁱ ponunt, omnes eſſe infinitis gradibus finita quacumque minores, & alteram ſolum reſpectu alterius eſſe infinite parvam, ideſt infinitis aliis gradibus adhuc minorem. At enim, ſi hæc ita ſe habent, qui dignoſci poteſt utrum data quantitas minima ſit parvum elementum finitæ, an infinite parvæ 1ⁱ, an infinite parvæ 2ⁱ &c. utrum ſcilicet ex aggregato cujuſdam quantitatis infinite parvæ & aliarum infinitarum ſimilium quantitas finita, an infinite parva 1ⁱ gradus, an infinite parva 2ⁱ &c. exſiſtat? Cum in ideis valde obſcuris calculi differentialis & ſummatorii adhuc verſabar, ad illud internoſcendum ſufficere putabam compertum habere primam quantitatem eſſe habita ratione alterius infinite parvam, ut inde concluderem primam eſſe elementum cujuſdam quantitatis, quæ foret infinite parva reſpectu illius, cujus elementum altera exſiſteret. Sed quantum id a veritate abhorreret, exempla me docuerunt, quibus tenebras paulatim disjeci. Nam, ex. gr. (*Fig.* 31.) tum quantitas DNA eſt infinite parva ratione habita circuli, qui eſt quantitas finita, tum quantitas CNA eſt infinite parva ratione habita DNA; propterea quod hæc lineis infinite parvis undequaque concluditur, illa vero lineis partim finitis, partim infinite parvis. Nihilotamen minus utraque pro elemento æqualis quantitatis finitæ habenda eſt. Siquidem tum CNA, tum DNA eſt elementum ejuſdem ſemicirculi BGA. & quemadmodum infinita elementa DNA, DGN &c. componunt ſemicirculum, ita infinitis CNA, CNGH, quæ primis reſpondent, idem exſiſtit. Hinc etiam eſt, quod ut monuimus §. 82. num. 2. elementa duo ſpatii ejuſdem cyſſoidalis diverſa ſunt, & infinite inæqualia. Cujus ratio eſt, quia cum analyſis in quantitatibus variabilibus verſetur, ideſt eas quatenus creſcunt, aut minuuntur, conſideret, ut inde geneſim earumdem perſpiciat, & magnitudinem eliciat; in elementis non quantitas præciſe attendenda eſt, ſed modus, quo creſcit. Hoc enim fieri poteſt, ut ex elementis etiam infinite inæqualibus quantitas æqualis generetur, ſi modo quod infinite minus eſt, etiam infinite magis creſcat. Ex quibus comperi ad illud obtinendum, ut quantitas quædam infinite parva ſit elementum alterius infinite parvæ, opus eſſe ut non ſolum ſit habita illius ratione minima, verum etiam ut tamquam illius pars habeatur; quo ſcilicet omnium

ele-

Digitized by Google

elementorum ſumma ſolum hanc alteram quantitatem exæquet: ut DSA (*Fig.* 31.) reſpectu DNA, SMA reſpectu NCA. Hac vero nota dignoſcere poterimus quandonam aliquod elementum quantitatem aut finitam aut infinite parvam producat. His autem confirmantur ea, quæ alibi diſſeruimus §. 82. in ſcholio de ratione magnitudinis ipſius elementi non habenda, cum quæritur, an illud quantitatem finitam generare poſſit; propterea quod eadem magnitudo nec definiri poſſit, qualem habeat proportionem ad finitam, nulluſque ſit definitus infinite parvus gradus, quo abſit a quantitate finita.

6. Quibus animadverſis venio ad id, quod Adverſarii premunt, & primum adverto me hic cauſſam non ſuſcepiſſe quantitatis aut infinite parvæ, aut infinite magnæ, perinde ac ſi inter res, quæ eſſe poſſunt, eas ponerem; id enim adverſaretur iis, quæ toto articulo 1 hujus capitis diſſerui. Id unum volo, quemadmodum nullis certis argumentis concludi poſſe eam eſſe poſſibilem citato loco contendi, ita neque ullis certis rationibus confici inter res impoſſibiles eamdem numerari oportere. Quo poſito pro certis rationibus poſſe haberi nego, quæ in alterutram partem ducuntur ex eo, quod in res intellectu explicatuque difficillimas incidimus. Quot enim etiam certa inficiari neceſſe foret, ſi res ad hanc normam exigeremus? Quis enim, ut aliqua ex multis delibem, clara notione comprehendit, quomodo aut partes in infinitum in qualibet vel exigua quantitate extenſa deſignari queant, aut duæ lineæ hyperbola & ejus aſymptotus ſemper in infinitum propius accedant, numquam vero concurrant? Nec deeſt ratio, qua rem ita eſſe debere doceatur. Nam cum mente finita verſemur in infinito, cujus habere non poſſimus niſi cognitionem valde confuſam, in multa neceſſe eſt incurrat oratio, quæ hominum captum excedant, quæque nihilominus eſſe poſſunt a veritate non aliena. Quamobrem in hiſce rebus ob id ipſum, quod aliquid intelligi explanarique non queat, repudiandum non eſt, niſi Atheis, Socinianis, aliiſque aut Divinitatis, aut Trinitatis Oſoribus magnam anſam præbere velimus e rerum univerſitate aut ſupremum Numen, aut tres Perſonas eliminandi, quod abſit. Reſtat igitur ut pro certa ratione ponendi aliquid inter impoſſibilia eam habeamus ſolummodo, qua ex data hypotheſi manifeſtam contradictionem concludimus.

7. His conſtitutis ego non video, cum quonam ex certis

Digitized by Google

principiis liquido pugnent duæ quantitates infinite parvæ, quarum altera ab altera infinito infinitorum graduum intervallo diſtet, & nihilominus utraque infinito infinitorum graduum intervallo a finita pariter abſit. Nam recta CN eſt infinite parva & minima in omni illo genere & gradu, qui ad finitam CB & ad ſimiliter finitas refertur, non ſi ipſa per ſe conſideretur, aut cum alia CA conferatur; quemadmodum axis minor in ellypſi eſt minimus in genere earum rectarum, quæ ductæ per centrum ab alio puncto peripheriæ ellypſis ad aliud oppoſitum perveniant, non autem ipſe per ſe, aut cum alia quacumque comparatus. Non igitur aperte repugnat dari poſſe aliam CA, quæ infinitis gradibus diſtet a CN, quamvis & ipſa CN infinitis diſtet a finita CB. Deinde cum dicitur *minima CN in omni genere & gradu infinitæ parvitatis diſtat a CB*, aſſentior id certum eſſe negative, quatenus cum inter finitum, & infinite parvum nulla proportio detur, nullus definitus infinitæ parvitatis gradus afferri poteſt, non autem poſitive, perinde ac ſi æquali infinitate tum CN tum CA abſint a finita CB. Non enim evidens eſt omne aut infinite parvum, aut infinite magnum unius modi eſſe debere. Immo contrarium potius ſuadetur ex eo, quod etſi quælibet finita extenſio aliquid infiniti habeat, eo quod partes in infinitum ſuper eadem deſignari poſſint, nihilotamen minus multis modis eſt, & alia aliam ſuperat.

8. Similiter ſatisfieri poteſt difficultatibus, quæ ex infinitis quantitatibus diverſorum graduum duci queunt. Nam cum, ex. gr. æquatio parabolæ ſit $ax=y^2$, poſita abſciſſa x infinita erit pariter ſemiordinata y infinita; ſiquidem ex dicta æquatione hæc ducitur analogia $a:y=y:x$, in qua nequit eſſe y finita, ſiquidem finita a ad finitam y eamdem rationem habere nequit, ac eadem finita y ad infinitam x. Jam vero x non poteſt eſſe neque infinita 1ⁱ gradus, ſcilicet talis, ut in genere infiniti quamminime diſtet a finita a. Siquidem y tunc non poſſet eſſe nullius gradus infinita, ut inter finitam a, & infinitam 1ⁱ gradus x cum proportione intercederet. Neque infinita 2ⁱ, quia tunc y foret infinita 1ⁱ, cui poſſet æqualis abſciſſa x abſcindi; unde idem abſurdum conſequeretur; neque 3ⁱ, neque 4ⁱ, neque &c. ullius in infinitum. Quare Adverſarii eamdem rationem concludere poſſunt, & nos eadem reſponſa dare. Sed præter ea, quæ hactenus dixi, hic aliud adverto infinitum 1ⁱ gradus, unde oritur difficultas, ita percipi, ut inter omnia infinita ſit illud, quod
mini-

Digitized by Google

minimo intervallo abſit a finito , adeo ut inter finitum , & infinitum 1ⁱ gradus nullum aliud medium proportionale, quod idcirco ſit finito infinite majus , & infinito 1ⁱ gradus ſit infinite minus, intercipi poſſe intelligatur. Sed infinitum ita perceptum omnino repugnat , ut oſtendimus. Quare cum ratione pugnant etiam infinita 2ⁱ, 3ⁱ, 4ⁱ, & alius cujuſcumque definiti gradus, quæ a primo pendent , illumque ut Principium , a quo ducuntur , neceſſario requirunt ; ſicuti repugnante unitate quilibet etiam numerus inter impoſſibilia ponendus , ut qui ab unitate ducit originem. Hinc tamen confici nequit infinitas quantitates abſolute repugnare. Nam etſi quantitatum infinitarum gradus a finito oriri non poſſunt, & a finito digredientes infinitum verſus procedere, tamen initium ducere queunt a quolibet infinito, & ab eo profecti vel finitum verſus progredi , vel in partem contrariam. Quo fit , ut poſita quantitate a finita & x infinita , nullus gradus infinitatis in x definiri poſſit, quo referatur ad a, eo quod definiti gradus in quantitatibus rationem infinitam habentibus repugnent ; at ſi vel media proportionalis y , vel tertia proportionalis z ponantur, tunc y infinite propius accedat ad a, quam x , & z infinite magis procul abſit ab a , quam x , & ita vel x ratione habita y, vel z ratione habita x infinitæ 2ⁱ gradus haberi poſſint. Quibus ſolvo eam difficultatem, cujus ſimilis facta eſt in quantitatibus infinite parvis, ſcilicet ſi infinitatis x nullus gradus definiri poſſit , x eſt infinita in omni genere & gradu poſſibili ; ergo nulla poteſt eſſe quantitas z , quæ ſit magis infinita quam x , eo quod x omnes infinitatis gradus exhauſit . Verum ita reſpondeo. Ex eo, quod infinitatis x nullus gradus definiri poſſit, quando cum a finita confertur, non ſequitur eam eſſe in omni poſſibili gradu infinitam : nam maximus gradus atque diſtantia ad eos, qui poſſunt eſſe, non ad illos , qui repugnant , referuntur. Sicuti triangulum ex numero figurarum , quæ rectis lineis conſtant , dicitur maxime ſimplex , tametſi bilineum ſimplicius ſit , propterea quod cum bilineum repugnet , quia duæ rectæ ſpatium concludere nequeunt, ideoque ſit nihil, rei ad nihil nulla eſt proportio, trianguli que ſimplicitatis gradus cum relatione ad eos, qui in figuris poſſibiles ſunt, ſtatui debet. Jam vero primus gradus infinitatis , ita ut ſupra explicatus eſt , repugnat , ideoque nullus gradus eſt , eoque repugnante omnes alii definiti numeri contradictoria complectuntur. Quamobrem quantitas x , quæ in nullo horum graduum repugnantium infinita

nita eſt, nequaquam haberi poteſt pro infinita in omni genere & gradu poſſibili. Quare nihil obſtat & prohibet quominus aliæ magis vel minus infinitæ ducantur, quemadmodum Geometria docet. Quæ eadem dicta intellige, quod attinet ad quantitates infinite parvas.

9. Ex his vero etiam ſequitur non liquido repugnare ſtatui poſſe inter a, & x duas, tres, quatuor, & ita in infinitum medias proportionales, quæ infinite propius accedant ad a, numquam tamen perveniant ad eam, quæ reſpectu a ſit vel infinita 1ⁱ gradus, vel infinita cujuſcumque alterius finito numero a primo diſtantis. Quemadmodum nec contradictorium oſtenditur datis quantitate a finita & x infinita poſſe conſtitui tertiam, quartam, quintam proportionalem, & ita in infinitum in continua geometrica proportione, ſi modo ut fit in ſeriebus, quæ ex finitis quantitatibus conſtant, x ducatur in ſeipſam, & inde per a dividatur, tum $\frac{x^2}{a}$ iterum ducatur in ſe ipſam, & per x dividatur, deinde &c. Et ut omnia in ſummam redigam, a ratione diſſentaneum non conficitur quæ circa quantitates finitas in Analyſi finitorum a Geometris præſtantur, eadem omnia circa infinitas ab iiſdem præſtari poſſe, uti faciunt in Analyſi Infinitorum.

10. Quæ cum ita ſe habeant, per ſe cadunt alia Peripateticorum objecta, quæ illo nituntur incerto principio, nullum infinitum alio majus poſſe conſtare. Nam ſi columnæ in longitudinem infinite extenſæ partes omnes Deus in modum ſphæræ conglobet, quæ partes antea ſolum ultro citroque in infinitum ſe porrigebant, illæ ſpatium undequaque infinitum occupabunt. Sed ſphæræ diameter, licet infinita, erit multo minor longitudine infinitæ columnæ; quo planum fit non ſequi, quod conantur inferre, partem eſſe toti æqualem. Pariter ſi ab hoc puncto orientem verſus infiniti palmi ſint, & alternos Deus tollat, & reſiduis mutuo accedentibus occaſum verſus in directum cum aliis collocet, exſiſtet linea utrimque infinita, cum antea ſolum verſus orientem in infinitum protenderetur; ſed hæc erit æqualis priori, quod hac tranſpoſitione palmorum occaſum verſus infinita prior extenſio ortum verſus media parte mulctata eſt.

11. Hic valde non moror rationes, quibus Peripatetici cogere & efficere contendunt non poſſe haberi Infinitum alio majus.

jus. Nam longiſſime abſunt ab ea certitudine, quæ aſſenſum extorqueat. Primum Maſtrius ita argumentatur; Deus eſt Ens Infinitum, & idcirco nihil illo majus; ergo ſimiliter ſi foret infinita extenſio, nulla major haberi poſſet. At quid hoc argumentandi genere debilius? Non enim ex eo præciſe quod Deus ſit infinitus, ſequitur nihil majus illo haberi poſſe, ſed ex eo quod ſit in omni genere Infinitus. Conficiat igitur, ex. gr. ſemiordinatam y in infinita parabola eſſe in omni poſſibili genere infinitam, & inde nullam rectam illa majorem poſſe dari me conſentiente concludat. Deinde ad has ſe convertit verborum tricas. Quod eſt imperfectum, non eſt infinitum. Quod vero exceditur, eſt imperfectum, quia exceſſus notat defectum in eo, quod exceditur. Ergo infinitum alio minus infinitum non foret, ut ponitur. Ad hæc dico, quod eſt imperfectum, non eſſe infinitum in omni poſſibili genere, non autem non eſſe ullo modo infinitum, & quod exceditur a finito, finitum eſſe, quod vero exceditur ab infinito, poſſe eſſe infinitum, ſi vel exceſſus in quantitate finita ſit, vel ab infinito infinite majori infinitus exceſſus proficiſcatur. Tum vim facit in definitione grammaticali Infiniti. Infinitum eſt, quod non habet finem. At ſi extenſio infinita minor alia foret, terminos haberet, ultra quos alia major excurreret. Quibus ſatisfacio primum explicando quo ſenſu intelligi oportet in infinito numquam ad ultimum & ad finem perveniri poſſe. Nam id verum eſt, ſi modo finito verſus infiniti fines contendas; non autem, ſi infinito. Nam ſi vi & celeritate infinita corpus ab hoc puncto occaſum verſus ferretur, certe ſpatium infinitum tempore unius horæ emetiretur. Ita quamvis in qualibet extenſione partes in infinitum deſignari queant, tamen motu percurri poteſt, qui pariter in infinitum, uti & tempus dividi poteſt. Quo poſito ſi vis cum Maſtrio, infinitum non habere fines, ad quos modo finito perveniatur, tibi valde aſſentior. Si vero infiniti fines penitus improbas, tuum eſt eorum abſurditatem oſtendere. Mihi enim certum & exploratum non eſt fines extimos & veluti extrinſecos cum intercepta partium infinitudine pugnare. Immo ſi Deus ab æterno duo corpora creaſſet, quorum utrumque eamdem plagam verſus pariter ab æterno motum fuiſſet, ſed alterum altero ſemper duplo citius, quod adhuc incertum eſt, utrum fieri poſſit nec ne, ego clare percipio ſpatium vere & intrinſecus infinitum inter corpus tardius, & inter corpus citius latum nunc intercedere, tametſi extrinſecus

habeat corpora, quibus utrimque tamquam limitibus definiatur.

12. Ergo liquet non ſatis oſtendi extenſionem infinite magnam cum ratione pugnare. Quare videamus an magis adſtringantur rationes, quibus numeri infiniti poſſibilitatem conantur evertere. Quilibet numerus infinitus, inquiunt, ſemel infinitus eſſe non poſſet; nam neceſſe foret, ut infinitas unitates, infinitos binarios, infinitos ternarios, & ita in infinitum infinitos alios quoſcumque numeros haberet. Si enim decades, ex. gr. finitæ forent, etiam unitates totuſque numerus finitis limitibus coercerentur. Quare quilibet infinities infinitus in omni genere ſit oportet. Quod ſi ita eſt, alius alio major, aut minor eſſe non poteſt. Jam vero ſi foret infinitus hominum numerus, numerus oculorum capillorumque eſſet infinitus, & quidem major hominum numero. Igitur numerus infinitus eſſe nequit. Hæc ratio non multum abeſt ab ea, quam adverſus extenſiones infinite aut parvas, aut magnas concluſimus. Quare ſimili modo etiam refutari poteſt. Scilicet ex eo, quod definitus gradus infinitatis afferri nequit, confici haud poteſt numerum eſſe poſſibilium omnium maximum. Speciatim vero dici poteſt habendam eſſe quoque rationem unitatum, ex quibus numerus coaleſcit. Nam unitates ſunt aut veræ & individuæ, ut ſubſtantiarum ſimplicium, aut impropriæ & diviſionis capaces, uti hominum. Unitates autem impropriæ ſunt veri numeri, qui tamquam unum ſumuntur, majores, aut minores. Quare ſi loco unitatum in primo numero ſit numerus minor, in ſecundo major, neceſſe quoque eſt, ut primus ad infinitatem elevatus a ſecundo pariter ad ſimilem gradum infinitum ſublato excedatur. Unde in allato exemplo numerus infinitus capillorum ſemper numerum infinitum oculorum ſuperabit; quod in numero oculorum loco unitatum ſunt binarii infiniti, in numero capillorum ſunt millenarii, ſi quilibet homo mille capillos habeat; in illo loco binariorum ſunt infiniti quaternarii, in hoc totidem infiniti bis millenarii, & ita in infinitum. Quod ſi factus numerus hominum infinitus ſumatur pro unitate, & multitudinis hominum infinitæ numerus infinitus ponatur, is erit non ſolum duplus, vel triplus vel &c. numeri 1ⁱ hominum infiniti; ſed ratione habita ejuſdem infinities infinitus. Et ſi hic ſecundus pro unitate ſumtus fiat infi-

infinitus, infinitum 3' gradus habebimus, hancque ſeriem in infinitum continuare poterimus. In quibus omnibus nihil cum ratione liquido pugnans contrariæ ſententiæ defenſores oſtendere poſſunt.

13. Niſi velint pro demonſtratione obtrudere, quod ſi forent infinita arenæ grana æqualia, & infiniti montes æquales, poſſent hæc minuta grana ſpatium infinitum, quod occupetur a montibus, replere. In quo eos ſua valde falleret opinio; propterea quod vel infiniti montes ponuntur æqualiter infiniti ac arenæ, ut nimirum ex altera parte ſint unitates infinite granorum, ex altera vero totidem unitates infinitæ montium; ex altera binarii infiniti granorum, ex altera vero binarii infiniti montium, & ſic in infinitum; vel inæqualiter infiniti; ſi primum, nego infinita grana poſſe infinitos montes æquare, quod, ut ex Geometria patet, cum omnes partes, ſive unitates, binarii, ternarii utrimque in eadem ſemper in infinitum ratione ſint, ſumma infinitorum montium ita ſe habet ad ſummam infinitorum granorum, uti unus mons ad unum granum. Sin vero alterum, aſſentior quidem ex infinitis granis infinitos montes poſſe componi; quia ſi ad unum ex montibus conſtruendum neceſſaria ſint grana 1000000000. hic granorum numerus infinities in infinito numero granorum invenitur (num. 12.); ſed hic numerus infinitus montium, ſive 1000000000. granorum erit multo minor numero infinito granorum. Nam in quolibet infinito numero ſunt quidem tam unitates, quam binarii, quam ternarii, quam &c. infiniti, ſed numerus binariorum eſt duplo minor numero unitatum, numerus ternariorum eſt triplo minor numero unitatum. Quod in alios omnes numeros in infinito incluſos cadit.

§. 89. Animadverſio

Ergo ſatis conſtat nullis certis rationibus confici aut extenſiones, aut numeros infinitos repugnare. Quod ſi eaſdem quantitates infinitas aut infinite parvas etiam eſſe poſſibiles monſtrare poſſemus, id duas in partes valeret. Nam primo methodos demonſtrandi in Analyſi Infinitorum a Recentioribus uſurpatas, quas aliqui toleranter veras appellant, in tuto collocaremus facilius, quam in ſuperioribus fecimus. Tunc enim in eaſdem nihil induceretur ſub conditione verum, quamdiu aut infinite parva, aut infinite magna apparerent,

rent, quod poſtea iiſdem evaneſcentibus, ut ibi docuimus, abſolute verum evaderet. Sed omnia abſolute vera forent, & quælibet demonſtratio ab abſolute veris profecta ad abſolute vera progrederetur. Deinde attributorum Dei notionem majorem atque Divina Majeſtate digniorem harum quantitatum adminiculo acquireremus. Nam qui quantitates infinitas cum ratione pugnare arbitrantur, ii eatenus infinita putant aut intellectum Divinum in cognoſcendo, aut ejus omnipotentiam in creando, quatenus etſi infinitum actu extra Deum non attingant, tamen aut ad illud tantum ab æterno acceſſerunt, quantum accedere poſſibile eſt, quod in intellectum cadit, aut, quod in aliud convenit, ſemper magis accedere poſſunt. At qui eaſdem quantitates in numero ponunt eorum, quæ eſſe queunt, non ſolum infinitas res & cognoſci & fieri poſſe monſtrant, verum nec hiſce infinitis limitibus attributa Supremi Numinis coercentes alias & alias res in infinitum magis infinitas in Deum cadere poſſe ex poſſibilitate quantitatis infinitæ bene concludunt §. ſuperiori. Quod quantum Naturæ Divinæ Infinitatem extollat, nemo eſt, qui non videat.

2. Quamvis autem hæc ita ſe habeant, nihilominus a defendenda quantitatis infinitæ poſſibilitate ſuperſedebo, quod rationes ab aliis in hanc ſententiam allatæ tales mihi non eſſe videntur, ut cogere debeant ad aſſenſum præbendum. Nam ratio petita ab infinitis circulis finitæ columnæ, quæ adeo torſit Peripateticorum ingenia, quæque eos in commentitias atque prodigioſas ſomniiſque ſimillimas opinationes præcipites egit, facile infirmatur hiſce duobus, altero quod, ut ſupra docuimus, non omnes in extenſo partes ſunt in infinitum reipſa diſtinctæ, altero quod adhuc certum non eſt, utrum Deus poſſit ad infinitas actu partes in diviſione pervenire. Primo enim conſtat ante diviſionem infinitam circulorum in longum extenſionem haud eſſe, ſecundo nec fieri poſſe per diviſionem.

§. 90. Corollarium

Quamobrem ſatius eſſe arbitror ad alia gradum facere, poſtquam aliud notavero, quod ex dictis conſequitur; ſcilicet nullis certis rationibus poſſe doceri infinitam qualitatem cum ratione pugnare. Ex eo enim quod corpus præſertim infinitum infinitam habeat vim, nihil magis abſurdi conſequitur, quam

quam ex hypotheſi corporis infiniti, quam repugnare non probant. Dicent fortaſſe, ſi corpus finitum infinita vi nunc cieatur, celeritate infinita latum erit, & horæ quadrante ſpatium infinitum percurret. Hoc autem omnino diſſentaneum eſt a recta ratione. Siquidem intelligi nequit, qui & quando a ſpatio finito ad infinitum tranſeat, cum infinitum inter utrumque intervallum ſit. Verum explicent mihi ſi poſſunt, quomodo & quo tempore corpus primum quietum & inde vi aliqua percitum a nihilo ſpatii ad ſpatium finitum conficiendum tranſeat, cum non minus infinita diſtantia ſpatium inter & nihil intercipiatur. Quod ſi tanto nodo ſolvendo non ſunt, quæſo ceſſent in hiſce rebus urgere, quæ in difficultates explicandi modi, quo res ſe habeant, verſantur, illudque intelligant quædam, uti eſt motus corporum, experientia certiſſima iis circa modum, quo exſiſtunt, difficultatibus premi, ex quibus humana mens ſe expedire vix poteſt: inde enim fiet ut non ita temere credant infinitam celeritatem eſſe non poſſe ob id unum, quod intelligi nequit, quomodo corpus a finito ſpatio ad infinitum ſe conferat. Quod ſi rectam reſpondendi rationem velint, aliud convenientius dici non poſſe comperient, quam quemadmodum corpus celeritate finita latum a nihilo ſpatii ad finitum ſpatium niſi per omnia interpoſita infinite parva gradum non facit, ita ob eamdem rationem, quia minimis tempuſculis ſpatia finita velocitate infinita abſolvuntur, corpus infinite velox a nihilo ſpatii ad infinitum per omnia finita intervalla tranſgreditur. Quamvis autem articulo I. hujus capitis §. 68. illud nobis ſatis viſum non fuerit ad certo conficiendum dari extenſa infinite parva, nihilo tamen minus hujuſmodi eſt, ut in hoc tam abſtruſo negotio nihil eo commodius excogitari queat.

2. His ſcriptis meas ad manus pervenerunt commentarii Acad. Reg. Berolin. ex quibus hæc juvat excerpere contra poſſibilitatem infiniti, tametſi ex parte jam refutata ſint. D. Achard Tom. I. in Diſſertatione quæ inſcribitur *Reflexion ſur l' Infini Mathematique* contra Fontenellum diſputans circa ſeriem naturalium numerorum 0, 1, 2, 3, 4 &c. qui a zero incipiunt, & unitate differunt, terminum infinitum dari non poſſe contendit his verbis e gallico in latinum translatis „ Nihilotamen minus verum eſt terminum, qui proxime antegreditur ultimum, qui ponitur eſſe infinitus, nec eſſe debere infi-

Infinitum, nec poſſe. Unde igitur fit eum, qui ſequitur, talem eſſe? quibus præſtigiis a finito ad infinitum tranſivit, cum reipſa inter eoſdem non interſit niſi unitatis diſcrimen? „ Deinde monet citatum auctorem non potuiſſe ſe ab hac difficultate extricare.

3. Tum paulo poſt conatur efficere infinito non convenire cum illo celebri axiomate *totum eſt majus ſua parte* his verbis „ Inter magnitudinem finitam & infinitam non eſt major ratio, quam inter nihilum & eſſe, ideſt nulla. Jam vero qui fieri poterit ut intelligam partes totius, ex. gr. pedis cubici materiæ eſſe huic toti æquales in hypotheſi numeri partium reipſa infiniti? Ad hunc finem neceſſe erit concedere, aut numerum partium non eſſe infinitum, aut id, quod finitum eſt, eſſe magnitudinem ſive quantitatem, ſi cum infinito comparetur, ob rationem æqualitatis, quæ inter utrumque intercedat. „

4. Hactenus Achard, cujus prima ratio tam valide aſtringitur, ut infinitum ea prorſus everti putarem, niſi inde conſequeretur, ut modo adverti, eſſe repudiandum etiam, quod conſtanti plurium ſenſuum teſtimonio comprobatur. Si enim ob ea, quæ allata ſunt, fieri non poteſt, ut tranſitus quantitatis a finito ad infinitum habeatur, ob eaſdem cauſſas fieri nequibit, ut a nihilo ſpatii, quale eſt initio motus, ad ſpatium finitum, cujuſmodi eſt in fine cujuſcumque finitæ partis motus, corpus perveniat. Nam inter nihilum ſpatii & ſpatium finitum non eſt minus infinitum diſcrimen, quam inter ſpatium & quantitatem finita, interque infinita. Ergo ſi in hac argumentandi ratione nihil eſt vitii, conſequitur motum corporum inter ea, quæ repugnant, eſſe collocandum. Quare ſi Achardus cum omnibus ſanæ mentis Philoſophis motum admittit, & ad rationes ſubtiliter concluſas cum illo antiquo Philoſopho deambulando reſpondet, ſibi concoquat opus eſt argumentum a ſe propoſitum contra poſſibilitatem quantitatis infinitæ, & nodum adſtrictum a ſemetipſo diſſolvat. Illud ſaltem fateatur oportet aliquid non bene concluſum in eo latere; quod eo veriſimilius fit, quod ad percipiendum tranſitum a nihilo ad finitum, aut a finito ad infinitum neceſſe eſt illam habeamus, quam in nobis eſſe non poſſe jam obſervatum eſt, poſitivam infiniti notionem, proptereaquod ad hunc proximum tranſitum a finito ad infinitum mens pervenire non poteſt, niſi infinitis rebus percurſis & vera & propria notione comprehenſis. Quamquam nec prorſus ignoramus modum, quo natura tranſitum facit a finito ad infinitum, proptereaquod

hunc

hunc fieri per converſionem quantitatis ex poſitiva & unius ſpeciei in negantem & alterius ſpeciei §. 84. num. 10. paucis docuimus, & tom. 2. pluribus & accuratius oſtendemus. Quibus omnibus ſatis compertum ſit productam ab Achardo contradictionem adeo claram & evidentem non eſſe, ut quemlibet perſuadere & cogere debeat. Sed ut aliquid non ſolum oblique & univerſim, verum etiam directe & ſpeciatim reſpondeam, nego in dicta ſerie fieri poſſe, ut terminum infinitum proxime antegrediatur terminus, qui ſimul finitus ſit, & a conſequenti ſolum differat unitate, quia quantitas, cujus ab infinita diſcrimen eſt unitas, pariter infinita eſt, & ajo duobus modis intelligi poſſe, quod ſeries infinita aut ſpatium infinitum percurrantur, nimirum vel modo & progreſſione finitis, vel modo & progreſſione infinitis; ſi primum ut velocitate finita, tunc neceſſe quidem foret ut proximus a quantitate finita ad infinitam gradus fieret, ſed eſſet opus tempore infinito, quod idem foret atque ad hujuſmodi tranſitum numquam poſſe perveniri. Sin vero alterum, ille gradus neceſſarius non eſt, quia corpus velocitate percitum infinita, ſpatium infinitum qualibet minima, dummodo finita, temporis finiti particula tranſit. Quemadmodum corpus pulſum vi abſoluta, quæ ſit in ratione ſpatii percurſi, abſolvere non poteſt ſpatium finitum niſi tempore infinito, propterea quod ea vi, quæ tum ex capite elementi, tum ex capite fluxus, §. 82. in ſcholio, infinite parva eſt, deberet ante percurrere infinite exiguas ſpatii particulas, & ita proximum ab infinite parva ad finitam facere gradum, quod repugnat. At ſi pellatur alia vi, ex. gr. illa, quæ rationem ſpatii ſubduplicatam ſequatur, tempore finito ſpatium finitum metiri poteſt, quin eam in contradictionem incurrat, dum a nihilo ſive ab infinite exiguo ſpatio ad finitum tranſmittit, propterea quod nulla finiti temporis pars deſignari poteſt, in qua finitum ſpatium nequaquam abſolverit. Quibus etiam magis refellitur ſecunda ratio Corradi §. 83. num. 7.

5. Conſtat ergo nec his demonſtrari quantitatem infinite parvam, aut magnam cum ratione pugnare, tametſi id mihi veriſimilius eſſe videatur ob primam Achardi rationem. Nam quod attinet ad ſecundam, non tantum mihi eſſe momenti in ea videtur. Nam verum quidem eſt calculi infinitorum Auctores ſumere quantitatem finitam pro nulla, ſi cum infinita conferatur, aut infinite parvam ſimiliter pro nulla, ſi cum finita; ſed ſolum in eventu, quod hæ quantitates ipſæ per ſe conſide-

ſiderentur, non vero ſi conjungantur, & infinitus ipſarum numerus, qualis colligitur integratione, accipiatur. Tunc enim finitæ aut infinitæ fiunt operatione contraria illi, qua infinite parvæ aut finitæ factæ ſunt, quemadmodum §. 80. num. 1. explicavimus. Quo infirmatur ſecunda ratio ab Achardo propoſita.

ARTICULUS VIII.

De Quantitatibus Poſitivis & Negantibus, Realibus & Imaginariis.

§. 91. Propoſitio

SEd antequam huic de Quantitate loco finem imponam, & ad corporis naturam ejuſque proprietates propius accedam, operæ pretium exiſtimo paucis diſſerere de Quantitatibus poſitivis & negantibus, realibus & imaginariis, propterea quod id neceſſarium eſt tum ad facilius intelligendam illam quantitatis, dum infinite magna aut parva fit converſionem ex poſitiva in negantem, quam ad multa Phyſicæ capita non parum habere momenti §. 84. num. 10. monuimus, tum ad alia circa quantitates imaginarias, quæ non leve negotium faceſſunt. Ut itaque a poſitivis & negantibus ordiar, illud primum ſtatuo negationes proprie in rebus extra mentem non exſtare, ſed eſſe genuinum partum mentis, quæ cum extra ſe ipſam non offendat niſi ea, quæ ſunt, percipit unum ex iis non ineſſe aliis, quibus deinde ſuam non convenientiæ perceptionem tamquam aliquod negativum prædicatum affingit.

§. 92. Corollarium

Ex quo patet ens poſitivum & negans in eo convenire, quod utrumque eſt verum ens, & ſola percipiendi ratione differre, ſcilicet ens poſitivum intelligi notione abſoluta, negans autem percipi cum relatione non convenientiæ cum alio ente. Unde idea entis poſitivi neceſſario includit tantum unum ens, idea vero negativi duo, alterum quod percipitur non ineſſe, ſive alteri non convenire, & alterum, in quo primum non ineſſe intelligitur.

§. 93. Definitio

Ex his eliciuntur veræ quantitatum affirmantium atque negantium notiones. Nam utrumque quantitatum genus eſt vera quantitas, in quam proinde generalis finitio quantitatis, quam hujus

hujus libri initio tradidimus, vere cadit; eſt autem hoc unum diſcrimen, quod percipimus quantitatem poſitivam, cum illam abſolute intelligimus, negantem vero, cum relative noſcimus aliam quantitatem cum alia nequaquam congruere. Ita ſi fingamus Petrum ab hoc puncto Bergomum verſus moveri per 1000. paſſus, Paulum autem in contrariam plagam tantumdem ſpatii conficere; motus & ſpatium utriuſque ſunt veræ quantitates, ſed quia itineri Pauli cum itinere Petri non convenit; nam tantum abeſt ut Paulus Bergomum accedat, ut potius ab eo mille paſſuum intervallo diſcedat; idcirco iter Petri & ſpatium ab eo peragratum poſſum abſolute percipere & tamquam aliquam poſitivam quantitatem, iter autem Pauli & ſpatium ab eo confectum tamquam non convenientia cum itinere Petri & ideo tamquam aliquam quantitatem negantem.

§. 94. Corollarium

Hinc efficitur in quantitate negante duas includi, alteram, quæ percipitur non convenire, alteram, cui percipitur alia non convenire: ex quo etiam fit quantitates negantes ipſas per ſe nec eſſe nec intelligi poſſe, ſed oportere, ut ſemper jungantur cum aliis, quibuſcum non convenire intelliguntur, ad eaſdemque referantur.

§. 95. Definitio

Quantitas autem, quicum altera non conſentire percipitur, dici poteſt quantitas principalis, quam ſibi Geometra præcipue conſiderandam proponit, & ad quam aliam refert. Quantitas autem, quæ illi opponi intelligitur, minus principalis & ſecundaria appellari quit. Sed ne in re non neceſſaria novum inducamus vocabulum, primam cum aliis Mathematicis poſitivam vocabimus, tametſi hoc potius in quantitatem abſolute conſideratam quadret, ſecundam vero negantem.

§. 96. Corollarium

Cum autem in noſtra poteſtate poſitum ſit ex duobus non convenientibus tam conſiderare primum ut cum ſecundo non conveniens, quam ſecundum ut non conveniens cum primo, ex. gr. tam molle non conſentiens cum lapide, quam lapidem ut molli non conſentaneum; idcirco eſt etiam arbitrii noſtri ex duabus quantitatibus, quarum altera alteri contraria eſt, tam ſecundam contemplari ut non congruentem cum prima atque ideo primam ut quantitatem ajentem & ſecundam uti negantem §. 93. quam e contrario. Tam enim percipi poteſt iter Petri Bergomum verſus

Digitized by Google

ſus ut id, cui non convenit iter Pauli in contrariam plagam, & iter ejuſdem Pauli ut id, quod cum itinere Petri non congruit, quam iter Pauli, ut id, cui iter Petri conſentaneum non eſt, & iter Petri ut id, quod cum itinere Pauli nequaquam conſentit.

§. 97. Propoſitio

Ex his, quæ de quantitatum affirmantium atque negantium natura docuimus, liquet quantitates hujuſmodi non eſſe uti duo contradictoria, ſed veluti duo contraria. Contradictoria ſiquidem ea ſunt, quorum alterum ait, alterum autem ſolam continet negationem alterius, & nihil amplius, ex. gr. Petrus diligit Paulum, Petrus non diligit Paulum; contraria vero ſunt ea, quorum alterum ait, alterum autem includit non ſolum negationem primi, ſed etiam aliquid aliud. Ex. gr. Petrus amat Paulum, Petrus Paulum odio habet; nam odium continet non ſolam negationem amoris, ſed etiam aliquid aliud, ideſt actum voluntatis ab amore diverſum. Aliud autem eſt Petrum amare Paulum, aliud Petrum odio habere, aliud nec amore nec odio proſequi, quod ultimum eſt contradictorium primi, cum ſecundum contrarium ſit. Jam vero tria fieri poſſunt in dato exemplo Petri, qui Bergomum verſus contendit. Primum fieri poteſt, ut ab hoc puncto Bergomum verſus moveatur, ſecundum ut ab hoc puncto in contrariam plagam, tertium ut nullorſum, ſed in eodem puncto quieſcat. In tertio, quod primi contradictorium eſt, nulla eſt quantitas, ſcilicet nullus motus nullumque ſpatium, quod abſolvatur; in ſecundo vero quod eſt contrarium primi, quia præter negationem ejus, quod in primo affirmatur, aliud includit, eſt vera quantitas, ideſt verus motus & ſpatium, quibus cum vero motu & ſpatio confecto Bergomum verſus non convenit. Manet ergo, quod erat oſtendendum, quantitates negantes & affirmantes non eſſe uti duo contradictoria, ſed uti duo contraria.

§. 98. Corollarium

Atque hinc oritur, cur hæ quantitates duos ſtatus diverſos atque contrarios habere dicantur, uti ſi prima ſignificet quantitatem extenſam verſum unam plagam tendentem, altera ſignificet eam, quæ verſus contrariam, ſi prima acceſſum, altera diſceſſum, ſi una vim attrahentem, altera repellentem, ſi prima numerum, qui exprimat credita, altera numerum, qui debita; propterea quod hæc omnia ſunt quantitates & quidem in ſtatu contrario.

§. 99.

§. 99. Corollarium

Colligitur etiam quantitates affirmantes exprimi ſigno, quod ſignificat plus, ideſt +, negantes autem ſigno, quod minus, ideſt —, propterea quod ſi fingamus Petrum partim motum fuiſſe Bergomum verſus, partim in contrariam plagam, intelligere neceſſe eſt non ſolum ſpatium, quod ab ipſo peragratum eſt Bergomum verſus, verum etiam aliud, quod in contrariam plagam, & cum tanto minus eo verſus proceſſerit, quo plus in contrariam plagam contenderit, alterum ab altero ſubducendum, ſive alterum ſigno + affectum cum altero ſigno minus — copulandum eſt, ut quantum ſit ipſius iter, intelligamus. Hinc efficitur Algebriſtarum regula, quod in additione quantitatum poſitivarum, quæ afficiuntur ſigno +, & negantium, quæ ſigno —, eadem ſigna retinenda ſunt.

§. 100. Corollarium

Oritur quoque alia regula, quod in detractione ſigna mutanda ſunt. Nam poſitivi negatio eſt vera negatio, negatio autem negativi eſt affirmatio. Jam vero ſubducere ſecundam quantitatem a prima idem eſt ac ponere ſecundam non convenientem cum prima, ideoque quantitatem exprimere, quæ ſit æqualis primæ minus ſecunda. Ergo ſubductio quantitatis poſitivæ eſt negatio poſitivæ, & ideo fit quantitas negans, & ſubductio negativæ eſt negatio negationis, & ideo fit quantitas poſitiva: ex quorum primo concluditur in ſubductione ſignum + abire in —, & ex ſecundo ſignum — convertere in +.

§. 101. Corollarium

Nec minus intelligitur, cur in multiplicatione ſi quantitas poſitiva ducenda eſt in negantem, fit quantitas negans, & ſi negativa in negantem, fit affirmans. Nam multiplicatio eſt ſpecies additionis, cum prima quantitas toties ſibimet additur, quot ſunt partes in alia. ex. gr. 4 multiplicatur per 3, cum 4 accipi & ſibimet addi toties debet, quot ſunt unitates in 3, ideſt $4 . 3 = 4 + 4 + 4 = 12$. Id quod faciendum eſt, cum una quantitas toties integra convenit & habetur, quot ſunt partes in alia. v. gr. ſi ſint tres homines in cubiculo quodam & ſinguli habeant quatuor nummos, numerus quaternarius nummorum tot vicibus integer in dato cubiculo reperitur, quot ſunt homines., ſcilicet tribus vicibus integer convenit. Quare ſi quantitas poſitiva ducenda eſt in quantitatem partim

tim affirmantem & poſitivam, partim vero negantem, dum illa ducitur in terminum poſitivum mixtæ quantitatis, tot vicibus integra convenit & in eodem ſtatu poſitivo, quod ſignificat plus & additionem; at cum ducitur in terminum negantem, ſibimet quidem additur toties, quot ſunt partes in illo, ſed in eodem ſtatu neganti, proptereaquod in additione quantitatis negantis quantitas negans in eodem ſtatu conſideratur, & retinet ſignum —. Ergo ex eo quot multiplicatio eſt ſpecies additionis, bene concluditur in multiplicatione quantitatis affirmantis per negantem fieri minus. Quod eſt primum.

2. Quia vero ex altera parte negative addere quantitatem negantem eſt negare negationem & facere + §. 100. & ex altera ducere primam quantitatem negantem in ſecundam negantem eſt toties primam ſibimet addere, quot ſunt partes in ſecunda negante & quidem in eodem ſtatu, in quo ipſa eſt, ideſt negative addere ſibimetipſi quantitatem negantem, concluditur quantitatem negantem ductam in aliam pariter negantem facere +. Quod erat alterum.

3. Sed ut res in majori luce ponatur, faciamus Petrum a Paulo conduxiſſe 10 equos, ex quorum locatione Petrus 20 nummos argenteos pro ſingulis equis intra anni curriculum acquiſierit, pro conductione vero & expenſis debuiſſe impendere 30 nummos pariter in ſingulos. His poſitis nemo non videt lucrum a Petro factum eſſe = 10 ducto in 20 — 30 = 200 — 300 = — 100, ideſt pro lucro detrimentum 100 nummorum cepiſſe. Unde potius quærendum erat detrimentum a Petro acceptum, quo caſu fuiſſet = 10 ducto in 300 — 200. At ſi hoc addamus Petrum ex ſuis equis 12 locaſſe, equi a Petro conducti forent 10 — 12 = — 2. Et lucrum ab eo factum = — 2 ducto in 20 — 30 = — 40 + 60 = 20. Sive Petrus habuiſſet lucrum 20, quos expendiſſet, ſi nullum equum conduxiſſet, & duos ex ſuis retinuiſſet.

§. 102. Corollarium.

Cum vero diviſio ſit contraria multiplicationi, & illius ope quantitas in eoſdem illos reſolvatur factores, ex quibus in ſe ductis eadem conflata eſt, ſequitur, dividendo quantitatem negativam per poſitivam, aut viceverſa, quotientem exſiſtere negantem, dividendo negativam per negativam affirmantem haberi.

§. 103.

§. 103. Definitio

Ex quibus omnibus compertum ſit ex certis Metaphyſicæ principiis elici rationem quatuor principalium Algebræ operationum circa quantitates negantes atque affirmantes. Reliquum nunc eſt, ut inveſtigemus an ex iiſdem clara & perſpicua notio derivari poſſit quantitatum, quæ dicuntur imaginariæ. Quod ut exequamur, primo declarandum eſt, quid Mathematici intelligant nomine hujuſmodi quantitatum. Conveniunt autem eſſe radices numeri paris, uti quadratam, quantitatum negativarum. Cum enim ex altera parte ducendo certam aliquam quantitatem in ſemetipſam fiat quadratum, cujus radix eſt ipſamet quantitas in ſemetipſam ducta, & ex altera ex paulo ante diſputatis conſtet tum quantitatem poſitivam ductam in ſemetipſam pariter poſitivam facere poſitivum quadratum, tum negantem ductam in negantem idem præſtare; conſequens eſt nullam eſſe poſſe radicem quadrati negantis ſcilicet nec ajentem nec inficiantem. Quam ipſarum in ſtatu aut poſitivo aut negante impoſſibilitatem Cl. Nicolaus Martinus in Elem. Algeb. l. 1. cap. 10. artic. 2. alia valde eleganti ratione confirmat.

§. 104. Propoſitio

Ita explicata natura quantitatis imaginariæ dubium ſuboritur, an ea ſit abſolute impoſſibilis, an ſolum in utroque ex iis ſtatibus. Citatus auctor, qui primus, quod ſciam, hanc movit quæſtionem, loco ſupra commemorato affirmare non dubitat *tertium quemdam ſtatum poſſe fingi, qui ſit medius inter poſitivum & negativum, & in quo quantitates illæ ſint reponendæ*, & ſicuti quantitates poſitivæ & negativæ in Geometria explicantur per lineas ad plagas oppoſitas tendentes, ita imaginarias explicari poſſe per lineas, quæ ad plagas intermedias tendant.

2. Confirmari poteſt hæc auctoris ſententia ex eo, quod in æquationibus tertii gradus, in quibus omnes tres radices ſunt reales & inæquales, ſiqua ex methodis adhiberi ſolitis radix extrahatur, hæc exſiſtit imaginaria. Jam vero illa radix abſolute impoſſibilis non eſt, cum in dicta æquatione non ſolum una ſed tres radices inveniantur. Deinde nonne ex multiplicatione radicis imaginariæ $\sqrt{-2}$ in ſe ipſam fit quantitas vera & realis -2? Id autem fieri non poſſet, ſi quantitas imaginaria inter ea, quæ in nullo ſtatu eſſe poſſunt, reponenda foret.

§. 105. Propoſitio

Verum mihi, ut leviſſime dicam, veriſimilius videtur, quantitates imaginarias eſſe abſolute impoſſibiles. Cum enim in reſolutione problematum calculus in valorem aliquem imaginarium incurrit, ex eo tamquam certum omnes inferre non dubitant, id, ex quo poſito valor ſequitur imaginarius, eſſe impoſſibile, & revera ex aliis principiis ſæpiſſime id norunt. Ut unum ex multis, quæ afferri poſſunt, exemplum ſeligam, in balliſtica ſi data vi pulveris glandem plumbeam ex bellico tormento exploſuri, feriendum proponatur aliquod punctum, quod ſit ultra maximam amplitudinem jactus, & angulus inclinationis tormenti ad illud feriendum idoneus inveſtigetur, in reſolutione hujus problematis valor ſinus anguli imaginarius exſiſtit. Jam vero in data hypotheſi nullus angulus nulluſque ſinus, in quamcumque plagam dirigatur, aptus eſſe poteſt ad eum finem, ut glans ad ſcopum feriendum perveniat. Ergo valor ſinus, qui ex calculo in dicta hypotheſi imaginarius eruitur, exprimit eumdem ſinum & angulum ab eo pendentem eſſe non poſſe.

§. 106. Reſponſio ad I. Rationem §. 104.

Quod vero attinet ad allatam a Martino rationem, rurſus adverto id, quod in ſuperioribus adnotavi, tria eſſe diſtinguenda in recta, quæ ab uno puncto aliquorſum dirigitur, & ab eodem in contrariam etiam plagam producitur; ſcilicet partes lineæ verſus primam plagam, quæ ſunt quantitates poſitivæ, partes lineæ contrariam verſus, quæ negativæ, & punctum ipſum, quod non eſt ulla quantitas, ſed mera quantitatis negatio, ſive $=0$. His poſitis ajo tria pariter contingere poſſe in lineis rectis, quæ ab eo puncto in alias plagas ducerentur; vel enim in nullam partem propendent, ſed rectæ quantitatum negantium & affirmantium ad perpendiculum inſiſtunt, vel propendent in partem rectæ, quantitates poſitivas quæ exprimit, vel in aliam plagam. Si primum, illæ ratione habita quantitatum negantium & affirmantium non ſunt quantitates impoſſibiles, ſed æquales nihilo, ſive $=0$, proptereaquod eas nec augent, nec minuunt. Unde cum agitur de valore quantitatis aut negantis aut affirmantis, perinde eſt, ac ſi non forent, & cum puncto, a quo utræque incipiunt, omnimodis congruunt. Si vero inclinentur in rectam poſitivam, tunc reſolvendæ ſunt in duas directiones alteram perpendicularem ad dictam rectam quantitates affirmantes atque negantes exprimentem, alteram

paral-

parallelam; nam ratione primæ directionis iterum nihil ſunt ob allatam cauſſam, ratione ſecundæ congruunt cum recta poſitiva, & ideo ad genus rediguntur quantitatum poſitivarum. Sin denique in rectam negantem, ſimile fiat, & directionem alteram habebimus $= 0$, ſi cum rectis aut negante aut affirmante comparetur, alteram cum recta negativa congruentem, quæque idcirco eamdem exhibet ſpeciem quantitatis. Quod hic ſtatuo, ita manifeſtum fit ex notis legibus velocitatum, quæ ſecundum directiones vel omnino contrarias vel ad angulum ſolummodo oppoſitas eidem corpori imprimuntur, ut opus non ſit accuratius id explicare. Hoc unum adverto in eo celeritatum negotio directionem, quæ ad alteram perpendicularis ſit, non tamquam impoſſibilem ſed ſolum tamquam $= 0$ ratione habita alterius ab omnibus conſiderari. Quare ex dicta ratione Martini nihil effici poteſt, quod ſuffragetur ejuſdem opinationi.

§. 107. Problema

Venio ad ſecundam, in qua ſolvenda mihi neceſſarium eſſe video rem altius petere, & inveſtigare rationem, cur in æquationibus tertii gradus ſive cubicis, in quibus omnes tres radices reales ſunt & inæquales, in inveſtiganda radice ſemper elicitur valor ejuſdem imaginarius. Ac primum hæc adverto 1 cum duæ ex radicibus ſunt imaginariæ, & una ſolum realis, valorem radicis, qui ex calculo eruitur, eſſe realem. 2. Realem quoque exſiſtere, ſi tres radices ſint quidem reales, ſed duæ ex ipſis æquales habeantur. 3. Imaginarium autem concludi, cum tres radices reales ſunt & ſimul inæquales v. g. $y - 2 = 0$, $y - 1 = 0$, $y - 3 = 0$, quarum alia in alias ducatur. eaſque radices tunc eſſe reales atque inæquales, cum ablato, ut auferri poteſt, ſecundo termino æquationis tertius terminus afficitur ſigno —, & cubus ex triente ſui coefficientis major eſt quadrato ultimi termini dimidiati, v. g. in hac æquatione $y^3 - 9y + 6 = 0$, in qua quadratum dimidii ultimi termini, ſcilicet 9 eſt minus 27, qui eſt cubus radicis $= 3$, ſcilicet tertiæ partis coefficientis 9 termini tertii — $9y$, in hac, inquam, æquatione tres radices reales ſunt & ſimul inæquales, quarum valor non elicitur niſi imaginarius.

2. Qua vero de cauſſa id fiat, nunc inveſtigandum eſt. Jam diximus tam radicem affirmantem, quam negantem in ſe ductam generare quadratum affirmans. Unde ſi ex aliqua

quantitate radix quadrata extrahenda ſit, illa quantitas vel erit negans, vel affirmans; ſi negans, nulla radix niſi imaginaria extrahi poterit. Sin autem affirmans, duplex erit valor radicis idoneus ad illud quadratum efficiendum, ideſt negativus & affirmans; ex. g. $\sqrt{4}$ tam eſt $= 2$, quam $= - 2$, quod utraque hæc radix in ſe ipſam ducta idonea eſt quadrato 4 gignendo.

3. Radix vero cubica non poteſt extrahi niſi una; nam ſi cubus eſt quantitas poſitiva, radix poſitiva eſt, ſi negativa, radix pariter negans eſſe debet; quia $- 2$ licet ductus in $- 2$ faciat 4, tamen 4 iterum ductus in $- 2$, quemadmodum neceſſe eſt ad cubum gignendum, colligit $- 8$.

4. Radix autem quadrato quadrata poteſt ſolum eſſe duplicis valoris. nam ſi quantitas, unde hæc radix extrahenda eſt, ſit negans, nulla radix vera extrahi poteſt, quia $- 2$ per $- 2$ per $- 2$ per $- 2$ facit $+$. Sin autem quantitas ſit affirmans, radix duplicem habere poteſt valorem alterum affirmantem, ex. g. $= 2$, alterum negantem $= - 2$; nam ex. gr. 16 eſt tam potentia quarta radicis 2, quam radicis $- 2$ ob allatam rationem. Nec hic valor radicis plus quam duplus eſſe quit. Etenim dicta potentia 4 poteſt reſolvi in alia duo quadrata æqualia, quorum utrumque ſi poſitivum ſit, uti eſſe debet ad formandam 4 potentiam poſitivam, quæ ſola radices reales habere poteſt, nequit reſolvi niſi in duas radices æquales vel poſitivas vel negantes.

5. Ut in cubica ſive in potentia 3 radix, quæ extrahitur, eſt unius tantum valoris, ita in 5, atque in omnibus aliis numeri imparis ob eamdem rationem, quia cum $-$ ducitur in $-$ tot vices, quot ſignificat numerus par, fit quantitas negativa; in potentiis autem numeri imparis radix negans in ſe ipſam ducitur tot vicibus, quot exprimit numerus impar potentiæ uno demto, ideſt numerus par. E contrario in potentia 6, 8 & in aliis numeri paris radix ſemper duplicem valorem alterum ajentem, alterum inficiantem habere poterit.

6. His conſtitutis illud etiam adverto, quod in æquationibus primi gradus ſemper valor invenitur, uti & in æquationibus ſecundi, quando radices habent reales, in æquationibus autem tertii in caſibus ſupradictis, in æquationibus 4, quando duæ radices ſunt reales, duæ imaginariæ, non vero quando omnes reales ſunt; in æquationibus 5, quando una

eſt

eſt realis, aliæ quatuor imaginariæ, vel tres reales & duæ imaginariæ, ſed ita ut duæ ex realibus ſint æquales, non vero quando omnes ſunt reales & ſaltem tres ex ipſis ſunt inæquales, in æquationibus ſexti, quando duæ ex ipſis ſunt reales, aliæ quatuor imaginariæ, non vero quando quatuor aut omnes reales ſunt, in æquationibus 7, quando una eſt realis, aliæ ſex imaginariæ, vel tres ſunt reales & quatuor imaginariæ, ſed ita ut duæ ex realibus ſint æquales, non vero quando vel omnes vel quinque vel ſaltem tres ex ipſis ſunt reales & inæquales. Et ita porro.

7. Unde eſt inſigne diſcrimen inter valores radicum, quæ extrahi poſſunt ex æquatione potentiæ numeri paris, & ex æquatione potentiæ numeri imparis, quod in primis duplex valor radicis elici poteſt, ex ſecundis unicus tantum, vel ſi duplex, tunc ſolummodo, cum inter duas ex tribus radicibus quæ reales ſunt, æqualitas intercedit.

8. Quæ cum ita ſint, propius accedo ad ſolutionem quæſtionis. Cum ex altera parte in æquationibus ſecundi gradus ſolum duæ radices ſive incognitæ *y* valores eſſe queant, & ex altera ſi quæ ſint radices imaginariæ, eæ non poſſint eſſe niſi numeri paris, quo nimirum in æquatione, quæ nullum valorem imaginarium habere ponitur, evaneſcant multiplicatione in ſeipſas, compertum ſit, cur in omni caſu etiam duarum radicum realium ſimul & inæqualium valores ipſarum erui poſſint. Cum enim in extractione radicis quadratæ duplex valor erui poſſit poſitivus, & negans, valor negans dictæ radicis æquationis ſecundi gradus dat unum ex valoribus, valor autem affirmans alium ſuppeditat.

9. Cum vero in æquationibus tertii gradus tres ad ſummum ſint valores incognitæ, ſi duo ex ipſis ſint imaginarii, perinde eſt, ac ſi non forent, utpote impoſſibiles, & unus tantum permaneat. Unde mirum non eſt, ſi definiri poſſit. Cum autem ſunt tres reales, ſed duo ex ipſis æquales, perinde eſt ac ſi duo tantum forent, duobus ob æqualitatem in unum coaleſcentibus. Quare cum in extractione radicis cubicæ, ut conſtat ex Wolphio §. 358. Anal. 1. p. & ex aliis, talem Algebriſtæ methodum uſurpent, qua prius quadrata radix elicitur, pariter mirum non eſt, ſi etiam in hac hypotheſi radicum valores genuini eliciantur.

10. At ſi radices ſive valores incognitæ ſint tres reales ſimul

mul & inæquales, fieri non poteſt ut verus alicujus illarum valor eruatur. Nam ex altera parte tres ſimul diverſi inveniri non poſſunt iis methodis, quibus reſolutio fieri debet extractione radicum (ſiquidem hæ ad ſummum duos valores ſuppeditant, quando ſunt radices potentiæ numeri paris, uti ſecundæ) qualis in extractione cubicæ radicis uſurpatur. Ex altera vero non eſt major ratio, cur unus aut duo ex ipſis inveniantur, non alii, aut alius; ſiquidem tam omnes & ſinguli valores ipſi per ſe ſunt idonei ad hoc, ut eliciantur, propterea quod omnes æqualiter reales ſunt, quam methodus, quæ uſurpatur, ad nullum ex iis determinata eſt, ſed ad ſingulos inveniendos eſt prorſus indifferens. Siquidem incognita y, cujus valor quæritur, fit $= x + z$, quæ aliæ duæ incognitæ ad nullam ex incognitis y determinatæ ſunt. Quare cum nihil ſit abſque ſufficiente ratione, per quam intelligi poſſit, cur ea res potius ſit, quam non ſit, mirum non eſt, ſi in data hypotheſi nullus erui poſſit verus valor incognitæ, ſed ſolum aliquis imaginarius & impoſſibilis.

11. Ex his autem eruitur etiam ratio, cur in æquationibus altioribus gradus numeri paris elici poſſint valores radicum, cum ſolum duo reales ſunt & inæquales, alii omnes imaginarii, in æquationibus vero gradus numeri imparis ſolum cum aut unus tantum eſt realis & alii imaginarii, aut tres ſunt reales, ſed ita, ut duo ſint æquales; quod probe notandum, quia hic caſus trium realium, quarum duæ ſun æquales, ab Algebriſtis, quod ego ſciam, præteritur.

§. 108. Objecta & Reſponſio

Martinus ad hæc illa eadem objicere poteſt, quæ ad ſimilem a Nevvtono in Arit. Univ. allatam rationem reſpondit l. 2. Elem. Algeb. cap. 7. art. 5. ubi non veretur aſſerere Nevvtonum nihil docuiſſe, ſed potius a vero aberraſſe. *Nonne* enim (ſunt ejus verba) *in reductione æquationum quarti gradus alia methodo inſtituta, quam primo docuimus, novimus quantitatem determinandam per æquationem ſimplicem, quum multiplex eſſe debet, ſic per analyſim deſignari, ut prodeat adhuc indeterminata? Itaque quum hic quoque quantitas* $y - z$, *qua* x *deſignatur* (auctor ponit æquationis incognitam eſſe x, & eam poni $= y - z$, quæ methodus eodem revolvitur, ac Wolphiana, quæ ponit $x = y + z$), *multiplex eſſe debeat, eam non impoſſibilem, ſed indeterminatam exhibere deberet analyſis. Sed præterea*

terea, ſi concluſio idcirco ſit impoſſibilis, quia colligitur ex hypotheſi impoſſibili, erit viciſſim poſſibilis concluſio illa, quæ eruitur ex hypotheſi poſſibili. Hunc in finem ponit hanc æquationem $x^3 - 3px - 2q = 0$, cujus omnes radices reales ſunt. Deinde tribus aliis radicibus $x + a - \sqrt{(3b^2)} = 0$, $x + a + \sqrt{(3b^2)} = 0$, & $x - 2a = 0$, in ſe invicem ductis format hanc aliam priori ſimilem

$$x^3 - (3a^2 + 3b^2)x - 2a^3 + 6ab^2$$

Tum collatione terminorum hujus æquationis facta cum terminis alterius invenit $a^2 + b^2 = p$, & $a^3 - 3ab^2 = q$, ex quibus eruit $a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = p^3$

& $a^6 - 6a^4b^2 + qa^2b^4 = q^2$

atque per mutuam iſtarum æquationum ſubductionem elicit

$$-qa^4b^2 + 6a^2b^4 - b^6 = q^2 - p^3$$

Deinceps elicit quadratam in quantitatibus imaginariis

$$3a^2b\sqrt{-1} - b^3\sqrt{-1} = \sqrt{(q^2 - p^3)}$$

Unde cum ſit $a^3 - 3ab^2 = q$, per additionem habebitur

$$a^3 - 3ab^2 - (3a^2b - b^3)\sqrt{-1} = q - \sqrt{(q^2 - p^3)}$$

Cumque per extractionem cubicæ radicis iſtarum æquationum una fiat $a + b\sqrt{-1} = \sqrt[3]{(q + \sqrt{(q^2 - p^3)})}$, & altera $a - b\sqrt{-1} = \sqrt[3]{(q - \sqrt{(q^2 - p^3)})}$, tandem concludit radicem poſitivam realem deſignatam per $2a$ eſſe $= \sqrt[3]{(q + \sqrt{(q^2 - p^3)})} + \sqrt[3]{(q - \sqrt{(q^2 - p^3)})}$, quæ quidem tametſi deducta ex hypotheſi poſſibili & naturæ æquationis convenienti, in eaſdem difficultates incurrit, proptereaquod ſi p^3 cubus ex triente coefficientis ſecundi termini eſt major q^2 quadrato dimidii ultimi termini, radix illa eſt imaginaria & impoſſibilis: & ſane eadem eſt, atque illa, quæ ex poſitione $x = y - z$ elicitur. *Ex aliis ergo principiis* (concludit auctor) *impoſſibilitas hujus rei eſt deducenda, quæ quidem nec quiſque inveſtigavit adhuc, nec a nemine umquam inveſtigari poſſe facile mihi perſuadeo.*

2. Sed pace tanti viri, de cujus laude nihil detractum velim, rationes ab ipſo allatæ me a ſententia nequaquam deterrent. Nam quod attinet ad primam, ajo tantum abeſſe ut illam evertat, ut potius mirum in modum confirmet. Siquidem in æquationibus quarti gradus, ut ipſe paulo poſt docet, cum de illis differit, valor incognitæ prodit indeterminatus, ſed ita ut reſolvi poſſit ſolum in duos alterum affirmantem, alterum negantem, quemadmodum natura vult quadratæ radicis, idque

que cum duæ ſolum ex radicibus ſunt reales, aliæ duæ imaginariæ. Ergo allatum æquationum quarti gradus exemplum non efficit, quod contendit, in extractione radicis cubicæ poſſe ita prodire indeterminatum, ut tres valores reales atque diverſos exprimere queat, immo potius contrarium, cum inde inferatur non poſſe ita prodire indeterminatum, ut quatuor radices reales exhibeat. Cum vero ex iis, quæ ſupra diſſeruimus, liqueat non ſolum in æquationibus quarti gradus, verum in omnibus aliis radices veras tunc ſolum extrahi poſſe, cum aut una tantum eſt realis, aut duæ, aut ſi tres, cum duæ ſunt æquales & ideo unam ſolum conſtituunt, nonne id ſub oculos ponit myſterium hoc ex eo pendere, quod in extractione radicum, qualis operatio fieri debet in inveſtigatione incognitæ cujuſdam æquationis, ad ſummum haberi poſſunt duo valores profecti ex eo, quod radix poſitivæ potentiæ numeri paris poteſt eſſe tum affirmans tum negans? Quod ſi quis ſingulas æquationes expendat, quæ ex poſitione $x=y-z$, vel $x=y+z$ ſenſim eliciuntur ab Algebræ auctoribus, antequam perveniant ad ultimam, qua exprimitur valor radicis, magis confirmabitur in ea ſententia, qua radices imaginarias & impoſſibiles ex hypotheſi impoſſibili ducere ortum putamus. Siquidem manu tanget in eventu, quo omnes radices ſunt reales & inæquales, ideſt cubus ex triente coefficientis tertii termini eſt major quadrato dimidii ultimi, aſſumi aliquam impoſſibilem æquationem, ex qua mirum non eſt ſi quod eruitur, ſit imaginarium & impoſſibile.

3. Ex quibus etiam colligitur eos in irritum conari, qui hanc reſolutionem omnium tertii gradus æquationum tentant iis methodis, quibus omnes ſimul radices inveſtigantur, & elicitur valor aliquis, qui cum ad nullas determinatus fuerit, aut omnes reales radices, ſi fieri poteſt, aut nullas exhibeat neceſſe eſt. Quare ſiqua methodo id effici quit, alia nulla quam ea, qua radices paulatim & ut ita dicam, per partes inveſtigentur. Qualis eſt ea quæ nititur illo Algebriſtarum theoremate ultimum æquationis terminum eſſe = omnibus radicibus in ſe ductis. Nam reſolutione ultimi termini in ſuos factores inveniri poſſunt radices omnes, etiamſi fuerint tres, quatuor &c. reales ſimul & inæquales. Ut contingit in æquatione, quæ fieret ex radicibus poſitis §. 107. num. 1. ex qua ſi ultimus terminus -6 in ſuos factores reſolvatur, tres

Digitized by Google

ejuſdem radices reales & inæquales eliciuntur. At hæc methodus eſt tantum uſui, cum omnes radices ſunt reales quidem & inæquales, ſed ſimul rationales, non autem ſi quæ ex ipſis irrationales ſint.

4. Fortaſſe ad radices has irrationales eliciendas idonea erit, quæ a Martino in ſecunda ratione proponitur, quod illa non omnes radices ſimul, ſed paulatim & per partes inveſtigantur. Verum in eo deficit, quod innititur falſo principio. Scilicet poſitis duabus æquationibus ejuſdem gradus, cum eodem numero terminorum, & cum iiſdem ſignis, & facto ultimo termino primæ = ultimo termino ſecundæ, item coefficiente tertii termini primæ = coefficienti tertii termini ſecundæ, etiam radices primas futuras eſſe æquales ſecundæ radicibus. Id enim prorſus eſt falſum. Cujus rationem ſupprimere juvat, ſicuti & certam quamdam hujuſce methodi correctionem, quam excogitavi, quæ fortaſſe ad has æquationes ſolvendas erit accommodata, propterea quod non eſt hujus loci. Interim ajo ex his poſſe inferri quid ad ſecundam Martini rationem reſponderi poſſit, poſitionem ab ipſo adſcitam non eſſe poſſibilem, nec naturæ reſolvendæ æquationis conformem, atque idcirco illud eſſe in cauſſa, cur radix inde elicita eodem, ac aliæ, defectu laboret.

§. 109. Reſponſio ad II. Rationem §. 104.

Atque his munivimus viam ad ſolutionem illius ſecundæ rationis, qua firmari poteſt illa Martini ſententia, quam §. 104. expoſuimus. Nam cum elicitur aliquis valor imaginarius, id non ſemper indicio eſt rem, qua de agitur eſſe impoſſibilem, quia fieri poteſt ut talis eruatur, propterea quod modo impoſſibili quæritur: qui modus totam analyſim vitiare debet, & ad impoſſibilia deducere. Cum vero tres radices reales & inæquales dictarum tertii gradus æquationum poſſint quidem eſſe, ſed modo impoſſibili & eo, quo quidpiam impoſſibile aſſumitur, inveſtigentur, mirum non eſt, ſi quæ eruuntur radices abſolute impoſſibiles ſint; tametſi aliæ dentur radices veræ & reales.

§. 110. Reſponſio ad III. Rationem §. 104.

Reliquum eſt ut tertiæ rationi ſatisfaciamus. Cum in ſe ducuntur radices imaginariæ, faciunt quidem quantitatem realem, at non ſua vi, perinde ac ſi duo impoſſibilia quidpiam poſſibile facere poſſent, ſed ſolum virtute alterius cujuſdam poſſibilis. Ut in hoc ſyllogiſmo ex præſcripto regularum confecto: omnis lapis eſt rationalis; atqui Petrus eſt lapis; ergo Petrus eſt rationalis

nalis, concluſio eſt vera non ex vi præmiſſarum, quæ falſæ ſunt, ſed virtute aliarum, in quibus Petrus & rationalis cum aliquo medio termino vere conveniunt. Unde ſi, ex. gr. ſciam aliunde corpus eodem tempore pulſum fuiſſe velocitate = 4 orientem verſus, qui oriens ponatur plaga motus affirmans, & velocitate = 20 verſus contrariam partem, inde infero illud verſus orientem dato tempore confeciſſe palmos 4 — 20 = — 16; cujus radicem ſi quæram, erit hæc non 4, nec — 4, ſed √—16; quæ quamvis impoſſibilis ſit, ſi tamen illam in ſemetipſam ducere velim, intelligo illius quadratum eſſe — 16. de cujus poſſibilitate ego certus non ſum ob id unum, quod ſit ex √—16, ſed aliunde, quia præſcivi dictum corpus 16 palmorum ſpatio diſceſſiſſe ab oriente. Quamobrem ex multiplicatione aut diviſione hujuſmodi quantitatum nihil certi ſtatui poteſt, niſi aliunde cognoſcam id, quod ex iis in ſe ductis aut per ſe diviſis exſiſtit.

§. 111. Scholion

Hic obiter moneo ex his elici poſſe rationem componendi celebrem illam inter Analyſtas Controverſiam, an ſcilicet factum ex duabus quantitatibus imaginariis ſit reale vel imaginarium. Wolphius enim §. 71. putat √ — 5 ductam in √ — 3 facere √—15; cujus rei hanc affert rationem. *Alias enim factores imaginarii facerent factum reale; quod utique abſurdum.* At Martinus Alg. l. 1. cap. 10. artic. 4. ait hunc auctorem & alios in maximo errore verſari, idque oſtendit ex eo quod multiplicando √—3 per √—3 fit — 3 quantitas realis. Id quod etiam a Wolphio citato loco conceditur, dum multiplicando √ — 8 per √ — 8 elicit productum = — 8. Quidni igitur multiplicando √—5 per √—3 fieri non debeat √15? Quod ni ita eſſet, quid fieri deberet, ſi √—5 ducenda foret in √+3? non √—15, quia duo factores √ — 5, & √ 3 facere non poſſunt eamdem quantitatem, ac eam, quam in ſententia Wolphii faciunt hi duo tam diverſi √—5, √—3; multo minus √15, quia nulla eſt, cur cum unum tantummodo ſit ſignum —, in multiplicatione diſpareat. Præterquamquod ſi √ — 3 ducta in √—3 facit — 3, poteſt etiam facere √9, quia √9 non ſolum eſt 3, ſed etiam — 3. Vides ergo quomodo diſpareant duo ſigna negantia, tametſi poſt radicem poſita ſint. Ergo etiam evaneſcere queunt in multiplicatione √—3 per √—5, & efficere √15.

2. Has

2. Has igitur propter rationes certum arbitror; ſi quando hæ quantitates aliæ in alias ducendæ ſint, Martini regulam eſſe ſequendam; ſed ita, ut attendenda ſit etiam allata ab auctoribus contrariæ ſententiæ; quod in eo poſitum eſt, ut quantitates reales, quæ ex imaginariis exſiſtunt, in data hypotheſi reales & veras non putemus, niſi eaſdem exſiſtere aliunde noverimus.

PARS SECUNDA.

De Natura ſive Eſſentia, Attributis & Modis Corporum omnium.

§. 112. Scholion

SEd de quantitate hactenus deque difficultatibus, quæ Philoſopho occurrere poſſunt in methodis, quæ in illa ſupputanda a Geometris uſurpantur. Nunc pergamus ad illud, cujus illuſtrandi gratia orationem in hunc locum induximus, ad corpus univerſim inſpectum, ad attributa, ad modos, atque ad accidentia, quæ in omnia corpora cadunt.

CAPUT PRIMUM.

De Eſſentia Corporis in genere.

§. 113. Propoſitio

IN inveſtiganda autem corporis eſſentia, qua ſcilicet corpus ab iis, quæ corpora non ſunt, ſecernitur, multum aliqui Phyſici deſudarunt, ſed parum felici ſucceſſu, propterea quod majorem animo conceperant ſpem, quam ferant vires humani ingenii. Sperabant enim ſe poſſe totam corporum eſſentiam mente complecti, ex qua demum omnium eorum, quæ in corporibus ſunt, rationes concluderent. Verum nobis, dum hanc vitam degimus, tam beatis eſſe non licet, ut interiores rerum eſſentias animo comprehendamus: nam ut optime advertit Muſſchenbroechius in libro qui inſcribitur *Eſſai de Phyſ. Tom.* 1. §. 16. ex altera parte quidquid in corporibus noſcimus, adminiculo ſenſuum cognoſcimus; ex altera vero ſenſus nobis referre non poſſunt, niſi corticem, libramentum & ſuperficiem ſubſtantiæ corporeæ. Eſſentia vero primaria potiſſimum ſita eſt in eo, quod

quod intra ſuperficiem continetur. Quid quod natura corporis exigit, ut non ſolum a Deo creetur, verum & perpetuo conſervetur, ne momento quidem permanſurum niſi ejus ſubſtantia ſit in continuo quodammodo fluxu & emanatione a Divina? Quis vero ſanæ mentis ſperet hanc omnino eſſentialem & abſolute neceſſariam relationem in corporibus ſe perfecte poſſe cognoſcere?

2. Igitur abjecta tam vana ſpe videamus, an ſaltem ex parte corporum eſſentiam poſſimus attingere. Qua in re mihi certum & exploratum videtur extenſionem in longum, latum atque profundum ad primariam corporis eſſentiam pertinere. Nam illa pertinent ad eſſentiam primariam atque ſubſtantialem cujuſdam rei, quæ nullo modo avelli poſſunt, quin tota ſubſtantia in nihilum abeat, quæque præterea hujuſmodi ſunt, ut ab aliis interioribus non proficiſcantur, §. 22. num. 7. & 9. Eſt autem hujuſmodi extenſio in ſubſtantia corporea. Fac enim, ſi fieri poteſt, abire extenſionem; & nihilominus permanere aliquid inextenſum ſubſtantiæ corporis, ſive aliquas ſubſtantiales partes & minime extenſas, uti ſunt elementa ſimplicia Leibnitii & Wolphii. Hinc conſequens foret, ex eo, aut ex iis, quæ ſunt extenſionis expertia, extenſum poſſe componi, quod adverſatur illis, quæ §. 14. invictis rationibus concluſa fuerunt. Igitur ſi quid eo loco, ut reor, confectum eſt, omnino efficitur extenſionem nullo pacto a ſubſtantia corporea poſſe divelli. Ex quo illud etiam concluditur eamdem eſſe unum aliquod primum prædicatum, quod in corpus cadit, quodque a nullo alio interiori tamquam effectus a cauſſa proficiſcitur. Nam ſi quid prius extenſione in corpore foret, id potiſſimum eſſent partes, ex quibus extenſio componeretur. Ex eo autem, quod extenſum inextenſis conſtare nequit, jam perſpicuum fecimus §. 18. partes reipſa diſtinctas in vero continuo extenſo non reperiri. Igitur in corpore nihil eſt, quod extenſionem ratione & origine antevertat. Et inveſtigare rationem intrinſecam, cur corpus ſit extenſum, eſt hominis in irritum conantis & inquirentis id, quod non eſt, nec eſſe poteſt. De quo plura diſſeruimus §§. 20. & 21. num. 9. & 10. quos vide. Manet ergo extenſionem ad primariam corporis eſſentiam pertinere.

3. At enim hæc bene concluduntur, ſi corporum extenſio ſit ex numero eorum, quæ extra mentem ſunt, & in ipſis corporibus proprie & ſub ea forma, qua percipimus, inveniuntur. Non

Non autem, ſi in perceptione mentis tantum exſiſtat, & reipſa aliud ſit nihil, quam percipiendæ extenſionis fundamentum & ratio. Ad hanc enim idealem extenſionem efficiendam neceſſe non eſt ponere ſubſtantiam corpoream, quæ ſit ante extenſa, quam percipiatur; cum ſatis ſit aut imaginari in elementis corporum tametſi ſubſtantiis ipſis per ſe inextenſis vim aliquam, ſive eſſentialem, ſive accidentalem, qua noſtri corporis organa percellantur, iiſque commotis extenſionis idea in mente excitetur; aut confugere ad Deum, qui occaſione appulſus humani corporis ad alia, eam ſolidæ extenſionis ideam excitet, quam ipſe per ſe poteſt imprimere, tametſi nihil extra mentem conſtaret. Jam vero in extenſionis ſolidæ cognitionem alia ratione non venimus niſi per ſenſus. Igitur ſuſpicari poſſumus eam proprie in mente tantum exſiſtere, efficienter autem in corporibus: quemadmodum propria doloris & voluptatis, odorum atque ſaporum forma ſolum in anima eſt, in corporibus, quæ in ſenſus incurrunt, ſola cauſſa eorum efficiens, ſive potius occaſionalis reſidet.

4. Quibus antequam ſatisfaciam, adverto hinc conſequens eſſe futurum nec ſpatium nec locum nec motum proprie in corporibus ineſſe, ſed in mente tantummodo. Cum enim ſpatium vere extenſum in vacuo non reperiatur, ſed ſolum in ſubſtantia continua, quæ vera extenſione donetur §. 8. ſimul ac extenſio eſſe non poteſt in rebus, ſed percipi tantum, etiam ſpatium & inde pendentem locum inter ea, quæ ſolum intelliguntur, collocandum conſequitur. Sublatis vero ab hac rerum univerſitate ſpatiis & locis, etiam motus, qui eſt jugis & ſucceſſiva translatio corporis ab alio in alium locum, eliminetur neceſſe eſt, & inter animæ ideas ponatur. Quamobrem niſi velis tot ac tantas plagas accipere, tibi in communi ſententia perſtandum eſt extenſionis corporeæ, quæ proprie ſit extra mentem.

5. Scio quoſdam eſſe ex numero eorum, quos veritas revelata intra ullos limites coercere non poteſt, qui commoti difficultatibus iis, in quas omnes etiam contrariæ ſectæ circa compoſitionem continui incurrunt, nullatenus verentur non ſolum veram re ipſa extenſionem, & inde conſequentia ſpatium, locum & motum negare, verum & ipſam corporum exſiſtentiam, ut ſi eos audiamus, omnia hæc, quæ nos circumſtant, aliud ſint nihil niſi animæ viſa & imagines. Verum ſi huc Philoſophia deducit, ſatius eſt nullam omnino partem ejuſdem attingere,

gere,

gere, & in rebus dijudicandis uti communi hominum ſenſu, quem fallax ratio nondum vitiavit. Non deducit tamen, quia ut animadverti, cum ſyſtema P. Buskovikii §. 17. refutavi, cum ſanis Philoſophis, qui quomodo, & quatenus ratione utendum ſit, norunt, duo ſunt diſtinguenda genera certitudinum, methaphyſicæ, atque moralis, quam alii phyſicam vocant, uti Graveſandius tom. 1. Elem. Phyſ. edit. ultimæ ſub initium Sum metaphyſice cujuſdam rei certus, cum ſcio rem ita eſſe, ut nullo modo aliter eſſe poſſe cognoſcam. Hujus gradus certam cognitionem acquiro non ſolum primorum principiorum aliorumque, quæ in rerum poſſibilitate verſantur, ſed etiam exſiſtentiæ meimetipſius & ſubſtantiæ a ſe. Sum vero phyſice tantum certus, cum noſco rem ita eſſe, ut aliter eſſe poſſe ſaltem infinita Subſtantiæ Divinæ potentia norim. Ad hunc certitudinis gradum quiſque de vulgo pervenit in cognitione exſiſtentiæ & aliquarum proprietatum ſui corporis & aliorum, quæ ad humanum corpus appellunt, illudque pulſando impreſſionem in anima faciunt. Scimus enim Deum animam ſimiliter commovere poſſe ipſum per ſe, tametſi nihil ſit extra ipſam. Quemadmodum autem hi certitudinum gradus confundendi non ſunt, ita in cognitione exſiſtentiæ corporum & proprietatum eorumdem morali & phyſica certitudine contenti eſſe debemus, illudque tamquam certum putandum, quod ſenſus conſtanter referunt, quodque aliunde evidenti ratione nequaquam refellitur; niſi dum majorem quam fieri poſſit, comparare contendimus, eam etiam, quæ una conceſſa eſt, eripi nobis bis velimus.

6. Non improbo tamen conſilium Carteſii, qui phyſicam exſiſtentiæ corporum certitudinem ad altiorem gradum evehere contendit, cum ex eo, quod mens ſibimet ſe cogitare, & ideo exſiſtere certiſſime conſcia eſt, intulit eam in metaphyſice certam cognitionem venire Entis a ſe, deinde ex eo, quod certa pariter ſit Ens a ſe infinitum & optimum eſſe, confecit non poſſe decipere mentem humanam, tum ex eo, quod mentem falleret, ſi conſtantem & perpetuam in ea exſiſtentiæ corporum extenſorum ſenſationem efficeret, aut effici pateretur, quin tamen hæc corpora exſtarent, eadem in hac rerum univerſitate vere exſtare concluſit. Non improbo, inquam, conſilium Carteſii, nec tamen penitus ſequor, ne, ſicui forte non probem ex eo, quod in anima exſiſtunt corporum ſenſationes ſine corporibus, con-

conſequi nos decipi a Deo, anſam præbeam inficiandi corporum extenſorum exſiſtentiam, quæ ob id ipſum, quod ſentimus, ſatis certa putanda eſt, niſi aliqua evidens ratio afferatur, quæ illorum impoſſibilitatem evincat.

7. Nullam vero afferri rationem hujuſmodi, quod attinet ad ſubſtantiæ vere extenſæ, ſpatii, loci & motus poſſibilitatem, perſpicuum arbitror factum iis, quæ toto libro de quantitate jam diſputavimus. Quamobrem omnino a ratione alienum eſt ob illud tantum, quod aut aliter Divina Omnipotentia eſſe poſſit, aut contra continuum extenſum ſint aliquæ difficultates, quæ rem liquido non conficiunt, repudiare, quod omnes ſenſus certum phyſice faciunt, aut corporum, aut extenſionis in corporibus exſiſtentiam. Quo parti objectorum ſatisfactum puto. Nam quod pertinet ad dolorem & voluptatem, calorem & frigus aliaque hujuſmodi, quæ quamvis in anima exſiſtant, ſtatim ac quædam corpora ad noſtrum corpus appellunt, tamen ſub propria forma non in corporibus, ſed in anima ſunt, latum diſcrimen eſt hæc inter, atque ſolidam extenſionem. Nam idcirco hæc aliaque id generis Carteſio auctore corporibus, quibus eadem Peripatetici affinxerunt non levi totius ſcientiæ naturalis damno, & omnium idearum obſcuritate & confuſione, demta ſunt mentique poſtliminio reſtituta, quod aliud ipſa proprie non ſunt niſi quædam genera cognitionum. At ſolida extenſio quamquam cognoſci queat, tamen ipſa per ſe cognitio non eſt, ſed potius res cognita, & aliquid a cognitione ſecretum. Quamobrem dubitare non poſſumus, quin ſit reipſa in corporibus, præſertim ſi etiam conferamus ea, quæ in hanc eamdem ſententiam §. 17. diſſeruimus.

8. Poteſt tamen hic ex altera parte Catholicæ Religionis Philoſophus exoriri, itaque diſſerere. Fide divina, quæ omni naturali ratione certior eſt, ſcimus Chriſti corpus totum & cum omnibus partibus apte compoſitis etiam in quolibet parvo panis fragmento poſt verba conſecrationis reperiri. Nequit autem tam exiguo contineri fragmento, niſi extenſionem ratione habita ſpatii & loci amittat. Si enim ſingula, minima & ſolida corpuſcula, ex quibus corpus Chriſti componitur, ſuam quæque extenſionem retinerent, aut valde majus ſpatium complerent, quam illud, quod a fragmento occupatur, ſi aliud cum alio extrinſecus cohæreret, aut ſi aliud cum alio compenetraretur, ſitum, ordinem & diſpoſitionem, quam in corpore viventi ha-

bent, non tuerentur. Quorum utrumque abhorret a fide. Igitur ut hæc ſarta tecta ſervetur, aliud non reſtat, niſi ut Corpus Chriſti in Euchariſtico Sacramento extenſione locali carere dicamus. Quo conficitur extenſionem a corpore poſſe divelli, & ideo ad primariam Corporis Eſſentiam minime pertinere. Quod ſi cum Leibnitio, cujus ſententiam in ſequentibus expendemus, ponamus eſſentiam corporis in vi quadam eſſentiali, ſive in ſubſtantia inextenſa vim quamdam eſſentialem habente, ex qua demum extenſio ſolida, ſed minime neceſſitate metaphyſica conſequatur, facilius tueri poſſumus & Corpus Chriſti parvo quolibet fruſto panis contineri, & partes omnes ejuſdem ſervare ſuum quaſque ſitum ac poſituram, non quidem ratione habita loci, quem non occupant, ſed ſolum ipſas inter ſe, quemadmodum communis fert Theologorum ſententia, qui extenſionem diſpoſitionemque partium ratione habita ipſarum ab extenſione & collocatione ratione habita ſpatii diſtinguunt.

9. Fateor hæc valide aſtringi; nihilominus ſpero cum fide, cujus certitudinem omni alia majorem certiſſime credo, extenſionem eſſentialem corpori me poſſe componere. Quod ut exſequar, cum iiſdem Theologis, qui Corpus Chriſti ſine ulla extenſione locali ponunt, primum moneo, id unum ab Eccleſia credendum proponi hoc ſacratiſſimum Corpus Chriſti cum omnibus ſuis partibus apte diſpoſitis vel in quolibet parvo fragmento contineri. Quia vero Theologi ratione naturali utentes hæc fieri non poſſe ſibi perſuaſerunt, niſi omni extenſione locali dictum corpus careret, idcirco in illam convenere ſententiam. Quare ſi quiſpiam proponere poſſit ſaltem non liquido impoſſibilem modum, quo præſentia Corporis Chriſti aptaque partium diſpoſitio cum extenſione concilietur, nihil hinc detrimenti capiet Chriſtiana Reſpublica. Nam Theologi ſuo ſe munere fungi putant, ſi nihil eſſe doceant, quod altiſſima Chriſtianæ Religionis Myſteria evidenter labefactet, tametſi eorumdem poſſibilitatem liquido conficere nequeant. Hic vero modus ita explicatur. Cum corpus quodlibet ideoque & Chriſti ſit in minutiſſima diſpectum corpuſcula, quæ ſimul cohærent aliud extra aliud, cum naturaliter exſiſtit, Divina Omnipotentia fieri poteſt, ut omnia inter ſe compenetrentur, & ad unius, aut paucorum ſpatium occupandum concurrant. Cum enim in eodem ſpatio corpus omnino continuum aliud alio in infinitum denſius eſſe queat §. 54. num. 2. multo magis cum uno, aut paucis plura

cor-

corpuſcula compenetrari poſſunt, id quod §. 201. ex profeſſo oſtendemus. Quo fit ut in quolibet minimo fragmento, cujus magnitudo innumerabilibus partibus ſuperat exilitatem ſingulorum corpuſculorum, quæ primum a Deo creata ſunt, totum Chriſti Corpus contineri poſſit. Tot enim ex corpuſculis Corpus Chriſti formantibus compenetrari faciat, quot opus eſt, ut ad quemlibet exiliſſimum exteriorem locum occupandum redigatur. Quis in hac hypotheſi ambiget fidem Catholicam circa Myſterium Corporis Chriſti in Euchariſtia ſartam tectam nos habituros? Nam primo erit Corpus idem, ac eſt in Cœlo, ejuſdemque omnino quantitatis; quia quantitas maſſæ non tantum a loco exteriori, quo circumſcribitur, quantum a ſpiſſitudine & ejuſdem denſitate repetenda, & auri libra eſt ejuſdem quantitatis ac maſſæ, atque argenti libra, tametſi hæc latiori loco definiatur. In hac vero hypotheſi eædem omnino erunt ſubſtantiales partes, ſive corpuſcula primitiva, licet plura ex iis alia in aliis ſint. Deinde forma exſiſtit eadem ac diſtributio membrorum, perinde ac ſi ad naturalem extenſionem expanderetur, quia cum hæc forma poſita ſit in ſimilitudine ſitus, quo ſolida omnia corpuſcula collocantur, hæc ſimilitudo obtineri poteſt tam in magno quam in quolibet vel minimo loco exteriori. Nam etiam inter ea, quibus in quantitate & magnitudine non convenit, perfectam ſimilitudinem intercedere poſſe quiſque de vulgo non neſcit. Tum Corpus Chriſti cuicumque figuræ panis, ſub cujus ſpeciebus latet, accommodari poteſt, quin tamen rotundum fiat, ſi panis rotundus, oblongum & exile, ſi ſpecies panis multum in longitudinem & parum in latitudinem extendantur. Nam quemadmodum exiguitate ſingularum particularum, in quas fluida diſpecta ſunt, fit ut quamvis ſingulæ ſint cujuſdam definitæ figuræ, tamen ſimul junctæ quemlibet cujuſcumque figuræ locum implere & cuilibet figuræ aptari commode poſſint; ita præſentiæ Corporis Chriſti exiguum locum externum occupantis multiplicatione in pluribus locis, qua fit, ut tametſi unum, quod ad plura loca implenda pluribus æquipolleat, Deus conſequi facillime poteſt, ut ſine propriæ ſibique congruentis humanæ figuræ depravatione in toto loco cujuſcumque figuræ & in ſingulis partibus reperiatur. Ex quibus conſequitur extenſionem omnino eſſentialem & a corpore neque Divina virtute ſeparabilem cum præſentia Corporis Chriſti in Euchariſtico Sacramento bene componi.

Digitized by Google

10. Refutatis rationibus eorum, qui volunt extenſionem a corpore poſſe divelli, quin corpus intereat, reliquum eſt, ut paucis convellamus eorum argumenta, qui etſi fateantur extenſionem cum corpore neceſſario cohærere, negant tamen eam eſſe eſſentiam ejuſdem, ſive illud primum, quod in corpore eſt, & a nullo alio interiori dimanat. Ajunt enim impenetrabilitatem partium eſſe percipiendam ante extenſionem, & eſſe id, unde hæc proficiſcatur. Id autem Humaniſſimus Vir, de univerſa Philoſophia optime meritus, totque doctiſſimis libris in Repubblica Litteraria celebris mihique amiciſſimus P. Fortunatus a Brixia hac ratione confici putat §. 14. Tom. I. Philoſophiæ Senſuum Mechanicæ editæ typis Joannis Mariæ Rizzardi an. 1745. Extenſum eſt id, quod habet partes extra partes; partes autem extra partes eſſe non queunt, niſi ſint impenetrabiles. Si enim penetrarentur, aliæ extra alias non forent. Igitur impenetrabilitas partium eſt ante extenſionem intelligenda, & ejuſdem ſufficientem rationem complectitur.

11. Verum ex iis, quæ ſæpe jam diſſeruimus & præſertim §. 19. liquet prorſus eſſe falſum aſſumtum, quo hæc ratio innititur. Nam impenetrabilitas eſt relatio inter plures ſubſtantias parteſque reipſa inter ipſas ſejunctas, quarum aliæ in aliis eſſe nequeant. Jam vero in continuo extenſo partes ut partes diſtinctæ non ſunt §. 19. Ergo nec impenetrabiles dici queunt. Ex quo tamen non ſequitur eas eſſe penetrabiles, quia hoc quoque partium diſtinctionem requirit; quam in rem vide quæ diſſeruimus de eo, quod partes in continuo non ſe contingant §. 50. num. 3. Illa vero extenſi definitio imaginaria eſt, & ad realem reducitur, ſi omne extenſum continuum quantumvis exiguum pluribus extenſis continuis, æqualibus & inter ſe diſcretis, quæ a Deo in infinitum minora creari poſſunt, eſſe poſſe æquale percipiamus §. 64. num. 2. & §. 21. num. 9.

12. Qui ergo definis extenſionem, ſi eam per partes extra ſe poſitas vera definitione explicari non poſſe putas? Si id ad vivum reſecare vellem, a propoſita re nimium aberrarem. Ne longius faciam, quam par eſt, duo tantum adverto alterum eſſentiæ intrinſecam rationem a priori inveniri non poſſe, atque idcirco in irritum conari, qui eam inveſtigant. Cum enim eſſentia ſit primum omnium eorum, quæ in ſubſtantia ſunt, ſuam originem alteri rei, quæ interior ſit, acceptam ferre non poteſt, §. 22. num. 65. Solum in ſubſtantia, a qua creata eſt, habere

poteſt

poteſt exteriorem rationem, cur talis ſit. Ita qui intrinſecam rationem, cur homo conſtet ex mente & corpore, inveſtigaret, ſpe aliquid inveniendi fruſtraretur, cum mens & corpus ſint illa prima, quæ hominem componunt, & ad ſummum reſponderi poſſit, ideo hominem ex mente & corpore eſſe coalitum, quia Deus ſic illum compegit: alterum vero aliquas ex ideis, quæ per ſenſus in animam illabuntur, eſſe primitivas quodammodo & in alias, ex quibus tamquam ex partibus coaleſcant, irreſolubiles. Ita eſt notio coloris rubri, quem intimo ſenſu ab aliis coloribus probe diſtinguo, nec tamen poſſum tales ipſius notas diſtinguere, quæ mihi diſtinctam ipſius definitionem exhibeant. His poſitis ajo ex primo conſequi extenſionis rationem intrinſecam a priori in partibus quæri non poſſe, propterea-quod ex partibus inextenſis extenſum componi non poteſt, ut citatis locis probavi, ſed extenſionem eſſe habendam pro prima rei extenſæ eſſentia, quæ ſolum habere poteſt rationem extrinſecam, quia ſcilicet talis a Deo creata eſt: & ideo neque talem ipſius definitionem tradi poſſe, quæ illius afferat interiorem rationem: ex ſecundo autem cum per ſenſus oculorum & tactus in animam illapſa ſit ejuſdem idea, eam intimo ſenſu cognoſci & ab iis, quæ talia non ſunt, ſecerni, tametſi ejuſdem notas, quæ a priori illam conſtituant, non internoſcam. Poſtquam vero in hanc ejuſdem cognitionem veni, poſſum in cognitionem venire etiam partium, quæ in ipſa ſunt ſolum potentia, quatenus ob allatas rationes intelligo quamlibet vel minimam ſubſtantiam extenſam eſſe poſſe æqualem multis aliis re ipſa diſtinctis, quæ in infinitum minora a Deo creari poſſunt. Sed de his ſatis; præſertim cum ex profeſſo hunc locum expenderim §. 21. num. 10. & ſequen. quem, ſi placet, conſule.

12. Non valde immoror in iis ſolvendis, quæ contra noſtram ſententiam elici poſſunt ex eo, quod auctores alii aliis in rebus primariam corporis eſſentiam conſtituunt. Nam pleræque ex hiſce opinionibus ita aperte incurrunt in ea principia, quæ pro internoſcenda eſſentia ab attributis §. 22. concluſimus, ut neceſſe non ſit longum facere in iis diluendis. Sic peccant illæ ſententiæ, quæ aut in diviſibilitate aut in exigentia extenſionis, vel impenetrabilitatis corporis eſſentiam conſtituunt; in nulla enim poſſibilitate rei, quæ ſaltem per miraculum a ſubſtantia abeſſe poteſt, poſſe reponi primariam, de qua hic agimus, corporis eſſentiam jam planum fecimus §. 22. num. 54. & 59. Quamobrem

ne in re non neceſſaria moleſtum ſuſcipiamus laborem, hæc miſſa facimus.

13. Plus momenti eſt in iis difficultatibus, quas adverſus extenſionem congerit Muſſchenbroechius Tom. I. citati libri *Eſſai de Phyſiq.* quæque in eo præſertim poſita ſunt, quod impenetrabilitas, vis attractrix, vis inertiæ, vis gravitatis & alia ex dicta extenſione nequaquam effici poſſunt, quemadmodum concludi poſſe deberent, ſi extenſio ad primariam corporis eſſentiam pertineret. Sed de his mihi integrum ſervo alium in locum, & præſertim ad §. 201. quo rem hanc ita perſpicuam ſpero me eſſe facturum, ut nova quædam lux ad totam corporis naturam illuſtrandam acceſſura eſſe videatur. Hic unam Muſſchenbroechii rationem ipſi cum aliis communem examinandam ſuſcipio, idque exſequar ſequenti §.

§. 114. Propoſitio

Hanc enim extenſionem corpori cum vacuo communem eſſe Peripatetici & Nevvtoniani, quos inter mox laudatus Muſſchenbroechius, putant. Sed eos falli jam oſtendimus §. 9. quo perſpicuum factum eſt vacuum eſſe non poſſe niſi potentiam recipiendi extenſa; hanc autem potentiam alibi reperiri non poſſe, quam in Deo; Deum vero & quidquid in eo eſt omni extenſione carere. Sed quia præter difficultates ibi propoſitas atque dilutas ſunt etiam aliæ, quæ negotium faceſſere queunt, hunc locum paucis retractabo. Primo enim ſic contradici poteſt ab aliquibus. Si extenſio negativa vacui ante mundi creationem non erat, tunc Deus non fuiſſet immenſus, ſcilicet totus in toto loco & totus in qualibet loci parte. Ubi enim nulla extenſio eſt, ibi nullus ſit locus oportet, in quo Deus reperiatur. Quod etiam objici poteſt de mundo finito, extra quem aliud ſit nihil. Hic enim nullibi reperietur, ſi vacuum, in quo eſt, & vacuum, a quo circumſcribitur, extenſa non ſint.

2. Deinde hæc alia ad ſpeciem efficax ratio torqueri poteſt adverſus noſtram ſententiam. Deus profecto totum mundum omniaque illius corpora intra hujus cubiculi anguſtum ſpatium compellere non poteſt, ita ut & ſuam quæque extenſionem teneant, & aliud extra aliud exſiſtat. Certe non aliam ob cauſſam, niſi quia hoc extenſum ſpatium nimium anguſtum eſt, quam ut tot extenſa corpora capiat. Ergo ſi ante mundi creationem nullum neque anguſtum ſit ſpatium extenſum, multo minus inveniet ubi corpora ponat. Si enim ubi licet anguſtum, tamen

tamen aliquod ſpatium eſt , omnia corpora mundi locare non poteſt , ubi nullum eſt ſpatium , quomodo ponet ?

3. Tandem hoc etiam aliud objici quit. Si vacuum extenſum non foret , nullus foret & eſſe poſſet in vacuo motus ; ſiquidem corpus locum extenſum motu percurrat , & gradatim ab alia ad aliam loci partem transferatur neceſſe eſt ; ubi autem nulla eſt extenſio , nec ullum extenſum locum invenias. Vis autem in vacuo , in quo nihil ei reſiſtit , ciere & movere corpus poteſt multo facilius , quam in pleno , ubi interjectum fluidum corpori pulſo obnititur. Quare corpus in vacuo ſimul moveretur , & non ; illud , quia foret percitum vi , cui nihil renititur ; hoc , quia locus extenſus non eſſet , cujus partes aliam poſt aliam tranſiret. Ex his autem duobus alterum cum altero pugnat ; igitur cum primum veritati conſonum ſit , corpus vi percitum in vacuo moveri , ſecundum , ideſt vacuum extenſione carere eſſe falſum concluditur .

4. Hæc ſunt , quæ difficultatem facere poſſunt , petita ut in ſimili materie §. 32. num. 2. adverti , non tantum a natura rerum , de quibus diſſeritur , quantum a poteſtate vocum , quibus natura explicatur. Quid enim , ut a primo ordiar , rationi magis congruenter dicitur, quam affirmare Deum ante creationem extenſi nulli extenſo præſentem fuiſſe , & inde efficere nec totum in toto loco , nec totum in qualibet loci extenſi parte exſtitiſſe. In eo enim , quod minime eſt , nulla ratione quis eſſe poteſt. Ubi ergo , inquies , Deus erat ? In ſemetipſo. Num Deum , a quo & in quo omnia ſunt , cogimur ponere in alio , perinde ac ſi non foret a ſe , ſed ab alio oriretur? At inde ſequitur non fuiſſe ſemper immenſum. Si rationem habeas exterioris relationis ſubſtantiæ Divinæ ad extenſum creatum , equidem aſſentior ; quia cum extenſum ab æterno non fuerit , nec potuit eſſe eſſentiæ Divinæ ad ipſum relatio. Neque ex hoc aliquid effici poteſt , quod Supremum Numen dedeceat; quemadmodum nec ex eo , quod Deus ab æterno creatoris relationem non habuerit , aliquid ſequitur cum ejus infinitate & immutabilitate non congruens. Si vero ipſam per ſe immenſitatem , quatenus in Deo eſt , & abſolute conſideres , ex noſtra ſententia confici nego Deum ab æterno non habuiſſe id omne , quod eſt abſoluti & veri entis in immenſitate ; uti ex eo , quod extrinſecus & relative creator in tempore fuerit , aliqua vera perfectione ab æterno caruiſſe non ſequitur.

5. Ut vero ſecundæ difficultati ſatisfiat, primum memoria repetenda ſunt, quæ de cognitione & menſura continui §. 41. & 42. diſſeruimus: quantitatem alicujus continui abſolute cognoſci non poſſe, ſed relative tantummodo, quantum aliud alio ſit majus, vel minus; & aliquod certum ac determinatum continuum tamquam unitatem ſumi debere, ad quam cetera omnia exigantur. Quorum renovata memoria; dico cum Deus primum aliquod corpus extenſum creat, tum locum interiorem, qui dicitur ſpatium, tum exteriorem creari, & quidem omnino determinatum. Nam quidquid creatur, ſingulare eſt, quidquid vero ſingulare eſt, omnia determinata habet. Quare illud corpus ex infinitis, quæ poſſunt eſſe, denſitatibus aliquam determinatam habebit; ex infinitis magnitudinibus pariter aliquam certam, ex infinitis figuris ſimiliter aliquam fixam & ratam, ex. gr. cubicam. Ex quo fit, ut etiam locus tum intimus, qui a ſubſtantia extenſa non diſtinguitur, tum etiam exterior, qui ab extima ſuperficie ſubſtantiæ extenſæ §. 31. certus ac determinatus ſit. Itaque ſumantur tum hoc corpus & ſpatium ſive locus intimus pro unitate, ad quam omnia alia corpora ſive ſpatia & loca interiora exigantur, & ſuperficies hujus corporis, ſive locus exterior, pro unitate, quicum aliorum corporum ſuperficies & loca exteriora comparentur. Quod recte fieri non poteſt, niſi hæc corpora & ideo ſuperficies ponantur ejuſdem ſpiſſitudinis, ac primum illud poſitum fuit. Unitas enim propria omnino ſimilis eſſe debet iis, quæ metitur, ut ſola ab iiſdem quantitate diſcrepare intelligamus. Quamobrem aliorum corporum ejuſdem denſitatis ſuperficies & locus externus ſuperficiei & loco externo dicti corporis æquales eſſe non poſſunt, niſi congruant, & congruere nequeunt, niſi ſint æquales. Et ſi non congruunt, erunt illis majores, aut minores, & ſi majores, aut minores ponantur, minime congruunt. Quod pariter conveniet in ſpatium ſolidum & intimum locum. Nam congruere, ſi invicem compenetrata intelligantur, & eſſe æqualia idem eſt, & e contrario non congruere, & eſſe inæqualia, & contra pariter idem. His conſtitutis ſi cubiculum figuræ cubicæ omnino vacuum ponamus, locum exteriorem, quo ambiendum eſt corpus intra illud ponendum applicandumque parietibus, qui ſunt determinatæ figuræ, magnitudinis ac denſitatis, iiſdem parietibus jam determina-

minatum videbimus. Quare vel ad illos parietes admovendum eſt corpus jam definitæ denſitatis, v. g. illius, quam parietes habent, vel adhuc non definitæ. Si definitæ, jam ſuperficies & figura hujus corporis ſuperficie & figura parietum, cum quibus congruere debet, determinabitur. Definitis autem cujuſdam corporis denſitate, ſuperficie & figura etiam magnitudo definiatur neceſſe eſt. Ex quo ſequitur non quodlibet magnum corpus definitæ denſitatis ad illos parietes poſſe applicari; idque propterea quod certam interioris denſitatis & exteriorum limitum quantitatem certæ magnitudinis quantitas neceſſario conſequitur. Sin vero corpus nullius adhuc definitæ ſpiſſitudinis intelligatur, ajo quodlibet vel magnum corpus ad illos parietes poſſe admoveri. Cum enim denſitas in infinitum alia major eſſe poſſit, §. 54., ego intelligere poſſum quamcumque vel maximam maſſam ad quamcumque vel minimam ſuperficiem poſſe applicari. Nam ſint duo cubi C & *c*, quorum denſitates ſint æquales, & latus cubi C ſit 10, cubi *c* ſit 1. Erit ſuperficies cubi C = 100, & cubi *c* = 1, item ſoliditas, & ideo, poſita æquali denſitate, maſſa cubi C = 1000, & maſſa cubi *c* = 1. Jam vero ſi ponatur alius cubus S, cujus pariter latus ſit 1, ſed denſitas particularum in eodem latere ſit 10. numerus particularum in latere cubi S erit 10, in tota ſuperficie erit 100, in toto cubo S erit 1000. Quare maſſa cubi S erit æqualis maſſæ cubi C.

6. Jam vero cum hujus mundi corpora ſint alicujus definitæ denſitatis, & eorum ſuperficies ſuperficiem interiorem cubiculi multis partibus ſuperent, mirum videri non debet, ſi hæ ad illam admotæ nullatenus congruere poſſunt, & ideo ſuperficiebus minime congruentibus nec omnia mundi corpora intra cubiculum compingi queunt. At priuſquam Deus hunc mundum moliretur, ex altera parte nullus erat extenſus nec interior nec exterior jam definitus locus, ad quæ neceſſe foret ſuperficies & loca exteriora corporum creandorum applicare; & ex altera cum ipſis corporibus convenientia loca, quæ ab iis minime diſtinguuntur, creari oportebat. Quid ergo mirum ſi cum Deus jam duo loca exteriora, ſcilicet ſuperficiem cubiculi & ſuperficies omnium corporum mundi creavit, conſequi non poſſit, ut ſimul eædem denſitates maneant, & major locus & ſuperficies cum minori loco & ſuperficie congruat; cum vero nullum adhuc locum & ſuperfi-

perficiem creavit, omnia hujus mundi corpora cum ſuis congruentibus locis & ſuperficiebus e nihilo ducat?

7. Urgebis tamen. Si intra cubiculi vacui parietes nullum vere extenſum ſpatium eſt, intra eoſdem creare poterit Deus ſpatium cuicumque vel maximo corpori, nedum mundo recipiendo accommodatum. Aſſentior, ſi nomine ſpatii extenſi intelligas maſſam tantæ denſitatis, ut licet ejus ſuperficies cum minima tantum ſuperficiei corporum mundi parte conveniat, nihilominus ejus ſoliditas & particularum gravium numerus ſoliditatem & numerum particularum totius mundi exæquet. Inficior autem, ſi nomine ſpatii extenſi velis aliquam extenſionem negativam, quæ corpus non ſit, cujuſque virtute fiat, ut omnia corpora mundi cum ſuis ſuperficiebus & cum ea denſitate, cujus definitum aliquem gradum habent, nullaque partium compenetratione facta extremis cubiculi interioribus lineamentis contineri queant. Nam ut toties dixi, & §. 9. late monſtravi, hujuſmodi vacuum extenſum non eſt, nec Divina Omnipotentia extenſum fieri poteſt.

8. Quo conſtituto reſtat, uti tertiam difficultatem ſolvamus. Quem ad finem quæro quid intelligas nomine motus, an illam actualem relationem ad rem exteriorem, qua ſcilicet corpus motum alias poſt alias ſuperficiei corporum circumambientium partes actu contingit, an vero ſolum id, quo fit proxime potens huic relationi, ſive his partibus aliam poſt aliam contingendis. Si primum, nullum eſſe in vacuo motum concedo; nec ſine cauſa: nam ubi nulla ſunt extenſa, quorum partes contingantur, corpus eaſdem aliam poſt aliam actu contingere & percurrere nequit. Sint enim ante neceſſe eſt, quam contingantur, & ad eas corpus actu referatur. Neque hoc pugnat cum eo, quod corpus in vacuo vim habere poteſt, cui nihil obſiſtit. Nam hæc vis otioſa non manet, quod corpus ſine vi ſolum habens remotam potentiam partes aliorum corporum gradatim contingendi, per eam vim fit ad id proxime potens, adeo ut ad eas re ipſa percurrendas aliud nihil deſit, niſi aliorum corporum ad corpus vi percitum admotio, §. 22. num. 57. quemadmodum lapis ſine calore ſolam habet remotam potentiam calefaciendæ manus, ſi ad lapidem applicetur; ſi vero corpuſculis igneis penetretur, & nulla ſit manus, quæ admoveatur, non quidem re ipſa ma-

num,

num, quæ non eſt, calefacit, ſed ipſe per ſe iis omnibus inſtructus eſt, quæ ad id proxime deſiderantur, & aliud non deeſt, niſi exterior manus ad lapidem applicatio. Quod ſi motus natura in hac proxima potentia ponatur, uti nos §. 26. poſuimus, cum per ſe, tum ex iis, quæ citato loco diſſeruimus, liquet motum etiam in infinito vacuo reperiri, nedum in illo, quod intra cubiculum parietibus ejuſdem quodammodo definitur, & in quo ſi corpus habeat vim aliquorſum, non quidem plures corporum partes, quæ non ſunt, alias poſt alias contingit, ſed valde proximam habet potentiam, qua diſcedit ab altero pariete, & ad alterum oppoſitum accedit.

9. Ceterum in hac re mihi diſtinguenda videtur mutatio interior corporis, quam vis ejuſdem efficit, a mutatione exteriori, quam habere percipitur, cum corpus vi percitum ad alia corpora refertur. Nam vis aliquam in ſubſtantia, in qua ineſt, mutationem ſtatus ante efficiat oportet, quam eadem ſubſtantia novam relationem externam acquirat. Nam ut nova relatio exſiſtat, in aliquo ſaltem ex iis, quæ referuntur, quidpiam mutetur & denuo accedat neceſſe eſt, propterea quod relativum aliud non eſt, niſi id, quod intrinſecus abſoluti ineſt, quatenus una cum alio percipitur. Jam vero contactus corporis A cum aliis contiguis eſt aliquid relativum ad aliquod exterius; ſiquidem amotis hiſce corporibus corpus A contingere deſinit, quin tamen aliquid abſoluti & interioris ab eo decedat, quod indicio eſt contactum eſſe aliquid relati ad rem exteriorem. Igitur ſucceſſio quoque contactuum, qualis in corpore moto intelligitur, relationis ad aliquod exterius naturam habet. Si ergo fiat hæc exterior contactuum mutatio, quin ejus ratio in aliis corporibus contineatur, eo quod quieta ponuntur, aliud non reſtat niſi, ut hæc ratio ſit in corpore A; quod ſi ita eſt, novum quidpiam in eo exſiſtere ponendum eſt, ſcilicet vim & interiorem mutationem ab illa profectam, quæ actualem mutationem relationis externæ inducit, ſi alia corpora contigua ſint; ſolam vero potentiam, ſi nullis corporibus circumambiatur. Sed de motu alias. Interim maneat quod mihi nunc propoſitum eſt, nihil hac ratione & aliis duabus, quas Adverſarii in nos contorſerunt, effici, quod extenſionem corpori cum inani & vacuo eſſe communem evincat.

§. 115.

§. 115. Propoſitio

Ex quo ſequitur extenſionem non ſolum ad eſſentiam corporum pertinere, verum & propriam eorumdem qualitatem haberi oportere. Utrum vero cum hac extenſa ſubſtantia quædam vis, ſive interius agendi Principium ita neceſſario cohæreat, ut nulla ratione neque Divina Omnipotentia poſſit avelli, quin totum corpus intereat, nec ne, nunc expendendum ſuſcipio. Magnus Leibnitius in *Specimine Dynamico pro admirandis naturæ legibus circa corporum vires & mutuas actiones detegendis, & ad ſuas cauſſas revocandis*, in Actis Erud. Lip. A. 1695. M. April. quo ſuam circa virium æſtimationem ſententiam ab Ab. Catalano aliiſque oppugnatam confirmavit, duo genera virium in corporibus agnoſcit, *primitivam, quæ in omni ſubſtantia corporea per ſe ineſt, & derivativam, quæ primitivæ velut limitatione per corporum inter ſe conflictum reſultans, varie exercetur*. Pluribus vero rationibus ſparſim docet aliquam vim primitivam corporibus tribui oportere, quæ ſit eſſentialis, & eorum naturam intime conſtituat. Quarum prima eſt, quod *agere eſt character ſubſtantiarum, extenſioque nihil aliud, quam jam præſuppoſitæ nitentis renitentiſque, ideſt reſiſtentis ſubſtantiæ continuationem, ſive diffuſionem dicit; tantum abeſt, ut ipſammet ſubſtantiam facere poſſit*. Alteram ducit ex corporum reſiſtentia, qua fit, ut aliud aliorum motui obſiſtat, quod fieri non poſſet, ſi corpora ſine ulla vi eſſe quirent, & quemadmodum Carteſius putat, prorſus indifferentia ad motum & ad quietem natura forent. Ex hac enim indifferentia conſequeretur, vel minimum corpus ſuam omnem vim cum vel maximo communicare, & alterum ab altero ſine ulla prioris retardatione moveri. Poſtquam vero narraſſet ſibi *adhuc juveni, & corporis naturam cum Democrito & hujus ea in re ſectatoribus Gaſſendo & Carteſio in ſola maſſa inerte tum conſtituenti* excidiſſe libellum *Hypotheſeos Phyſicæ, quo Theoriam motus pariter a ſyſtemate abſtractam, & ſyſtemati concretam* expoſuit, tertiam rationem ab eo ductam, quod ab extenſione omnia, quæ in corporibus ſunt, & præſertim æſtimatio virium non ſequitur, his exprimit verbis. *Sed poſtea omnia altius ſcrutatus vidi in quo conſiſteret ſyſtematica rerum explicatio, animadvertique hypotheſim illam priorem notionis corporeæ non eſſe completam, & cum aliis argumentis, tum hoc etiam ipſo comprobari, quod in corpore præter magnitudinem & impenetrabilitatem*

tem poni debeat aliquid, unde virium conſideratio oriatur, cujus leges metaphyſicas extenſionis legibus addendo, naſcantur ex ipſa regulæ motus, quas ſyſtematicas appellaram; nempe ut omnis mutatio fiat per gradus, & omnis actio ſit cum reactione, & nova vis non prodeat ſine detrimento prioris, adeoque ſemper abripiens retardetur ab abrepto, nec plus minuſve potentiæ in effectu, quam in cauſſa contineatur. Quæ lex cum non derivetur ex notione molis, neceſſe eſt conſequi eam ex alia re, quæ corporibus inſit, nempe ex ipſa vi, quæ ſcilicet eamdem ſemper quantitatem ſui tuetur, licet a diverſis corporibus exerceatur.

2. Hactenus Leibnitius, a cujus ſententia non multum diſcedit Muſſchenbroechius. Sic enim rationem inſtituit, *Eſſai de Phyſiq.* §. 16. num. 2. Quemadmodum omnia, quæ in triangulum & in circulum convenire Geometræ norunt, ex eorum jam perſpecta natura & eſſentia proficiſci intelligunt; ita ſi corporum eſſentia nos non lateret, quæcumque in corpora cadunt, ab eadem inferre poſſemus. Fac ergo hanc eſſentiam eſſe extenſionem. Quid tum? num ex ea colligere poteris impenetrabilitatem, vim inertiæ, potentiam motus, gravitatem, attractionem aliaſque hujuſmodi proprietates, quibus corpora prædita eſſe ſenſus omnes renuntiant? Nihil minus. Hæc enim inter, atque extenſionem nullam quis proportionem invenire poteſt. Quod etiam quadrat in eos, qui eſſentiam corporis ponunt in extenſa impenetrabilitate. Deinde ſi corporum natura nobis perſpecta foret, multa ex iis, quæ in hoc mundo contingere in corporum colliſione experientia docet, ante divinari & conjicere poſſemus, quam eadem uſuvenire ſenſus compertum facerent. Quemadmodum a natura jam cognita ſphæræ & aliorum ſolidorum multa mathematici certiſſime colligunt, antequam ullum capiant experimentum. At quotumquodque eorum, quæ accidunt, dum corpus aliud in aliud incurrit, ſine periculo erroris ex ſola natura corporum Philoſophi concludere potuerunt? Quamobrem natura corporum nos adhuc latere videtur. Ita fere Muſſchenbroechius, qui deinde ex his efficit quoddam cum Leibnitio actionum & paſſionum interius Principium in corporibus admitti oportere, quamvis a Leibnitio diſcedit in eo, quod ſe ignorare fatetur, cur illud Corporis Natura dicatur.

3. Nec ſine cauſſa; nam a Leibnitio & ab aliis non eæ ſunt allatæ rationes, quibus effici poſſit cum corporis natura & eſ-

& eſſentia vim aliquam ita neceſſario cohærere, ut ſubſtantia extenſa ſine ulla vi eſſe nequeat. Nam quod attinet ad primam Leibnitii rationem, affirmat is quidem proprium ſubſtantiæ caracterem eſſe actionem, ſive agendi vim, ſed nullis argumentis id docet. Quod autem ſine ratione proponitur, non ſine ratione vocari poteſt in dubium, cum alioquin res ipſa per ſe nota non ſit, cum eo, quod exſiſtit quidem per ſe, ſed perpetuo conſervante & creante Deo, aut cum illo, quod eſt in omnes partes extenſum, aliquod agendi principium neceſſario conglutinari.

4. Quod pertinet ad alias rationes, primo generatim animadverto ſolam extenſionem haud ſufficere ſingulis corporum phœnomenis explicandis, ſed quoddam agendi principium in conſortium aſciſci oportere. Verum quid ni hoc principium ſit tantum ea vis motrix, quam ſine corporum interitu decedere & accedere, ſine diminutione remitti & intendi videmus, atque idcirco corporibus jam conſtitutis accidere, & tamquam verum accidens in iiſdem a Deo creari conjiciamus? Eſt ne ab aliquo certo confectum aut poſſe a Deo generari ſolum ea, quæ conſtant per ſe, non vero, quæ in alio conſiſtant, ut hujus demonſtrationis virtute repudiare debeamus id, quod omnes ſenſus confirmant, aut hanc vim motricem, quæ a Leibnitio derivativa appellatur, ſine alia primitiva & eſſentiali nec poſſe conſiſtere, nec effectis naturæ explicandis eſſe idoneam?

5. Nam quod abſurdum ex ſententia Carteſii Leibnitius efficere conatur, id citato §. 201. ita refutabitur, ut in hac ratione a vi inertiæ petita, quam etiam D. Du Chaſtellet §. 142. *Inſtit. de Phyſiq.* T. I. efficaciter urget, nihil adverſus extenſionem tamquam corporis eſſentiam perſpicue monſtratum iri confidam.

6. De attractione vero, ut Muſſchenbroechii rationes expendam, utinam nobis tam beatis eſſe liceret, ut mutuam corporum attractionem ab eorum eſſentia fluere intelligeremus. Magna certe moleſtia liberaremur in inveſtigandis explicandiſque cauſſis, cur omnia corpora alterum ad alterum tendant, & ſolum in ſubducendis harum attractionum rationibus utiliorem operam poneremus. At quis hæc ſperare audeat? Interim attractiones habere poſſumus tamquam accidentales vires motrices, quibus fiat, ut corpora aliud ad aliud

pel-

Digitized by Google

pellantur, perinde ac ſi ſe invicem traherent. Quod efficiam in conſequentibus. Ut quid enim omni deſtituti ratione & idea, quæ inter ſubſtantiam extenſam, & vim neceſſitudinem monſtret, in ſubſtantiæ extenſæ natura & eſſentia fruſtra inveſtigemus originem eorum aut preſſionum, aut motuum, quibus corpora aut aliud cum alio cohæret, aut aliud ad aliud accedit, cum in promtu ſit accidentalis vis motrix, cujus etſi valde imperfectam, aliquam ſaltem notionem habemus?

7. Quare ſi hæc & alia ſimilia in eum finem Muſſchenbroechius attulit, ut nos perfecta & abſoluta eſſentiæ corporis cognitione carere monſtraret, non valde repugno. Sin vero ut oſtenderet, nos hoc ipſum latere, utrum extenſio ad corporis eſſentiam pertineat, homini aſſentiri non poſſum. Quæ etenim vis in hac differendi ratione eſſe poteſt? Extenſio corporis eſſentia non eſt, ſi ab eadem extenſione non oriuntur corporis accidentia; quaſi non conſtet cur accidentia actu ſint in ſubſtantia, rationem non ab eſſentia, ſed ab alia exteriori ſubſtantia peti oportere §. 22. num. 69. Huc vero recideret, qui ab eo, quod pura extenſio nihil attractionis habet, extenſionem non eſſe corporis eſſentiam deduceret. Quod ſi Muſſchenbroechius rem eo non revolvi contendit, ipſius erat ante conficere attractionem eſſe cum natura corporis neceſſario copulatam, & a vi motrice accidentali proficiſci non poſſe. Antequam vero id conficiat, interea ſenſuum judicio ſtare non veremur, & attractiones habere pro motibus & acceſſibus corporum, qui viribus accidentalibus accepti referantur.

8. Nec majus eſt momentum in altera concluſione. Si eſſentia corporis nobis perſpecta foret, leges motuum in corporum mundi colliſione ſine ulla experientia colligeremus. Nam ab homine quæro, an quia Geometræ norunt ſphæras eſſe in triplicata ratione diametrorum, & quia datis duabus ſphæris, quarum diametri perſpectæ ſint, concludere poſſunt, quot partibus altera ſuperat alteram, idcirco ſi in duabus ſint conglobatæ innumerabiles minimæ ſphæræ datæ diametri, quarum ſola congeries ſub oculos cadat, ſola ratione debeant ſummas ſoliditatum utriuſque multitudinis metiri, & quantum alia ſumma aliam ſuperet ſine experientia definire? Sane reſpondebit Geometram ſola ratione, data natura & proportione ſphærarum datæ diametri, eo pervenire non poſſe, quod ad id de-

id definiendum opus eſt etiam cognitione numeri ſphærarum in utroque loco; quorum numerorum una cum triplicata diametrorum ſubducta ratione ſummæ ſphærarum exſiſtent. Simile quid contingit in legibus colliſionis corporum. Mihi notum & exploratum eſt in extenſione poſitam eſſe eſſentiam corporis in genere, cujus nomine intelligenda ſunt ſingula illa extenſa, ſolida, dura, & ſine ullis poris indiviſibilia corpuſcula, quæ primitus a Deo creata ſunt; ergo ne ob hoc ſolum intelligere debeo quid contingere oporteat, quando ex his magnis corporibus, quæ in ſenſus incurrunt, quæque ex innumerabilibus corpuſculis primitivis multifariam coagmentatis componuntur, aliud in aliud incurrit? Annon antequam id norim, præter eſſentiam ſingulorum corpuſculorum, opus eſt tenere, quibus viribus cieantur, quo ſitu, quo ordine, qua textura, qua demum ratione contexta ſint? Negabit ne Muſſchenbroechius etiam in Problematibus Geometriæ, quo complicatiora ſunt, pluresque conditiones includunt, eo plura nota eſſe debere, quo totidem æquationes elici poſſint, antequam aliquid definiamus? Videat ergo ne, dum in problematibus Phyſicæ multo implicatioribus, quam Geometriæ, exigit, ut ex ſola corporis generatim eſſentia corporum ſpecialium collidentium leges ducantur, in re graviſſima, quales ſunt Methodi leges, offendat.

9. Quod ſi velit ab eſſentiæ cognitione illud ſaltem debere conſequi, ut non ſolum cujuslibet corpuſculi attributa, verum & leges motuum in eorumdem concurſu noſcamus, hoc in conſequentibus & præſertim citato §. 201., ut §. 113. num. 13. monui, præſtare conabimur, tametſi nulla nos lege teneri credamus, qui ex altera parte unum id dicimus, extenſionem ad corporis eſſentiam pertinere, ex altera leges colliſionis non ab eſſentia tantum, verum & a vi accidentali, cujus natura nos etiam corporis eſſentiam noſcentes latere poteſt, pendere affirmamus.

10. Sed Leibnitii cauſſam ſibi defendendam ſuſcipiens Domina Du Chaſtellet aliam pro viribus eſſentialibus affert rationem. Hæc enim ſcribit §. 139. citati libri. „ Si corporis eſſentia in ſola extenſione poſita eſt & ſi in partibus materiæ nihil eſt diſcriminis, quod alias ab aliis intrinſecus & re ipſa internoſcat, „ materia ſimilaris eſt, unaque ipſius pars, ut ipſi Carteſiani „ fatentur, ab aliis niſi poſitione non differt. Jam vero §. 21. „ vidimus per rationis ſufficientis principium non licere mate-

„ riam

„ riam eſſe ſimilarem, & partes alias ab aliis non diſcrepare.
„ Ita fit eſſentiam corporis in pura extenſione non poſſe conſi-
„ ſtere, quoniam ut principio ſatisfiat rationis ſufficientis,
„ neceſſe eſt interius aliquod inter partes intereſſe diſcrimen,
„ hocque diſcrimen ab eſſentia corporis & ab ipſius proprietati-
„ bus derivari. Proprietas vero materiæ, unde pendent hæ in-
„ teriores inter ejuſdem partes differentiæ, alia eſſe non poteſt,
„ quam interior vis, quæ eſt in univerſa materia, quæque cum in
„ infinitum varietur, realem inter omnes materiæ partes diffe-
„ rentiam conſtituit..... Ex quibus concludendum eſt vim eſſe
„ neceſſariam eſſentiæ materiæ non minus, quam eſt extenſio,
„ atque idcirco nullam in hac rerum univerſitate exſtare ma-
„ teriæ portionem ſine motu ac vi, propterea quod ex princi-
„ pio rationis ſufficientis nulla, quæ ab aliis omnibus diverſa
„ non ſit, reperitur „. Hactenus Cl. Mulier, quæ deinceps
plura diſſerit de vi inertiæ tamquam ad eſſentiam materiæ pertinente, & §. 147. tandem concludit. „ Hæc tria principia exten-
„ ſio, vis inertiæ, & vis motrix alia ab aliis non pendent, prop-
„ tereaquod ſunt corporis eſſentialia. Siquidem, ut jam monſtra-
„ tum eſt, eſſentialia a ſe invicem non proficiſcuntur, ſed ſolum
„ in una ſede ſimul conſiſtere poſſunt §. 37. Ita vis activa & vis
„ paſſiva ab extenſione non derivantur, hæque duæ vires alia ab
„ alia non proficiſcuntur, nec ab iiſdem extenſionis proprietas
„ originem ducit. Nam facile eſt intelligere vim motricem non
„ procedere nec ab extenſione nec ab inertiæ vi, quoniam neque fi-
„ gura, neque magnitudo, neque particularum conjunctio gi-
„ gnere poſſunt conatum ad motum, vim motricem, aut cer-
„ tum aliquem gradum velocitatis, quemadmodum probe nove-
„ runt Carteſiani. Neque vis inertiæ poteſt eſſe cauſſa vis motri-
„ cis, cui reſiſtit „.

11. Quibus ut ſatisfaciam, in anteceſſum adverto me nunc ſeponere locum illum §. 12. Inſtit. Phyſ. a Cl. Fœmina tractatum de omnium corporis elementorum diſſimilitudine, ne in re valde intricata & alibi ex profeſſo accurate expendenda nimium a propoſito aberrem. Quo animadverſo dico, ex duabus illis noſtris ſententiis nullas eſſe in vero continuo partes reipſa diſtinctas ut partes, §. 19. & aliud alio in infinitum denſius eſſe poſſe, §. 54. ſolutionem elici objectæ difficultatis. Nam ex altera ſequitur non eſſe quærendum diſcrimen inter unius corpuſculi partes, quæ revera tales non ſunt, ex altera vero poſſe omnia primiti-

va corpuſcula interiori eaque eſſentiali differentia alia ab aliis diſcrepare, quin ad diverſam vim eſſentialem, quæ in iiſdem ſit, confugiamus, propterea quod differre queunt illa primitiva denſitate, quæ ad ſubſtantialem corporum eſſentiam pertinere monſtrata eſt.

12. Ad id autem, quod additur de vi reſiſtentiæ, dico eam eſſe poſitam in vi, quæ ſit ejuſdem generis ac motrix, quæque motum generare conetur, idque §. 201. me demonſtraturum pollicitus ſum. Quare ſi vis motrix ad corporis eſſentiam non pertinet, neque vis reſiſtentiæ ad eamdem pertinere dicenda eſt. Quæ vero de poſſibili non autem neceſſaria extenſionis, vis motricis atque vis inertiæ copulatione ſubjunguntur, ſubolere videntur obſcuram illam atque confuſam eſſentiæ rerum Wolphii notionem ab illa adoptatam, in qua nullum ſit diſcrimen inter eſſentiam primariam & ſubſtantialem interque accidentalem & ſecundariam, neque inter neceſſitatem differentiarum antequam cum genere conjungantur, & poſtquam conjuncta fuerunt, diſtinguitur. Cum autem hæc diſcrimina in Philoſophiam eſſe inducenda §. 22. num. 7. planum fecerimus, conſequitur vim ad primitivam corporis eſſentiam pertinere dici non poſſe, niſi tam arcta illius cum extenſione neceſſitudo oſtendatur, ut poſteaquam aliud cum alio copulatum eſt, neutrum ſine totius corporis interitu poſſe ſeparari compertum fiat. Quod certe a Leibnitianis adhuc factum non eſt, nec facile fieri poterit ob eas rationes, quas paulo poſt ſubjungemus in eum finem, ut quoniam hic toti fuimus in refellendis aliorum rationibus, quæ pro viribus eſſentialibus allatæ fuerunt, ibi omnes vires eſſe accidentales propriis oſtendamus.

13. Quare ut concludam, liquere arbitror quod mihi maxime hic propoſitum eſt, nullis effici certis rationibus quamdam eſſentialem vim in corpore ſive in extenſa ſubſtantia reperiri, atque ideo nobis adhuc integrum eſſe conari, ut extenſa materie tamquam materia, & vi accidentali tamquam forma omnia, quæ in mundo ſint, fieri poſſe doceamus. Nam ea mihi ſententia ſedet, ſi iis, quæ experientia cognoſcimus, quales ſunt ſubſtantia extenſa & vis motrix accidentalis, quæ modo eſt, modo non eſt, aut ſaltem modo augetur, modo minuitur, omnia, quæ ſub ſenſus cadunt, explicare poſſimus, non eſſe ſine neceſſitate confugiendum ad id, quod nec ſenſus comprobant, nec ratio detegere poteſt; qualis eſt vis quædam ſubſtantiæ exten-

tenſæ eſſentialis; præſertim cum ratio proxima eorum, quæ ſenſus laceſſunt, non in ea parte eſſentiæ & in iis viribus, quæ ſenſus fugiunt, ponenda ſit, eo quod eſſentia & vires omnino latentes ſolum effectus omnino incognitos, quorum ratio quæri non poteſt, gignunt. Ex quo fit, ut tantum de corporum eſſentia deque illorum viribus nobis perſpectum ſit, quantum ad explicanda naturæ phænomena ſufficit, nec ad hunc finem opus habeamus iis viribus primitivis, quas Leibnitius induxit, ſed unica vi motrice, quæ in ſenſus incurrit, quamque ut accidens ad corpus jam conſtitutum accedere infra monſtrabimus. Quamquam & ipſe Leibnitius in citato ſpecimine conceptis verbis fateatur ſe in Naturæ phænomenis explicandis non magis uti ſuis viribus primigeniis, quam occultis qualitatibus Ariſtotelæorum, vi motrice locali ad hoc ſatis accommodata & idonea.

CAPUT SECUNDUM.

De Attributis Corporis.

§. 116. Propoſitio

EXpenſa, quantum in re obſcuriſſima fieri potuit, eſſentia corporis, ſequitur, ut quænam ex cognita eſſentia attributa conſequantur, videamus. Hoc autem loco non diſſeram de potentia diviſionis in infinitum, aut de ſoliditate continui extenſi, qualis eſt ſubſtantia corporea, proptereaquod de his ex profeſſo diſputavi in tractatu de quantitate §. 21. & 24. ubi in eo præſertim vires contendi, ut efficerem certis a Geometria petitis rationibus aliud nihil confici, quam in continuo extenſo medietates in infinitum poſſe deſignari, & ideo ſubſtantiam extenſam aliam alia minorem in infinitum poſſe in hac rerum univerſitate conſtare. Quamobrem his miſſis primo explicare aggrediamur illud corporis attributum, quod impenetrabilitas a Philoſophis appellatur. Cujus nomine vel intelligitur id, per quod in eodem corpuſculo omnino continuo partes extra partes virtute ponuntur, vel illud, quo fit, ut aliud ad alia applicatum corpuſculum ea penetrare, ſive cum illis locum eumdem occupare non poſſit. Si primum, impenetrabilitas non eſt proprie attributum corporis, ſed idem, atque illius eſſentia, ſive extenſio. Cum enim in extenſo continuo partes actu non ſint, ſed tantum potentia §. 19. quærere cur partes ſint extra partes,

& alia in alia non ſit nec eſſe queat, idem omnino eſt, ac inveſtigare rationem, cur continuum extenſum ſit extenſum, & cur non poſſit non eſſe extenſum. Quæ ratio ſi a te intrinſeca inveſtigetur, abſurde facis, cum eſſentia, quæ omnium prima eſt, nullam in aliis intrinſecis rationem habere queat §. 22. num. 65. ſin vero extrinſeca, aliud nihil reſponderi poteſt, niſi ſubſtantiam extenſam eſſe extenſam, quia Deus illam creavit. De quo vide etiam quæ diſſeruimus §§. 19. 20. & 21. num. 10.

2. Sin vero alterum, ajo me in ea eſſe ſententia, quæ impenetrabilitatis originem non ab extenſione repetit ſed ab aliqua vi repellente, quæ in ſubſtantia extenſa tamquam accidens a Deo creata ſit. Id quod citato §. 201. me cuilibet eſſe probaturum confido.

§. 117. Propoſitio

Jam vero perſequamur alia corporis attributa, in quorum numero ego cenſeo quoque figuram, ſive extimum extenſi limitem, tametſi Philoſophi vulgo eam inter accidentia, ſive modos corporum numerent. Verum eos in fraudem induxerunt communia experimenta, quibus compertum ſit figuras corporum, quæ ſub ſenſus cadunt, in dies variari, quamvis ſubſtantia permaneat. In hoc enim negotio figura uniuſcujuſque corpuſculi omnino continui & primum a Deo creati multum internoſcenda eſt ab ea figura, quæ reſidet in libramento congeriei plurium corpuſculorum, ex quibus compactis majora corpora & ſenſus commoventia coagmentantur. Illa enim, quæ dici poteſt primitiva, pendet ab extenſione unius tantum corpuſculi, quod cum extenſum ſit, aliquem etiam limitem habere debet. Hæc autem, quæ derivativa, exoritur ex figuris plurium corpuſculorum ratione habita ſitus, quo aliud juxta aliud collocantur; qui ſitus cum per motum variari poſſit, mirum non eſt, ſi exterior corporum ſenſibilium figura mutetur, quin tamen aliquam mutationem ſubeat, aut ſubire poſſit ea, qua ſingula corpuſcula donata ſunt. Quamvis enim antequam corpuſcula omnino continua exſiſtant, cujuſcumque figuræ eſſe poſſint perinde ac genera, quæ cum qualibet ex differentiis copulari queunt; tamen ut ſemel cum hac, aut illa figura procreata ſunt, eam amittere & aliam acquirere nequeunt. Hæc enim mutatio fieri nequit, niſi per motum, quo ſingulæ corpuſculi partes alternis ſitum varient. Hæc autem variatio ſitus particularum eſſe non quit in eo corpuſculo, quod nullas habet partes actu diſtinctas §. 19.

quod

Digitized by Google

quod motum inteſtinum habere non poteſt, quod adeo ſolidum eſt, ut nullam cujuſcumque generis compreſſionem pati queat §. 23. Ergo extenſione corpuſculi nullum motum inteſtinum nec ullam interiorem mutationem ſubeunte, limes extenſi, qualis eſt figura, idem permaneat neceſſe eſt. Igitur inter corporis attributa, aut ſi mavis, inter modos quidem ſed neceſſarios & immutabiles numeranda eſt.

2. Hac autem figura carere non poteſt neque infinitum corpus extenſum, ſi datur, aut dari poteſt: nam ut oſtendi §. 88. & ſequentibus, ex illa hypotheſi, quod extenſa in infinitum producta ſint, ſequitur nihilominus ſuos habere extrinſecos terminos, quamvis inter eadem infiniti numero palmi interponantur, & infinitum aliud alio in infinitum majus conſtare poſſe, quin unquam ad maximum omnium infinitorum perveniri queat. Ex quo conficitur quodlibet infinitum extenſum iis terminis circumſcribi, quibus in alio infinito majori contineatur. Quamobrem figura cuilibet extenſo continuo neceſſaria eſt, & poſtquam ſemel in creatione definita fuit, amplius variari non poteſt. Quo conſtituto patet, quid reſponderi debeat ad illam Dominæ Du Chaſtellet contra vacuum ductam rationem ex eo, quod in vacuo nihil eſſet, quod figuram corporis definiret §. 113. num. 2. Conſequitur enim ex dictis rationem ejus, quod ab eſſentia profluit, cujuſmodi eſt figura, extrinſecus non eſſe petendam §. 22. num. 7.

§. 118. Propoſitio

Reſtat ultimo loco conſideranda mobilitas corporis, ſive pura & remota motus poſſibilitas, quam ab extenſione pariter oriri puto. Cum enim extenſum aliud alio majus in infinitum eſſe poſſit, & ideo quod minus eſt, cum omnibus cæſuræ majoris corporis partibus ſimul congruere nequeat, hinc intelligitur, cur modo cum his ſuperficiei partibus, modo cum aliis convenire poſſit, ſive alias alio tempore contingere & ad alias alio tempore referri. Quod aliud non eſt niſi corpus poſſe moveri §. 113. Dixi autem, pura & remota; nam cum proxima pendeat a vi motrice, quæ corporibus accidit, in numero accidentium collocanda eſt.

CAPUT TERTIUM.

De Accidentibus & Modis Corporis in genere.

§. 119. Propoſitio

SEd jam ad accidentia & modos corporum veniendum eſt, inter quæ motum numerari oportere nemo Philoſophus ambigit; proptereaquod ſenſuum experientia compertum facit corpora aliquando moveri, aliquando conquieſcere, ut nec motum nec quietem cum natura corporis neceſſario copulari intelligamus. Præter vero hunc motum ajo in corporibus eſſe aliquid aliud, quod motus ſit cauſſa proxima, quodque dicitur vis, idque oſtendendum ſuſcipio adverſus Carteſianos, qui præter motum nihil aliud in corporibus eſſe volunt, quod ejuſdem ſit cauſſa effectrix; eumque proxime a Deo gigni concludunt. Quamquam autem §. 26. & ſequen. multa jam conſtituta ſint, quibus hæc quæſtio definiatur; nihilotamenminus hoc loco retractanda eſt, quod in univerſa propemodum Phyſica multum ſit in ea momenti.

2. Qua in re primum ajo in motu corporis, quod aliis circumambitur, eſſe aliquam relationem ad rem exteriorem, ejuſque relationis perpetuam mutationem. Nam corpus aliis circumdatum dum movetur, aliis ſemper atque aliis corporum circumfuſorum partibus reſpondet, ſive novas ſemper partes contingit. Hic autem contactus eſt relatio; ſiquidem illud eſt relativæ naturæ, quod non cognoſcitur in re, cum ipſa per ſe conſideratur, ſed quatenus ad aliam diſtinctam refertur; contactus autem cognoſcitur in corpore contingente, quatenus cum alio corpore comparatur. Igitur contactus & ideo contactuum mutatio relationem ad rem exteriorem includent. Præterquamquod ſi dum corpus movetur in pleno, omnia circumjecta corpora de medio tollantur, nihil veræ interioris mutationis in corpore moto perimitur §. 114. num. 4. & tamen illa actualis relatio mutationis contactuum evaneſcit. Quod argumento eſt mutationem contactuum eſſe aliquod relativum, utpote quæ tolli poteſt ſine intrinſeca mutatione rei.

3. Deinde hoc aliud in anteceſſum ſtatuo, relationem ſubſtantiarum mutari non poſſe, niſi in aliqua ex ſubſtantiis, quæ

quæ invicem referuntur, aliquid abſoluti & ab ipſa relatione diſtincti mutetur. Cum enim relatio ſit ordo illius, quod in una ſubſtantia abſoluti eſt, ad illud, quod in aliis pariter eſt, his abſolutis iiſdem omnino manentibus ordines etiam illarum variari non poſſe compertum fit. Quod declaratur relationibus, quæ inter quantitates exſiſtunt. Nam ſi in duabus lineis, quarum altera ſit duabus partibus altera major, nihil, quod in alterutra eſt, mutetur, quis in locum rationis duplæ aliam ſuccedere poteſt imaginari? Dices relationem quidem inter duas ſubſtantias mutari non poſſe, quin aliquid, quod in alterutra ſit, cuidam mutationi fiat obnoxium; ſed hoc, quod variatur, eſſe poſſe relationem aliam inter plures, exempli cauſſa duas ejuſdem ſubſtantiæ partes, ideoque non recte concludi mutationem in aliquo non ſolum interno, verum & abſoluto conſiſtere. Equidem aſſentior, quia plura exſiſtunt genera relativorum, ideſt alia 1' gradus, alia 2', alia 3', ut alias docui §. 22. num. 44. & illuſtrari poteſt hoc exemplo Matheſeos. Sint duæ quantitates A & B, relativum 1' gradus eſt ratio ex. gr. dupla, quæ intercedit inter ipſas. Si deinde ponantur aliæ duæ, ideſt A, B, C, D, rationem inter priores poſſum conferre cum ratione, quæ inter tertiam & quartam intereſt, & videre utrum eadem ſit, nec ne, & hoc pacto relativum 2' gradus exſiſtet. Tum his quatuor A ² B, C ⁴ D cum ſuis exponentibus aliæ quatuor pariter cum ſuis ſubſcribi queunt E ⁵ F, G ¹⁰ H, quo facto ſi hos quatuor exponentes inter ſe comparemus, ac primum 2 ad ſecundum 4 ita ſe habere, uti tertium 5 ad quartum 10 comperiamus, relativum tertii gradus exſiſtet: itaque procedere poſſumus in infinitum. Aſſentior, inquam, his omnibus; verum ajo nec ipſam inter partes unius ſubſtantiæ relationem poſſe mutari, niſi vel proxime, vel remote varietur aliquod abſolutum, ſive id, quod non eſt relatio inter duas partes. Eadem namque ratio valet in relationem, quæ inter partes ſubſtantiæ intercedit. Sic in iis octo quantitatibus relativum tertii gradus inter exponentes 2 & 4, 5 & 10 variari nequit, niſi aliud fiat relativum 2', ſcilicet duarum rationum collatio; pariter relativum ſecundi aliter eſſe non poteſt, niſi relativum 1' ideſt aut ratio inter A & B, aut inter C & D mutetur. Hoc autem relativum primi, ſive ratio inter quantitates A & B alio modo eſſe non quit, niſi ipſæmet abſolutæ quanti-

tates A & B, ſive alterutra earum mutationem aliquam ſubeat. Igitur ut relativum tertii gradus inter exponentes octo quantitatum in aliud convertat, in aliqua ex quantitatibus abſolutis mutationem, quæ non ſit pura mutatio rationis inter unam quantitatem & aliam, fieri neceſſe eſt.

4. Urgebis tamen; qui fieri poteſt, ut relationes in aliud convertere nequeant, quin aliquod abſolutum mutetur, cum nihil ex iis, quæ mutari poſſunt, ſit vere abſolutum, ſed relationem profluxus a Deo creante & conſervante neceſſario contineat? Commode cadit, ut in hanc difficultatem inciderit diſputatio; ejus enim difficultatis ſolutio multas in partes valebit. Itaque ex iis, quæ a Deo proficiſcuntur, alia ſunt, quæ primum a Deo gignuntur, & ipſa per ſe proxime creantur, uti ſubſtantiæ; alia vero, quæ tantum remote a Deo ſunt, quod ex ipſis rebus, quæ a Deo conditæ fuerunt, proxime exſiſtunt, cujuſmodi ſunt relationes inter res a ſummo Creatore profectas. Non enim Deus ipſam per ſe ſimilitudinem facere poteſt, niſi ipſas res ſimiles ponat. Quod vero attinet ad priora, & ipſa quidem ſunt neceſſario relativa, ſed ſolum quatenus ad Deum, a quo ſunt, tamquam ad cauſſam effectricem & conſervantem referuntur; non autem ſunt puræ relationes inter unam rem creatam & alias. Porro ex his ſequitur relationes inter plura creata ipſas per ſe proxime mutari non poſſe; quod enim ipſum per ſe gigni non poteſt, neque ſubire quit mutationem, qua res interit, ideſt gigni ceſſat, & alia denuo fit. Reſtat igitur ut ſolum remote variari poſſint, ideſt mutatione eorum, quæ primitus a Deo condita ſunt, quæque cum proxime a Deo creentur, etiam ceſſatione actionis creantis Dei ipſa per ſe proxime corrumpi poſſunt, & per aliam actionem in alia mutari. Ex quo concluditur cum relativum mutari poſſe ſine abſoluti mutatione negamus, id eatenus intelligi oportere, quatenus id, quod relativum inter plura creata ſignificat, in aliud convertere non poteſt, niſi variatio fiat in eo, quod neceſſario ſolum habet relationem profluxus a Deo creatore & conſervatore, quodque proxime & primario a Deo creatur & conſervatur.

5. His vero certa vis motricis alte in rerum natura latentis veſtigia deteximus. Cum enim ex altera parte oſtenderimus contactum corporis cum alio eſſe corporis alterius ad alterum relationem, & ex altera nullam relationem inter duas res mu-

mutari poſſe ſine variatione abſoluti & ejus, quod proxime a Deo creatur, planum fecerimus, concluditur mutationem relationis contactuum fieri nequire, niſi in corporibus mutetur aliquod abſolutum, ab hac relatione diſtinctum, quod a Deo proxime creetur, & mutationis hujus relationis contactuum ſit proxima ratio, fundamentum & cauſſa effectrix. Hoc autem donatur nomine vis, ſive continui conatus ad motum.

6. Ex quo etiam ſequitur vim hujuſmodi jam generatam totam eſſe in quolibet ſpatii puncto. Hujus enim vis, quæ eſt proxima ratio & cauſſa mutationis loci & ſpatii, in pura mutatione ſpatii & contactuum ſicuti motus conſiſtere nequit; tum quia mutatio ſpatii mutationis ſpatii cauſſa eſſe non poteſt, tum quia mutatio ſpatii ipſa per ſe, ut oſtendimus, gigni non quit. Quare ſi vis non eſt mutatio ratione habita ſpatii, ea in omnibus ſpatii punctis permanens & integra ſit neceſſe eſt.

7. Quibus ita evidenter concluſis nec ipſoſmet Carteſianos, qui nihil in corporibus præter motum agnoſcunt, arbitror eſſe refragaturos. Hinc enim elicient, quam infirma ſint uſi ratione in efficiendo poſſe corpus moveri ſine ulla interiori vi; cum ideo corpus quieſcere, quia Deus illud in eodem loco conſervat, ſive creare pergit; ideo moveri, quod in diverſis gradatim ac indeſinenter locis recreat, ſtatuerunt. Nam cum relationes ipſæ per ſe gigni non poſſint, ſola Dei voluntas corpus in diverſis locis conſervare non poteſt, niſi quidpiam in eodem ponat, quod relationem conſervationis ad diverſa loca exigat. Nec ab aliquo Carteſiano dicatur, quemadmodum quo Deus conſervet corpus in eodem loco, opus non eſt, ut aliquid in corpore præter ſubſtantiam extenſam efficiat, ita quo in pluribus locis conſervet, non oportere, ut quidpiam a ſubſtantia diſtinctum ponat. Siquidem magnum diſcrimen eſt inter unum & plura loca. Cum enim corpus extenſione carere non poſſit, ſi aliis corporibus circumdatur, uni cuidam extremitati & libramento ambientium corporum reſpondere, & ideo eſſe in uno loco, & relationem ad unum locum habere neceſſarium eſt. Quod vero partim ex hypotheſi corporum circumpoſitorum, partim ex natura & eſſentia corporis conſequitur, id aliam cauſſam præter conſervationem hypotheſis & naturæ corporis, ſcilicet tum corporis circumſcripti, tum corporum circumſcribentium habere non debet;

Digitized by Google

debet; præſertim cum corpus uni corporum aliorum ſuperficiei reſpondere aliud non ſit niſi conſervatio relationis in eodem ſtatu. At gradatim & continenter ab alia ad aliam corporum cæſuram tranſire, eſt relationis mutatio, cujus rationem corporis extenſio non continet. Mirum igitur eſſe non debet, ſi ad mutationem hujus relationis & conſervationis in pluribus locis præter creationem conſervationemque extenſæ ſubſtantiæ, cujuſdam alius, quod dicitur vis, creatio & conſervatio deſideretur. Id quod etiam hac ratione declaratur. Quemadmodum quia recta linea unica eſt, curvæ autem infinitæ, corpus unica vi percitum rectam peragrare concluditur a Recentioribus, non autem curvam, ad quam ex infinitis ſeligendam quædam alia vis accedat opus eſt, ita ex eo, quod locus, quem quies poſtulat, unus eſt, quæ vero exigit motus, plura ſunt, & præterea motus per innumerabiles rectas eſſe poteſt, bene conficitur præter ſubſtantiæ corporeæ conſervationem aliquo alio in rebus opus eſſe, quod ſit motus principium, quove intelligatur, cur potius per hanc lineam, quam per hanc aliam, cur potius hac velocitate quam alia moveatur. Hoc autem appellatur vis. Sed hac de re alibi enucleatius diſputabimus. Quidquod ſi Deus ambientia corpora in nihilum redigat, permanere poteſt id, quo corpus ſit proxime capax, quantum in ipſo eſt, reſpondendi diverſis loci, ſive extimi corticis corporum partibus tametſi nullus tunc ſit locus ipſa Carteſianorum ſententia, nullaque reipſa ad plura loca relatio habeatur? §. 9. Quomodo ergo poteſt illud efficere & conſervare, ſi in corporum motu aliud non ſit, niſi mera ad plures extremitatis corporum alicujus partes relatio? Scio Carteſianos putare ſe hoc ultimo non urgeri, quod vacuum, & ideo motus in vacuo poſſibilitatem negant. At ſi ſuas rationes melius ſubduxerint, & argumenta, quibus cum a me §. 8. & ſeq. tum vero ab aliis cujuſcumque ſectæ Philoſophis id oſtenſum eſt, animo nulla præjudicata opinione occupato ſecum expenderint, eos ſententia deſtituros ſpero. Primo enim mecum §. 13. animadverterunt, quæ una ratio eos ad vacuum e rerum poſſibilium numero expungendum, ne dicam ab hac univerſitate eliminandum potiſſimum impulit, in ea nihil eſſe momenti. Timebant enim Carteſii diſcipuli ne, ſi probarent inane, diſcedere cogerentur ab ea ſententia, quæ ponit corporis naturam in extenſione, pro qua tamquam

pro aris & focis ſibi depugnandum eſſe ſtatuerunt. Tota vero timoris cauſſa erat in eo, quod ex inani ſpatium vere extenſum ſine ullo corpore cum aliis Philoſophis conſequi arbitrabantur. Sed ex hac parte nihil eſſe timendum tum citato loco, tum §. 9. conficitur iis rationibus, quibus inani nullam omnino extenſionem actualem tribui poſſe luculenter meo quidem judicio docui. Quamobrem non ſine magna ratione credere poſſunt, poſtquam ad eam corporis eſſentiæ ſententiam tamquam ad ſcopulum adhæſerunt, ſibi integrum eſſe vacui poſſibilitatem defendere, quin eorum ſyſtema non modo nullas ruinas, ſed ne rimas quidem aliquas agat. Quod ſi hac imbuti opinione ad rationes pro vacui poſſibilitate examinandas accedant, nullus vereor ne in communem ſententiam concedant. Nam etſi facilius ſibi dentem excuti ex ore ſinant, quam ex animo unam aliquam ex iis ſententiis, quæ in eorum Philoſophia familiam ducunt, in aliis tamen minime ſunt obſtinati, rationibus facile cedunt, novis experimentis ducuntur, a Magiſtro diſcedere non dubitant, inter ipſos diſſentiunt, & in quamcumque partem flectuntur. Inter alia exemplo eſſe poſſunt leges motuum in corporum colliſione, in quibus rationem potius & experientiam, quam Carteſium ducem communi calculo ſecuti ſunt. Ex quibus omnibus magnam animo concipio ſpem fore, ut iis facilioribus utar in vacui poſſibilitate, præſertim cum illam rationem ex ultima mundi cæſura ductam iis, quæ de proprietatibus extenſi infiniti §. 88. & ſeq. diſſerui, magis illuſtraverim. Si enim Mundus finitus eſt, jam Carteſiani vident ex eo conſequi vacui poſſibilitatem §. 11. Unde quo ab iis laqueis, in quos ſe induerunt, expediant, ad mundum indefinitum confugiunt caventes ab invidia vocabuli mundi infiniti, tametſi idem ſit mundum finibus carere & eſſe infinite extenſum. Iis ergo do mundi extenſionem eſſe infinitam. Quid tum? Num inde conſequetur hoc infinitum extenſum externis terminis haud circumſcribi? Minime omnium. Nam extenſum infinitum ſi detur, ſuis finibus nequaquam carere, & aliud infinitum alio in infinitum majus exſiſtere poſſe §. 85. & ſeq. principiis Matheſeos demonſtravi. Quamobrem ratio ab extrema mundi cæſura petita etiam in hypotheſi mundi infiniti torqueri poteſt in Carteſianos; niſi velint mundum ita eſſe in omni genere infinitum, ut majus creari non poſſit; quod, ut liquet ex

iis,

iis, quæ dicto loco ſunt diſputata, non minus repugnat, quam extenſum in omni gradu & linea ita infinite parvum, ut eo minus infinite parvum dari non queat, §. citato. Quæ cum ita ſint, ut eo redeam, unde ſum paulo digreſſus, Carteſiani facere non poſſunt, quin poſſibilitatem vacui & ideo motus in vacuo aliis Philoſophis aſſentiantur. Cum ergo in vacuo nequeat eſſe ab una corporis ſuperficie ad aliam translatio, ſequitur eſſe & a Deo gigni in corporibus aliquid aliud ab hac relatione diſtinctum, per quod non tantum remote, ſed proxime & quantum in ipſis eſt, capacia fiant pluribus corporum partibus percurrendis, ita ut ad eam rem conſequendam aliud opus non ſit, quam ut alia corpora circa illud ponantur.

§. 120. Propoſitio

Ergo manet eſſe in corporibus aliquam vim motricem, quæ ſecernatur a motu. Utrum vero omnis vis ſit accidens corporum, an ſaltem aliqua ad ejus eſſentiam pertineat, nunc diſpiciendum eſt. Cui diſceptationi viam ut muniam, diſcrimen inter vim mortuam, atque vim vivam paucis explicandum ſuſcipio, uberiorem hujus loci diſquiſitionem ad conſequentia capita rejecturus. Si lamellam chalybeam globulo manibus apprehenſo contra parietem comprimamus, in ſingulis compreſſionis punctis manum & globum urgeri ſentimus. Si vero lamella ita compreſſa manum a globo repente amoveamus, is ab ea ſe expandente continenter & indeſinenter pellitur, vimque definiti cujuſdam gradus motricem toto expanſionis tempore acquiret. Ex quo fit, ut quemadmodum ex fluxu parallelo rectæ lineæ ſuperficiem, uti rectangulum, generari intelligimus, ita ex quarumdam preſſionum fluxu, quibus globus ab elaſtris perpetuo urgetur, vim illam gigni motricem, quæ dicitur viva, intelligere liceat. Quemadmodum autem lineæ ſunt elementa rectangulorum, quæ ab iiſdem rectangulis diſtinguuntur quidem, ſed ſine iiſdem conſtare non poſſunt, ita inter preſſiones puras atque motricem vim eſt quidem illud diſcrimen, quod inter quantitatem genitam ejuſque elementum intercedit, ſed preſſio ſine generatione vis alicujus eſſe non poteſt. Cum enim nihil in vero temporis inſtanti eſſe poſſit §. 37. neque ipſa preſſio in momento ſolum durare poteſt. Siquidem ſi puncto temporis ſolum perſeveraret, eodem momento foret, ut ponitur, & non foret, quia ceſſaret. Quod repugnat. Preſſio autem aliquo tempore durans vim motricem generet neceſſe eſt. Verum de hoc alias enucleatius.

2. Nunc

2. Nunc enim hunc locum ſummis labiis attingimus, quatenus opus eſt in definienda quæſtione, quam habemus præ manibus. Itaque vel nomine illius abſoluti, quod a motu diſtingui, & proximam motus cauſſam eſſe §. ſuperiore monſtravimus, intelligitur pura preſſio, vel vis motrix fluxu preſſionum genita. Quodcumque dicatur, mihi videtur cum corporea & extenſa ſubſtantia neceſſario non cohærere, ſed habendum eſſe loco veri accidentis, quod corpori, quod attinet ad eſſentiam, jam completo & perfecto extrinſecus accedat. Rem ita conficio. Si ad experimenta & ad rationem animum attendamus, negari non poteſt in quolibet corpore vim ita poſſe deminui, ut minor ſemper ac minor in infinitum exſiſtere queat. Quamvis enim aliqui velint eamdem ſemper vis motricis quantitatem in toto mundo permanere, nemo tamen inficias ire poteſt quodcumque corpus grave ſurſum projectum per lineam rectam, quæ finitori ad perpendiculum inſiſtat, dum ab imo puncto, unde ſurſum moveri incipit, ad ſummum, ubi ceſſat aſcendere, pervenit, per omnes tarditatis gradus tranſire; quod eſſe non poteſt niſi vis, quæ eſt proxima motus cauſſa, minor in perpetuum fiat. Cum enim quæ celeritati officere poſſunt, aer & projecti corporis gravitas eadem ſint, & nihilominus de celeritate ſemper aliquid in infinitum decedat, id aliunde oriri non poteſt, quam ob imminutam in corpore cauſſam proximam motus.

3. Hoc conſtituto non difficulter efficitur nullam vim motricem eſſe cum corpore neceſſario copulatam ita, ut abeſſe non queat. Primo enim pars vis, quæ a corpore ſeparatur, ſimilis eſt alterius partis, quæ reſtat. Quare ut illa auferri poteſt, ita hanc detrahi poſſe compertum ſit. Deinde cujus generis eſſentia eſſe poteſt illud, cujus nulla definita pars neceſſario ineſt, ſed quæcumque vel infinite minima accipiatur, aliquid tamen illius detrahi quit? Neque enim par eſt etiam ſubſtantiam extenſam poſſe in infinitum diminui, quamvis extenſio ad ejus eſſentiam pertineat. Nam ut mittam id, quod aſſumitur, apertæ falſitatis coargui iis, quæ §. 21. & 23. diſſeruimus, quo plures ob diviſionem a ſubſtantia extenſa partes decedunt, eo tota ſubſtantia, & alia omnia, quæ cum illa neceſſario cohærent, minuuntur. At hic altera eſſentiæ pars, ſcilicet extenſio eadem permaneret, & altera, ſcilicet vis in infinitum minor evaderet. Quod fieri minime poteſt. Siquidem eſſentialia tam arcto vinculo inter ſe devinciuntur, ut quemadmodum alterum ſine altero corrumpi

non

Digitized by Google

non poteſt, ita nec aliud ſine alius diminutione minui queat: Quid quod vis ſurſum ita in infinitum fit minor, ut nihil ejuſdem prorſus maneat? Corpus enim ubi ad aliquod punctum, quod pro data vi, qua projicitur, plus aut minus a ſolo abeſt, pervenit, inde redit ad ſolum inſita gravitate, quæ vim impreſſam omnino eliſit. Dicendum eſt ergo vim illam ſurſum eſſe undequaque corpori accidentalem. Quod ſi ita eſt, quidni omnem aliam quamcumque vim motricem corpori accidere ſtatuamus? Ut enim vi motrice accidentali motus corporis ſurſum obtineri poteſt, ita ſimili vi motrice motus verſus quamcumque aliam plagam generari quit. Nam differentia locorum, quæ ſunt extra corpus, quæque in vacuo tolli poſſunt, eſſentialem inter vires differentiam facere nequit. Si vero aliis, cujus demum cumque generis ſint, motibus vis accidentalis eſt ſatis, quid fruſtra contendimus ſine ulla neceſſitate rationem illorum inveſtigare in aliqua vi neceſſario inſita, cujus nullam notionem habemus? Ad hæc infirmanda dici fortaſſe poteſt id, quod alibi ex profeſſo tractabimus, vim motricem ſurſum minui & prorſus extingui ſolum quod attinet ad effectum & motum ſurſum, non vero quod ad ſubſtantiam; atque ideo de motu ſurſum quidpiam decedere, quia novi indeſinenter vis motricis deorſum directæ gradus a gravitate generantur, donec vis a gravitate genita vim ſurſum exæquet, quo momento vis ſurſum integra in corpore eſt, ſed motum ejuſdem ſurſum efficere amplius non poteſt, eo quod a vi contraria æquali impeditur. Verum etiam in hac ſententia, in negotio virium accidentalium res eodem revolvitur. Nam etſi vis ſurſum non perimatur, tamen a gravitate nova deorſum generari debet, quæ aliam ſuſtineat. Si enim hæc etiam ineſſet, corpus ſurſum projici non poſſet. Quod ſi ita eſt, vis illa ſit accidentalis oportet.

4. Ergo liquet nullam cum corpore vim neceſſario cohærere. Quod vero ad preſſiones attinet, primo conficitur ex eo, quia generatim preſſiones ut elementa virium ſine aliqua vi eſſe nequeunt num. 1. tum iis omnibus rationibus, quas in vi motrice adhibuimus: nam & dum corpus ſurſum projectum deinceps deſcendit, omnem preſſionem ſurſum verſus amittit, nec aliis in corporibus preſſiones diverſi generis ponere opus eſt; & preſſiones ipſæ in infinitum minui poſſunt. Ut enim exempli loco ſtatuam genus earum preſſionum, quæ ſi quid hujus ſpeciei ad corporis naturam pertineret, maxime forent hujuſmodi,

modi, nonne attractiones ejuſdem corporis in ſententia Nevvtoni ſunt in ratione inverſa quadratorum diſtantiæ a centro attrahente, & ideo aucta in infinitum diſtantia infinite minores fiunt? Quare ſi quid in viribus motricibus hac ratione fuit effectum, id in preſſiones quoque valeat neceſſe eſt.

5. Inquient non eſſe quidem corpori neceſſariam certam aliquam ac determinati gradus preſſionem, aut attractionem; aliquam tamen nullius definiti gradus cum eodem neceſſario conjungi; quemadmodum neceſſe quidem non eſt, ut ſubſtantia poſſibilitatem alicujus modi determinate vel in ſtatu proximo, vel in remoto habeat, §. 22. num. 59. aut corpus certa quadam figura, uti rotunda circumſcribatur; neceſſarium tamen eſt, ut illa indeterminate vel in ſtatu proximo, vel in remoto habeat poſſibilitatem, hoc indefinite aut hanc aut illam ex pluribus, quæ exſiſtere poſſunt, figuris.

6. Qui rationem ita inſtituunt, non vident primo figuram uniuſcujuſque corpuſculi eſſe ratam & fixam atque immutabilem, quamdiu illius ſubſtantia permanet, §. 117. deinde etſi mutari poſſet, tamen non eſſe ex iis abſolutis, quæ proxime a Deo generanda ſunt, qualis eſt natura preſſionis & vis; quo intelligitur, cur alia atque alia figura ſine interitu, aut diminutione eſſentiæ corporeæ exſiſtere quiret. Quod idem valet in ſtatus proximi atque remoti poſſibilitatem modorum, quia ſunt relationes pendentes ab aliquo abſoluto, quod cum non eſt, poſſibilitatem facit in ſtatu remoto; cum vero adeſt, in proximo. At preſſiones & vires motrices ſunt aliquid abſolutum, quod a Deo proxime creandum eſt. Quamobrem ſi quæ preſſio & attractio cum corpore tamquam eſſentiæ pars neceſſario cohæret, ea ſit oportet in quolibet definiti certique cujuſdam gradus, quemadmodum alia omnia abſoluta, quæ ad eſſentiam pertineant, ut videlicet maſſæ corporis ex æquo reſpondeat. Præterea ſi data quælibet maſſa cum hac aut illa preſſione, aut vi neceſſario, ſed indeterminate conjungeretur, maſſa foret genus, & preſſionum gradus differentiarum eſſentialium munere fungerentur. Harum vero natura eſt, ut antequam cum genere copulentur, nullæ determinate cum genere ſint, poſtquam vero genus exſtitit, & aliqua cum illo conglutinata eſt, amplius divelli non poſſint, quin tota ſubſtantia in nihilum recidat §. 22. num. 7. Jam vero hujuſmodi non ſunt attractiones, proptereaquod eadem omnino maſſa creata majorem, aut mino-

minorem habere poteſt num. 4. Quare nec ad partem eſſentiæ corporis, quæ dicitur differentia, pertinere poſſunt. Ex quo fit ut inter accidentia corporum ſint collocandæ.

7. Verum tamen eſt, quod unum ex iis, quæ ad hanc rationem concludendam aſſumſimus, poteſt quis ſaltem in dubium vocare fretus ſententia Leibnitii & Wolphii, qui mihi velle videntur novam aliquam vim in corporibus non generari, ſed ſolum earum, quæ corporis ſive elementorum eſſentiam conſtituunt, & ab iis primitivæ appellantur, novam aliquam determinationem directionemque, & ut verbo ab iis uſurpato utar, modificationem generari. Quo labefactatur noſtra ratio ducta ab eo, quod aliquas preſſiones & vires corporibus accidere compertum ſit experientia. At ſi ex altera parte edicerem ac præmeferrem in hac obſcuriſſima de origine virium diſputatione experientiæ ſenſuum, a quibus omnes corporum notiones primum haurimus, tamdiu me velle ſtare, quamdiu contrarium certa ratione non doceatur; ex altera vero cum negarem ulla certa ratione vires eſſentiales ab aliquo monſtratas fuiſſe, §. 115. tum in multis corporibus novos impetus & motus gigni experientia teſte affirmarem, quis me temere facere arbitraretur? Qui enim pro ſua ſententia ſenſus habet & rationem iiſdem innixam, is ab ea deturbandus non eſt nuda & ſimplici in contrarium affirmatione.

8. Nihilotamenminus tamquam bonæ fidei poſſeſſor hoc pacto non agam cum adverſariis; ſed conabor disjicere tenebras, quas nituntur offundere, dum nobis illa vocabula novæ determinationis, directionis, atque modificationis obtrudunt. Si enim hæc reſecemus ad vivum, nullam eſſe latebram, quam in iis ſibi quærunt, liquido comperiemus. Quid ergo intelligunt nomine novæ determinationis modificationiſque, quam ad novum aliquem motum in corporibus exſiſtere putant? abſolutum ne aliquid, quod antea non erat, quodque proxime a Deo creetur, an vero modum quemdam relativum, quodque aliud nihil niſi relationem inter plura ſignificet? Si primum, teneo quod hactenus contendi, aliquod abſolutum relationem inter unum ens creatum, & aliud non ſignificans in corporibus jam conſtitutis a Deo proxime gigni, quod revera iiſdem accidat, quodque mutationis relationis, quæ eſt in motu, cauſſa proxima & effectrix habeatur. Sin vero alterum, homines iis omnibus premam rationibus, quibus paulo ſupra confeci muta-

tionem

tionem relationis corporis haud poſſe fieri, niſi quid abſoluti & puram relationem inter res creatas non ſignificantis proxime a Deo generetur §. 119. Quamobrem cum illa nova directio & modificatio non ſit in hac hypotheſi niſi alius ad aliud relatio, proxime a Deo creari, & ideo cauſſa motus effectrix eſſe non poteſt.

9. Quod ſi quis hiſce rationibus victus concedat quidem eſſe in corporibus vires accidentales, ſed aliud etiam genus eſſentialium eſſe admittendum contendat, is hujuſmodi inſitas vires, quas verbo tenus inducit, non rationibus monſtrat, ſibi habeat, meque in accidentalibus, quas hactenus digito velut oſtendi, conquieſcere ſinat, præſertim ſi hæ, ut in poſterum faciemus perſpicuum, idoneæ ſint effectis naturæ explicandis, illæ autem nequaquam. Nam corpus vi percitum eſſentiali nullam in partem moveri poterit, ad quem motum gignendum, qui eſt univerſale naturæ phænomenon, inducitur vis. Cum enim eſſe in hoc, aut in illo loco ſit corporis accidens, cujus mutatio mutationem eſſentiæ ſecum non trahit, eſſentia ipſius & omne id, quod ad eſſentiam pertinet, nullum determinate locum requiret. Nulla igitur erit ratio ſufficiens, cur corpus eſſentiali vi præditum aliquorſum moveatur. Quare viribus ſolum eſſentialibus nullam in partem movebitur. Non ergo vis eſſentialis erit cauſſa proxima motus: nec illa ſola naturæ phænomena, quæ motu perficiuntur, explicari poterunt. In quo maximum meæ ſententiæ præſidium conſtituo. Vis enim eſſentialis nomine tenus erit vis, non autem re ipſa, cum non ſit id, quo poſito continuo motus conſequitur, ſed aliquod aliud abſolutum ad motum efficiendum in corpore requirat, quod profecto juſtiori de cauſſa vis motrix, ſive cauſſa motus dicetur.

10. Exorietur hic aliquis ex ſchola Nevvtoni, & inter corpus in vacuo, & corpus in plano diſtinguens dabit quidem in infinito inani per vim eſſentialem corpus nullam verſus plagam dirigi poſſe, inficias tamen ibit in pleno, & naturam corporum deſiderare, ut alterum verſus alterum contendat, & ſe mutuo trahant, pugnabit. Atque ad illud, quod paulo ante ſtatuimus, in Nevvtoniana ſententia attractiones variari, & in infinitum minui poſſe, fortaſſe reſpondebit, quantitatem attractionis in qualibet maſſa ipſam per ſe eſſe conſtantem, ſi ſingula loca & intervalla a corpore attrahente con-

ſiderantur, adeout in ſingulis æqualibus ab illo diſtantiis ſemper eadem maneat, quamdiu maſſa corporis eadem perſeverat; immutabilitati vero eſſentiæ corporis nihil obeſſe, quod alia in aliis intervallis reperiatur, immo ipſam naturam vis & efficientiæ corporum exigere, ut quo in ſphæram per ampliora ſubinde ſpatia diſpergitur, eo in ſingulis majoris ſphæricæ ſuperficiei punctis minor evadat.

11. Verum hæc ne hilum quidem me poſſunt movere. Nam ſine ulla ratione inducitur in corporibus quædam virtus, quæ inter impoſſibilia ponenda eſſe omnino videtur. Quæro enim, cum duo corpora interjecto inani diſſita ſe mutuo naturaliter & neceſſario trahunt, an aliquod ex iis ex. gr. A diffundat quidpiam uſque ad alterum corpus B, an vero nihil. Si omnino nihil, qui fieri poteſt, ut alterum ad ſe tamquam cauſſa effectrix alliciat. Nam corpus B ſi in infinito inani ſolum ſit, natura ſua nullam in partem tendit. Quare ſi ex eo, quod e regione ponatur corpus A, illorſum contendit, corpus A erit cauſſa, quæ vim eſſentialem corporis B excitabit ad motum. Hoc autem, quod vim B determinat, in eodem B, non extra eſſe debet. Id enim, quod eſt extra B, nihil in eo facere poteſt. Si ergo A nihil diffundat uſque ad B, propter poſitionem A nihil recipietur in B, quod ejus vim naturalem ad motum excitet atque determinet. Nihil enim effectus poſitivi cauſſa eſſe non poteſt, & ceteroquin corpus A vi creandi deſtitutum nihil efficere poteſt, niſi quidpiam ſui communicet. Quod ſi velint ab altero corpore ad alterum quidpiam diffundi, iterum quæro an hoc, quod diffunditur, ſit ſubſtantia ideſt corpus, an vero qualitas ſive accidens ſubſtantiæ, cujuſmodi eſt vis. Si ſubſtantia, ſive corpus, id non poterit eſſentiam corporis A, unde fluit, conſtituere; quia ſubſtantia alterius ſubſtantiæ, a qua diſtinguitur abſolute, eſſentiam facere nequit; præterquamquod illa corpuſcula cohiberi poterunt, ne a corpore A mittantur; quo ceſſaret attractio, quod fieri haud poſſet, ſi ad eſſentiam pertineret. Sin vero accidens ſive qualitas, uti vis, qui fieri poteſt ut qualitas, & vis ſine ulla corporea ſubſtantia aut ab alio corpore ad aliud diſſitum tranſeat, aut per inane interjectum diffuſa reperiatur? Hoc pacto qualitates & accidentia naturaliter per ſe conſiſtere poſſent, & pro veris ſubſtantiis habenda forent. Quod prorſus repugnat. Ne igitur in tot

captio-

captiones nos induamus, cum aliquibus etiam Nevvtonianis dicendum eſt corporum attractionem, quam Nevvtonus ut univerſale naturæ phænomenon optime habuit, aliud non eſſe niſi duorum corporum occurſum, qui aliunde non oritur, quam a viribus accidentalibus, quibus corpora aliud verſus aliud pelluntur, undecumque hæ vires accidentales originem trahant. De quo mihi alium in locum integrum ſervo. Quod ſi interjecto inani duo corpora ad ſe mutuo accedant, ob ea, quæ modo diſſerui, mihi exploratum videtur alterum motus alterius cauſſam effectricem eſſe nequire, ſed ſibi obviam fieri ea ferme ratione, qua duæ pilæ a duobus hominibus diſſitis & e regione poſitis projectæ ſibi occurrere poſſunt, quin altera pro cauſſa motus alterius haberi queat. Quæ cum ita ſint, labat fundamentum eorum, quæ objecta fuere, & manet alias nullas vires motrices, niſi accidentales ſive experimentis, ſive rationibus etiamnum detectas fuiſſe.

§. 121. Propoſitio

Atque hujuſmodi vires ſunt accidentia primorum corporum abſoluta; quatenus videlicet uti §. 119. explicavimus, ſolam inter plures creatas res relationem non complectuntur, ſed ſunt ex genere eorum, quæ proxime a Deo creantur e nihilo. Sunt autem alia accidentia relativa, ſive modi, propterea quod poſita ſunt in relatione alius ad aliud corpuſculi; alia enim atque alia ratione hæc corpuſcula poſſunt connecti inter ſe. Quædam enim, ſi modo figura patiatur, ita compingi queunt, ut nullum intercipiant inane, quædam vero, ut vacuos poros intercipiant. Atque hoc multis modis fieri poteſt, quos nunc explicare neceſſe non eſt, quia diſputatio hujuſmodi pertinet ad eum locum, in quo de primariis corporum ſpeciebus atque differentiis ediſſeremus. Nunc ſatis eſt illud tenere hoc accidentium genus redigi ad ſitum, quem aliud ad aliud corpuſcula habent.

Digitized by Google

CAPUT QUARTUM:

De Preſſionibus & Viribus.

§. 122. Propoſitio

SEd redeo ad vim motricem & ad preſſiones, ex quibus eadem oritur, & enucleatius, quam paulo ante factum eſt, diſcrimen earum expendendum ſuſcipio; idque facere aggredior explicando duas rationes, quibus corpus, ex. cauſſa, cubum diſtingui a ſuperficiebus quadratis, aut rectangulum a rectis confici poteſt. Nam primo quodlibet extenſum finitum ſuos habeat limites & modos, quibus circumſcribitur, neceſſe eſt. Quamobrem limites & modi cubi finiti ſunt quadrata, quibus continetur. Quia vero ſubſtantia etſi modos habeat, tamen iis, tamquam partibus additis, non conſtat, corpus cubicum utpote ſubſtantia quadratis quidem lineamentis circumſcribetur, ex iis tamen tamquam ex partibus non coaleſcet §. 18. Unde fit, ut inter cubum, atque ſuperficies ejuſdem aliquod interſit diſcrimen, illud ſcilicet, quod inter ſubſtantiam, & modum. Quod valet etiam in rectangula & in latera, quibus eadem definiuntur. Nam nec modus ex modis alius generis tamquam ex partibus additis componitur. Deinde ſi cubum in tranſverſum ſecueris in duas partes æquales, & ſuperiorem dimidiam partem in alias duas, itemque ſuperiorem dimidiam dimidiæ in alias duas æquales, idque in infinitum continuari intellexeris, de cubo ſemper aliquid in infinitum decedet, nihil tamen de ſuperiori quadrato, de cujus longitudine ac latitudine, tot e cubo ſubductis partibus, nihil detrahitur. Eſt igitur in re certum fundamentum & evidens ratio, cur ſuperficiem quadratam ſecernamus a cubo. Quod etiam cadit in rectangulum & ejus latitudinem, quæ prorſus eadem manet, quantumcumque rectangulum diminueris in longitudinem.

2. His vero duabus rationibus monſtrari poteſt etiam in hoc virium negotio eſſe aliquid, quod a vi motrice ſit diſtinguendum. Nam etiam vis motrix eſt quantitatis ſpecies, cum plus & minus ſuſcipiat. Siquidem, ut experimentis conſtat, duo corpora, quorum aliud alio ſit majus, eadem celeritate ferri queunt. Quod eſſe non poteſt, niſi vis majoris maſſæ vim mino-

minoris excedat. Quamobrem quælibet vis finita ſuos limites, unde generari incipit & deſinit, habeat neceſſe eſt. Cum vero rem a limitibus, quibus definitur, diſtingui oporteat, in viribus ponendum eſt aliquid, quod ab iiſdem ſecernitur. Id autem nomine preſſionis cum communi Recentiorum appello. Preſſiones ergo a viribus tamquam terminos & modos a re, quæ definitur, internoſco. Cujus diſcriminis cognitionem comparo quoque hac alia ratione. Nam finge globum initio quieſcentem pelli ab aliquo corpore ſemper per aliquod ſpatium æqualibus ictibus; quod obtineri poteſt, ſi infinita ſimul copulata elaſtra compreſſa per ſpatium finitum tempore finito ſuas in dictum globum vires explicent; propterea quod finita omnium expanſione fiet, ut quia ſunt infinita, poſt dictum tempus ſingula ſolum infinite parva quantitate magis diducta reperiantur. Quo fit, ut toto illo tempore & ſpatio utpote æqualiter contracta æqualem pellendi niſum exerceant. Jam vero ſi minuto temporis globum ab his elaſtris indeſinenter urgeri ponas, vim definiti gradus in eo generari intelliges; ſi ſolum $\frac{1}{2}$ minuti, vim minorem; ſi $\frac{1}{4}$ minuti, vim adhuc minorem, itaque progrediendo tempore in infinitum minori vim in infinitum minorem gigni percipies. Nihilotamenminus id, unde hæc virium in infinitum minorum generatio incipit, idem propemodum eſt. Quod ut magis perſpicuum fiat, fac duas ſeries elaſtrorum, quæ ſint ſingula æqualis virtutis, ſed ita ut prima ſeries ex binis in unum coalitis conſtet, ſecunda ex ſingulis. Jam vides id, unde incipit generari vis in globo a prima ſerie, eſſe duplo majus illo, unde gigni cœpta eſt vis cum globo communicata a ſecunda, & quidem quantovis minori tempore vim a binis generatum percipias, ſemper tamen id, unde ſumit initium vis eorumdem, duplo majus animadvertes vi, quam ſingula gignere incipiunt. Ergo ſi quid hac ratione effectum eſt in quantitate extenſa, quod attinet ad internoſcendas ſuperficies a ſolido & lineas a ſuperficie, eadem valeat oportet in diſtinctionem virium a preſſionibus.

§. 123. Propoſitio

Quomodo autem ex preſſionibus vis generetur, nunc inveſtigandum eſt, eliciendumque ex geneſi ſolidi ex ſuperficiebus, & rectanguli ex recta. Non enim aut ſuperficies addi-

tæ ſolidum, aut rectæ pariter additæ rectangulum faciunt; quod illarum additio ſolum majorem ſuperficiem, harum vero majorem rectam componunt; idque deducitur ex eo, quia ſi quantitates unius ſpeciei alias aliis alterius ſpeciei addas, quantitatem ſpeciei diverſæ non feceris. Siquidem additio, qua partes juxta partes ponuntur, eſt mera relatio, quæ naturam partium mutare non poteſt. Efficitur etiam ex eo, quod fines & modi ſunt quidem in re finita, iis tamen ſimul junctis res conſtare non poteſt, cum inter fines ſit quidpiam oporteat, quod a finibus diſtinguatur. Confugiendum eſt igitur ad alium modum, quo hæc genera quantitatum gignantur. Eſt autem multiplicationis & fluxus; nam ſi quadratum in rectam lateri æqualem duci, ſive ſuper eam ad angulos ſemper rectos fluere & moveri, rectam vero in aliam rectam, aut ſuper eam ad perpendiculum fluere ponas, inde cubum, hinc rectangulum oriri intelliges. Idem vero contingit in virium generatione; nam preſſiones preſſionibus addere idem eſt ac limites limitibus adjungere; quo quantitas non ponitur diſtincta a limitibus, cujuſmodi ſunt vires motrices. Has ergo fluxu preſſionum generari putandum eſt, quatenus ad veram virium æſtimationem preſſiones alias in alias ducere oportet. Ceterum in hoc preſſionum productum diligentius inquiremus, cum de virium æſtimatione diſputabimus.

§. 124. Propoſitio

Nunc aliud inveſtigandum ſuſcipio, quod magnum habet in Phyſicis momentum, utrum ſcilicet puræ preſſiones ſine ulla vi poſſint in corporibus conſiſtere. Qua in re ut meam expromam ſententiam, quæ a communi non parum abhorret, adverto, cum Geometræ ajunt cubum, ex. gr. eſſe infinitum ratione habita ſuperficiei, qua generatur, ſuperficiem ratione habita lineæ, ſolida eſſe in ratione quadam ſimplici, duplicata, triplicata &c. ſuperficierum, aut rectarum, aliaque hujuſmodi, hæc non ita ab iis accipi perinde ac ſi reipſa exſtare poſſent rectæ ſine ulla prorſus latitudine, aut parvæ ſuperficies in longum & in latum extenſæ ſine ulla omnino profunditate. Cum enim lineæ & ſuperficies ſint ultimi ſubſtantiæ ſolidæ & extenſæ modi & limites, non ignorant has quantitates exſiſtere, ſed ipſas per ſe conſtare non poſſe in hac rerum univerſitate certiſſime vident. Quid igitur erit, ſi circa preſſiones atque vires eodem modo ratiocinemur? Novum

vum quidem id videbitur; & contrarium principiis ad hanc uſque diem communi fere calculo Phyſicorum receptis. Verum quid ea res officere debet, ſi modo id efficiatur, quod volumus? Tentemus ergo an id effici queat. Quemadmodum ex fluxu rectæ rectangulum fit, & ex fluxu rectanguli parallelepipedum, ita ex fluxu preſſionis oritur vis. Igitur ſicuti rectæ in rectangulo ſunt & rectangula in parallelepipedo, non tamen ipſa per ſe conſiſtere poſſunt, ita in vi ſunt preſſiones, non vero preſſiones puræ ſine ulla vi conſtare queunt. Fortaſſe inquient, diſcrimen quod inter utrumque quantitatis genus intercedit, facere poſſe, ut quamquam ſuperficies ſine ſolido eſſe nequeant, preſſiones tamen ſine vi poſſint haberi. At ſi eadem ratio in utrumque valeat, id nihil obſtet neceſſe eſt. Rem autem veram valere videtur. Nam idcirco ſuperficiem puram ſine ſolido exſiſtere abſurdum eſt, quia modos & limites rerum ſine rebus, quarum ſunt modi & limites, conſtare repugnat. Sunt autem preſſiones modi & limites vis, id nimirum, a quo incipit vis, dum generatur, & in quod deſinit §. 123. quemadmodum rectangulum eſt id, a quo parallelepipedum ſumit initium, & in quo finem habet. Ergo ſi hæc ratio in quantitate extenſa & continua bene concluditur, valeat etiam in vi viva, quæ eſt quantitatis continuæ genus, neceſſe eſt. Præterea preſſio, quæ per aliquod vel minimum tempus durat, vim gignat oportet ejuſdem rationis, atque eſt quælibet alia vis motrix. Nam preſſio in tempore fluit; fluxus autem preſſionis vis motrix eſt: Ut vero eſſet pura preſſio, in vero & indiviſibili inſtanti ſolum eſſe deberet. Quælibet autem preſſio per aliquod tempus duret oportet. Cum enim tempus & ſpatium in infinitum ſecari queant, nihil in ipſo eſſe poteſt in vero & ſimplici inſtanti. §. 37. Ergo quælibet preſſio non poteſt ut pura preſſio permanere, ſed in vim motricem degeneret opus eſt. Dices preſſione per aliquod tempus durante vim motricem generari, niſi contraria preſſione idem tempus permanente corrumpatur, ut in ſtateris contingit æqualium brachiorum, cum utrique lanci æqualia pondera impoſita ſunt. Sed ante preſſio exſiſtere debet, quam perimatur; id enim, quod nondum exſiſtit, corrumpi non poteſt, nec quo temporis puncto exſtare incipit, eodem aut ſequenti interire quit; principium enim & finis rei eſſe quidem poſſunt in re, ſed nec ſimul

mul nec ita, ut alterum alterum proxime nulloque intercepto ſequatur. Nam in tempore ſunt quidem inſtantia, ſicuti in ſpatio puncta, ſed non ita ut alterum cum altero cohæreat, & poſt primum inveniatur ſecundum §. 47. Si enim ita foret, extenſum ex punctis inextenſis componeretur, quod longe aberrat a vero §. 15. Quare vel illa preſſio nec incipit exſiſtere in rerum natura, vel ſi incipit, per aliquod tempuſculum exſiſtat opus eſt, antequam a contraria corrumpatur, ob eamque rationem vim gignat ejuſdem naturæ, ac vis motrix.

§. 125. Scholion

Hæc ita conſtituta in aliquas difficultates incurrunt, quæ quoniam cum multis Phyſicæ nondum explicatis capitibus implicatæ ſunt, ſervatis methodi legibus nec ſatis intelligi nec ſatis dilui poſſunt. Quamobrem ne quis iiſdem ab hac mea ſententia deterreatur, ſatius judico a methodi rigore pauliſper diſcedere, quam in re tam neceſſaria cauſſæ deeſſe; tyronibus, quibus ſcribo, prius admonitis, ut hocce ſcholion in præſenti tranſiliant ad illud redituri, cum ſe in phyſicis corroboraverint. Prima igitur difficultas ſumi poteſt a diſtinctione virium vivarum & mortuarum. Nomine vis vivæ Leibnitii ſectatores intelligunt eam vim motricem, quæ cum motu juncta eſt, ut in lapide projecto: nomine vero mortuæ iidem intelligunt eam vim motricem, quæ eſt ſine motu: hæc autem experientia ſit manifeſta. Nam in gravi impedito ne cadat, & in arcu compreſſo eſt ſine ullo motu conatus in illo deorſum tendendi, in hoc ſe explicandi. Hæc autem vis mortua eadem eſt ac preſſio. Nam noſtra ſententia preſſio eſt elementum, cujus fluxu vis motrix generatur §. 124. vis autem mortua pariter eſt elementum, unde gignitur viva. Siquidem ſi impedimentum tollatur, gravitas ſe exerere incipit, & in tempore infinite parvo ab initio motus ſolum celeritatem infinite parvam in gravi cadente facit. Quare ſi vim, qua fertur poſt fluxum tempuſculi a principio motus, comparemus cum vi, qua poſt tempus finitum cietur, alteram alterius ratione infinite exiguam comperiemus. Quod argumento eſt initium motus gravis ſumtum fuiſſe ab elemento vis vivæ, quam tempore finito corpus cadens acquirit. Igitur corpus antequam laberetur, aliud nihil habebat, niſi elementum vis motricis, ideoque niſi preſſionem.

2. Præterea corpus grave ſurſum projectum ad angulos finitori

nitori rectos non ad infinitum aſcendit, ſed ad certam aliquam altitudinem, unde iterum ad terram delabitur, corrupta omni vi, quæ cum illo communicata fuerat. A quo vero extinguitur hujuſmodi vis ſurſum, niſi a contraria gravitate? Hæc vero toto aſcenſus tempore nequaquam fluit, & nullam vim vivam generat a majori vi ſurſum impedita. Idem contingit in elaſtro expanſo, quod a corpore ſolido in alterum brachium incurrente uſque ad certum gradum pro ratione vis incurrentis comprimitur; nam vis elateris toto contractionis tempore vi majori cohibita fluere non poteſt, & nihilominus vim contrariam ſenſim corrumpit. Igitur preſſio, quæ non fluit, in corporibus exſiſtere poteſt.

3. Quod efficitur etiam rotatione corporis in circuli peripheria; nam in hujuſmodi corpore reipſa eſt vis, qua in centrum orbitæ circularis gravitat. Si enim ea careret, in eadem orbita minimè retineretur, ſed per tangentem circuli effugeret. Hæc autem vis conſtans eſt, & in ſingulis circumferentiæ punctis æqualis, eademque infinite parva, ſi cum vi circulationis conferatur. Ex quo ſequitur, ut hæc non ſolum ſit elementum vis vivæ motricis, verum etiam ut ſemper talis permaneat. Ita fit, ut preſſio, quæ vis motricis eſt elementum, quemadmodum ſæpius adverti, in hac rerum univerſitate ipſa per ſe conſtare poſſit.

4. Tandem nonne certum & exploratum eſt vim finitam percuſſionis eſſe infinite majorem vi gravitatis, atque ideo quamlibet minima percuſſione quamlibet vel maximam gravitatem ſuperari poſſe? Hoc vero eſſe non poteſt, niſi gravitas ſit pura vis elementaris, atque ideo preſſio.

5. Ad primam difficultatem quod attinet a gravitate, quæ ſit infinite parva reſpectu vis motricis & percuſſionis, petitam, & duabus rationibus altera num. 1. altera num. 4. confirmatam, operæ pretium arbitror primum proponere, quod Cl. Fontenellus in Hiſt. Acad. Reg. P. An. 1732. pag. 100. edit Pariſ. de hac materie refert ac diſſerit. Is itaque primo loco obſervat plures eoſque idoneos Geometras in eam veniſſe ſententiam, gravitatem cum percuſſione comparari non poſſe, propterea quod vis gravitatis in inſtanti non tribuit corpori niſi celeritatem infinite parvam, cum interea vis percuſſionis efficiat in eodem corpore finitam celeritatem; quod argumento eſt alteram ratione habita alterius eſſe infinite exiguam,
nul-

nullamque finitæ quantitatis cum alia finita rationem habere: hac de cauſſa obſervari clavos penitius infigi ob leves mallei ictus, quam ſi magni corporis pondere premantur. ...

6. Deinde monet aliis placere gravitatem ſine actione non eſſe, hancque actionem quantumlibet minimam, finitam tamen haberi oportere, atque idcirco infinitis partibus a gravitate ſuperari non poſſe. Atque ad id confirmandum duo affert, alterum ſumtum ex ponderibus, quæ ſuſpenſa e funibus eaſdem infringunt, alterum a gravibus, quæ pro magnitudine maſſæ certam quamdam altitudinem requirunt, ut ab ea ſuper vacuam lancem ſtateræ delapſa illam deprimant, & alteram, cui corpus grave impoſitum eſt, attollant, ita ut ſi a minori altitudine demittantur, nihil faciant, ſubjiciantque oculis hanc veritatem, gravitatis vim adeo finitam eſſe, ſi cum vi percuſſionis comparetur, ut percuſſio illam vincere quandoque non poſſit.

7. Poſtquam vero Auctor monuit, Equitem de Louville in ultimo commentario, quo rationes in utramque partem collegerat, aliquantum in hanc alteram propendiſſe, nodum quæſtionis ita ſolvit. Certum quidem & exploratum eſt in momento temporis gravitate generari celeritatem infinite parvam, quod eſt primum illud, quod a prioris ſententiæ Patronis aſſumitur; at falſum eſt in eodem inſtanti vi percuſſionis celeritatem finitam exſiſtere; ſiquidem etiam percuſſio tempore infinite parvo non imprimet corpori niſi velocitatem ejuſdem gradus, ut ultima ſectione (*des Elements de la Geometrie de l' Infini*) ejuſdem auctoris oſtenditur. Ex quo actionem gravitatis cum actione percuſſionis conferri poſſe conſequens fit.

8. Ita Fontenellus, cujus ſententiam ſi amplecterer, propoſitis objectis facile ſatisfacere poſſem. Verum pace Cl. Auctoris, cujus ingenium & opera ſuſpicio, ſubſcribere non poſſum huic opinioni, quia cum calculi differentialis atque Mechanicæ principiis nequaquam cohæret. Equidem aſſentior percuſſione & vi motu finito prædita in inſtanti temporis non fieri niſi celeritatem ipſam in ſe infinite parvam, ſed quæ tamen infinita ſit habita ratione velocitatis, quam gravitas a quiete profecta eodem corpuſculo faceret. Nam corpus grave recta deſcendens conſideretur in duobus punctis primum in puncto, quod infinite parvo intervallo diſtet ab eo loco, unde

unde delapſum eſt, & deinde in puncto, quod finito abeſt. In primo velocitatem habebit infinite parvam $= v$; in ſecundo finitam $= V$. Conſiderentur effectus iſtarum velocitatum, ſcilicet ſpatia peracta tempore æquali infinite parvo 1' gradus; in quo hæ velocitates pro conſtantibus haberi poſſunt. Erit ex notis formulis $ds : dS = v\,dt : V\,dT = v : V$, eo quod tempora dt & dT ex hypotheſi ſunt æqualia. Quare ſpatia peracta ſunt in ratione velocitatum. Sed velocitas V eſt finita, & v minima. Ergo ſpatiolum dS erit infinite magnum reſpectu ſpatioli ds. Ex quo fit effectum generatum vi gravitatis a quiete incipientis eſſe infinite parvum habita ratione effectus, qui ex vi motrice finita per ſpatium finitum cadendo acquiritur, ut finita eſt omnis percuſſio, quam ex fluxu infinitarum preſſionum generatam intelligimus.

9. Quod vero attinet ad illa duo, quibus laudatus Auctor eam ſententiam ab aliquibus ſuaderi narrat, mihi eſſe videntur parvi momenti. Nam primo cum gravia e funibus appenſa funes confringunt, tunc vis mortua & preſſio gravitatis non confligit niſi cum reſiſtentia & cohæſione fibrarum funium, quæ pariter mortua eſt. Cum vero graves maſſæ ex aliqua altitudine in alteram lancem demittuntur, vel alteram attollunt ſaltem per ſpatium adeo exiguum ac tempore adeo parvo, ut lancis elevatio non poſſit in ſenſus incurrere, vel ſaltem totam libram concutiunt & ideo vivam vim motricem gignunt, ut inde conjici queat non ideo lancem non elevari, quia quæcumque vis ex qualibet altitudine cadendo acquiſita ſatis non ſit, ſed quia vis eadem in tremitu partium, unde oritur ſonus, & in aliis efficiendis impenditur. Quamobrem hiſce duabus rationibus nihil efficitur, quod hanc ſententiam ſuadeat.

10. Ut ergo propoſitis difficultatibus alia veriori ſatisfaciam ratione, in anteceſſum adverto nullam vim a vi contraria tamquam a cauſſa effectrice propria virtute perimi poſſe, ſed ad ſummum unam vim poſſe præbere occaſionem, cur alia a Deo in nihilum redigatur. Vis enim eſt aliquod abſolutum & permanens, & ex genere eorum, quæ proxime a Deo creantur & conſervantur §. 119. Quæ vero hujuſmodi ſunt, a nulla re creata tamquam a cauſſa propria & efficiente poſſe in nihilum redigi compertum fit iiſdem rationibus, quibus efficitur nullam rem virtute & efficientia alterius creatæ rei poſſe e nihilo fieri, propterea quod conſervatio eſt continuata creatio rei, quæ proinde inte-

interire non quit, niſi Deus ab illa actione, qua illam a primo condidit, prorſus abſtineat. Ergo vis alia ab alia tamquam a cauſſa propria & effectrice perimi nequit.

11. Quare ad ſummum vires contrariæ & ſimul æquales ſunt cauſſa, ut ajunt, occaſionalis, cur Deus ceſſet a conſervatione. Cum enim corpus æqualibus in contrarias omnino plagas percitum viribus in neutram tendere poſſit, quia non eſt major ratio, per quam intelligi queat, cur potius hanc verſus quam illam feratur; inde occaſionem Deus ſumit ceſſandi a conſervatione earum virium, quæ nullum effectum nullumque motum gignere queunt. Dixi ad ſummum; nam vires non ſolum quod attinet ad effectum & motum, ſed etiam quod attinet ad ipſam earum, ut ita dicam, ſubſtantiam, omnino a Deo perimuntur, ſi vis ipſa & id, quod abſoluti eſt in eadem, ſine effectu & motu conſtare non poſſit; quod ad verum quamproxime accedit. Vis enim eſt actuoſæ naturæ & ultima ratio motus, inter quam & motum nihil interponitur, adeo ut poſita vi corpus alio non habeat opus in eum finem, ut moveatur. Hujuſmodi autem eſſe non videretur, ſi quiret eſſe ſine actione, & ſi inter ipſam & motum poſſet interjici quidpiam, quod illum impediret. Præterea vires illæ ſe viciſſim ſuſtinentes in æquilibrio forent prorſus otioſæ & nulli propemodum uſui, cum ex altera parte motus per eaſdem haberi non poſſit, & ex altera id, quod in æquilibrio commodi eſt ad res inter ipſas conglutinandas, ſatis obtineri queat per hoc unum, quod corpora in æquilibrio conſtituta ſint quidem ſine actuali vi etiam quod attinet ad ſubſtantiam, ſed in proxima tamen potentia, ut ſi ea tollantur, quæ æquilibrium conſtituunt, vires continuo ſe exerere incipiant. Jam vero Deus & natura nihil efficiunt ſupervacanei. Ergo vires contrariæ quod attinet ad ſubſtantiam, non perſeverant. Deinde quid opus eſt ut ſubſtantia virium contrariarum permaneat, cum motus corruptio haberi poſſit ſola deſtructione vis, quæ illum gignit? Ut in motu lapidis ſurſum ad eum paulatim imminuendum & demum omnino corrumpendum neceſſe non eſt id exſequi pluribus, ideſt conſervatione vis ſurſum, & generatione atque conſervatione novæ vis deorſum, quæ cum priori æquilibretur, illam ſuſtineat ejuſque motum extinguat. Quibus omnibus ſuadetur vires contrarias æquales in corpore non permanere, neque ad ſubſtantiam quod pertinet. Unde non eſt omnino explodenda Ariſtotelæorum ſententia, qui elementa

in

in ſuis quæque locis gravitare non voluerunt. Nam ſi illa prorſus ibidem quieſcere ponantur, id allatis ſuadetur rationibus, nec iis refellitur, quas ab experientia ductas in eoſdem Recentiores Phyſici congeſſere, propterea quod aliquem experientia deſiderat motum, qui cum perfecto æquilibrio & quiete non congruit.

12. Quod ſi memoratæ rationes quibuſdam non videntur ejuſmodi, ut rem propoſitam omnino efficiant & cogant, non valde pugnabo cum iis, qui vellent contrariarum & æqualium virium ſubſtantiam perſtare, modo & hi aſſentiantur, quod nullo pacto negari poteſt, rem eodem revolvi, ac ſi hæ vires non forent. Siquidem illæ nec motum corporis efficere poſſunt num. 10. nec ullatenus impedire actionem alterius vis, quæ rurſus accederet, eo quod ſe viciſſim impediunt & ſuſtinent. Unde corpus iis percitum foret perinde, ac ſi nullis donatum perfecte quieſceret.

13. His conſtitutis ad rem propius accedo, & ajo vel dari in hac rerum univerſitate perfectum æquilibrium atque quietem, quemadmodum in corpuſculis primitivis dari poſſe ex eorum perfecta ſoliditate colligitur, vel ſecus. Si primum, ex prima ſententia, quam ſumus amplexi, ſequitur non modo nullam vim vivam, ſed neque mortuam, ſive nullam gravitatis preſſionem durare in corporibus æquilibratis, eo quod in æquilibrio ſunt vires contrariæ & æquales, quæ non ſolum quod attinet ad motum ſive effectum, ſed etiam quod pertinet ad ſubſtantiam, ſe viciſſim in eadem veriori ſententia corrumpunt: ex altera vero non ſolas gravitatis preſſiones, verum etiam ipſasmet vires vivas iiſdem genitas permanere, quod attinet ad ſubſtantiam, tametſi ob earum ſimul oppoſitionem & æqualitatem nullus effectus nulluſque motus ſequatur. Ergo quamcumque ex dictis ſententiis adverſarii amplexentur, puras preſſiones ſine ulla vi ex earum fluxu generata exſtare poſſe minime efficitur. Sin vero alterum, quod inter alios mordicus ſuſtinetur a P. Caſtello in libro, qui inſcribitur *Traité de Phyſ. ſur la Peſanteur Univerſelle a Paris* 1724. & præter rationes ab eodem allatas ſuadetur ex eo, quod ex altera parte reſiſtentiæ medii ſunt in ratione inverſa duplicata velocitatum, quibus corpora moventur, & ex altera motus corporis in hac hypotheſi, ut alias docebimus, in infinitum durare debet, nec infirmatur ex eo, quod habet Cl. Succi in diſſertatione de Reſiſtentia Medii incluſa in quodam tomo, cujus non memini, Operis Inſcripti *Opuſcoli*

Scien-

Digitized by Google

Scientifici del P. Calogerà Venetiis editi, eam non eſſe naturæ legem, quæ motus corporum per aerem tandem extingui declarat, propereaquod, ut etiam P. Caſtellus advertit, inter corporum, quæ in æquilibrio conſtituta dicuntur, oſcillationes, quæ ſub ſenſus cadunt, interque nullas, ſive perfectam & abſolutam quietem ſunt infinitæ ex numero earum, quæ ſenſus effugiunt, ut ſupervacaneum ſit hac in re confugere ad experientiam, quæ hanc controverſiam dijudicare non poteſt: ſin vero, inquam, hoc alterum, multo magis apparet puras gravitatis preſſiones ſine vi viva, quæ illarum fluxu generetur, non poſſe conſtare, cum in iis reciprocis deſcenſibus atque aſcenſibus, qui oſcillando contingunt, vis viva & cum motu conjuncta a gravitate gignatur.

14. Quibus ſoluta manet prima ex quatuor, quæ contradictæ fuerunt, rationibus, & ſimul via munita ad refutationem ſecundæ. Nam in gravis projectione ſurſum, ſi vires contrariæ, quod attinet ab ſubſtantiam, perdurant, a cauſſa, quæ corporum gravitatem progignit, in corpore aſcendente vis deorſum, non autem pura preſſio generatur, idque tamdiu fit, quamdiu hæc altera vis priorem, quæ ad ſuperiora dirigitur, exæquet. Sin vero juxta aliam probabiliorem ſententiam vires contrariæ non permanent, nihil aliud fit, quam deſtructio vis in gravi ſurſum projecto, & generatio alterius in corpore, quod foret gravitatis cauſſa & origo. Qua in re me clarius non explico, ne hic præcipiam, quæ toties citato §. 201. ſum accurate diſputaturus. Hic unum addo in incurſu globi in elaſtri expanſi mobile brachium, dum alterum obice innititur, ſub oculos poni, quod in gravium aſcenſu contingit, vim ſcilicet globi paulatim imminui, donec omnino corrumpatur, & in elaſtro, quod ſenſim contrahitur, aliam denuo generari. Interim liquet nec ex ſecunda ratione quidquam concludi, quod puras preſſiones exſiſtere poſſe demonſtret.

15. Venio ad tertiam rationem, & ajo, cum corpus rotatur in circulo vi ad ejus centrum directa, vim centralem & velocitatem ea generandam ex altera parte, & velocitatem, quæ per tangentem impreſſa fuit, ex altera, ita eſſe comparata, ut quantum a centro corpus ob ſecundam diſcedere debet, tantumdem æquali tempuſculo ob primam accedere ad centrum oporteat. Quo fit, ut corpus nuſquam propius ad illud accedat, ſed eamdem ubique tueatur diſtantiam. Servata vero eadem a

centro

Digitized by Google

centro diſtantia perinde eſt, ac ſi dictum corpus foret in æquilibrio. Ergo ut diximus ad primam rationem, vel nihil efficere debet nec preſſionis nec vis, vel ſi quidpiam, vim ipſam motricem, quod attinet ad ſubſtantiam, tametſi ſine motu. Quo vero id magis perſpicuum faciam, adverto quod cum vis centripeta eſt in contrariam motus plagam, nihil juvat vim progreſſionis, eo quod altera alteri prorſus contraria eſt; ſi vero vis utraque pellat corpus eamdem verſus plagam, vis centripeta cum vi progreſſionis conſpirat, & altera alteram ſolum juvat; ſi denique vis centripeta tendat per rectam, quæ angulum facit cum recta tangente, ſecundum quam corpus a vi progreſſionis impellitur, vis centripeta partim nocet vi progreſſionis, partim ſavet, idque plus, vel minus, pro eo quod plus, vel minus accedit vel ad locum maxime contrarium, vel ad punctum maximæ congruentiæ. Ex quo concluditur, cum directio vis centripetæ æqualiter abeſt tum a directione maximæ virium convenientiæ, tum a directione maximæ oppoſitionis, ſive ad tangentem eſt perpendicularis, vim eamdem centripetam, quantum de vi progreſſionis corrumpere debet, eo quod eſt particeps directionis maxime contrariæ, tantumdem adjicere poſſe, eo quod directionis maxime congruentis æqualiter particeps eſt. Id autem contingit in circulo, in quo quælibet recta ducta a centro virium & foco tangenti ad angulos rectos inſiſtit, non vero in aliis curvis, a quarum focis ductæ rectæ ad puncta linearum, aut acutos, aut obtutos angulos cum tangentibus faciunt. Quamobrem vis centripeta fluit quidem in circulo partim in contrariam vi progreſſionis plagam corrumpendo finitam aliquam ejus vis partem finito tempore altero ex modis, quos ſupra explicavimus, partim in amicam generando tantumdem, quod partem corruptam reſtaurat. Ex quo fit, ut formula Geometrica det ſolum infinite parvam quantitatem vis circulationis finito tempore a vi centripeta extinctam, ideſt nihil, aut pariter ſolum infinite exiguam partem eidem adjunctam, non quia res hoc modo contingat, ſed eo quod propter æquales partes tum extinctas tum generatas res eodem modo accidit, ac ſi nihil decederet, aut accederet; idque veriſimilius fit in ſententia communiter recepta eorum, qui volunt calculos infiniteſimales ſolum tolerabiliter veros, quatenus, uti nos in tractatu de quantitate explicuimus, a principiis abſolute falſis & ſolum hypothetice veris progreſſi in theoremata abſolute vera deſinunt, perinde ac ſi ab abſolute veris ducti fuiſſent. Hinc enim intelli-

intelligitur, cum Geometræ concludunt ſolum infinite parvam quantitatem, ideſt nihil a vi centripeta in circulo aut generari aut corrumpi, quod contrarium videtur naturæ vis centripetæ, quæ in alia vi quidquam facere debet, ut corpus in circulo retineat, id aliter ſecundum ſenſum realem & verum fieri non poſſe, quam explicata ratione, quia videlicet quantum vis circulationis extinguit, tantumdem æquali tempore gignit. Quo ſatisfactum eſt tertiæ difficultati.

16. Reſtat quarta ratio, cui ſic occurro. Percuſſio ſive quæcumque finita vis gravitatem ſuperare debet, & in corpore gravi finitum effectum, licet aliquando non cadentem ſub ſenſus, generare non ob allatam rationem, quia gravitas eſt pura preſſio ideoque infinite parva ratione habita finitæ vis, ſed ob eas, quas mox afferemus. Nam ſi datur perfecta in æquilibrio quies, motum aliquem finitum gignat oportet, quia ſive vires contrariæ quod ad ſubſtantiam permaneant, ſive ſecus, res perinde eſt, ac ſi corpus quieſceret, nec vires, quæ ſe mutuo ſuſtinent, impedimento eſſe poſſunt, quominus alia finita vis corpori accedens ſuum conſequatur effectum num. 11. Sin vero in æquilibrio perfecta quies non eſt, ſed partes ultro citroque ſuas oſcillationes perficiunt, vel corpus percutiens incurrit in partem, quæ verſus eamdem plagam fertur ſed minori velocitate, & in hoc eventu ex regulis motus fit aliqua velocitatis quamtumvis parvæ, finitæ tamen acceſſio, vel in partem, quæ verſus contrariam aut omnino aut ex parte, & in hoc altero ſaltem aliquam ſimilis velocitatis deceſſionem fieri dictæ leges commonſtrant. Quæ cum ita ſint, manifeſto concluditur ex percuſſione nihil effici poſſe, quod gravitatem eſſe puram preſſionem illa infinite minorem ſuadeat.

17. Ceterum ſi hanc de preſſionibus quæſtionem magis ad vivum reſecare placeat, multo luculentius conſtabit eas non poſſe per ſe ipſas conſiſtere. Cum enim dicimus ita fluxu preſſionum, quarum alia aliis ſuccedat, generari vim vivam atque motricem, quemadmodum fluxu & motu ſuperficiei quadratæ ſecundum rectam lateri quadrati æqualem cubus generatur, advertendum eſt his eſſe ſubjectas notiones imaginarias, non autem reales, & puras demonſtrandi methodos ſignificari, non vero rationem, qua natura, ſive ejuſdem Auctor utitur in vi motrice efficienda. Nam cubus, qui ſubſtantia eſt, habet quidem terminos & modos ſive ſuperficies quadratas, ſed uti ſubſtantia ex iiſdem

iiſdem ita coalitis, ut alius aliis ſuccedat, nequaquam componitur §. 18. Quare ductu ſuperficiei quadratæ ſuper rectam verus cubus gigni non poteſt. Idcirco autem ſuperficies quadrata & altitudo cubi tamquam duo ipſius elementa idonea ad cubum ductu unius ſuper aliud efficiendum a Geometris ponuntur, quia, quod attinet ad rationem inter duos cubos, cujus illi cognitionem ſibi potiſſimum habent propoſitam, perinde eſt, ac ſi cubi fluxu baſis quadratæ in altitudinem gignerentur. Advertérunt enim primum cubum eſſe ad ſecundum, uti productum ex baſi primi in altitudinem primi ad ſimile productum ex baſi ſecundi in ejuſdem ſecundi altitudinem. Res ſimiliter accidit in negotio preſſionum. Vis motrix eſt aliquod abſolutum & permanens ſuos habens modos & terminos, in quibus incipit aut deſinit, quique dicuntur ejuſdem preſſiones. §. antecedenti. Quare vis ex puris preſſionibus tamquam partibus ipſam componentibus non coaleſcit. Talis autem foret, ſi fluxu preſſionum, quarum aliæ aliis ſuccederent, reipſa generaretur. Illarum ergo fluxu revera non gignitur, ſed a cauſſa efficiente, de qua ſuo loco, vis ipſa, quamtumvis minima, tota ſimul efficiatur oportet, in qua preſſiones tamquam ipſius limites reperientur; quemadmodum aliquis cubus, quantumvis exiguus, totus ſimul a Deo creetur neceſſe eſt, ex quo poſtea limites ſive ſuperficies quadratæ tamquam ea, quæ proxime & per ſe creari non poſſunt §. 119. num. 3. exſiſtent. Quæ ratio ducta a ſimilitudine inter vim & quantitatem extenſam eo plus habet momenti, quo evidentius ſupra monſtravimus vim motricem eſſe ex genere eorum, quæ proxime a Deo creanda ſunt. Manet ergo vim ex fluxu preſſionum reapſe minime oriri. Cum itaque dicimus eas hoc pacto generari, & duo vis elementa eſſe magnitudinem preſſionum & velocitatem, qua fluunt, infra dicemus, id non alia ratione intelligi volumus, niſi ea, quam Geometræ uſurpant in inveſtiganda menſura quantitatis extenſæ, quia ſcilicet ad noſcendam inter duas vires rationem perinde eſt, ac ſi vis eo pacto generaretur. Sed de hoc paulo poſt & alibi enucleatius, ubi compertum fiet nullam eſſe difficultatem, quæ adverſus hæc peti poſſit ex motus communicatione. Interim confirmata manet noſtra ſententia, quæ puras preſſiones ſine ulla vi in hac rerum univerſitate non poſſe conſtare ponit.

CAPUT QUINTUM.

De Virium æſtimatione.

§. 126. Propoſitio

ERgo manet omnes vires, quæ in rerum natura exſiſtunt, eſſe quantitates ejuſdem rationis, quamvis aliæ aut cum motu inſenſibili conjunctæ ſunt, aut etiam cum nullo, propterea quod viribus contrariis impediuntur. Reſtat nunc inquirenda menſura harum virium, quæ vivæ appellantur. Nam eſt de hac re non leve certamen inter eos, qui Carteſii partes, interque illos, qui Leibnitii cauſſam ſibi defendendam ſuſceperunt. Siquidem ii volunt vires in inæqualibus maſſis eſſe uti producta ex iiſdem maſſis in celeritates, ex quo ſequitur, ut in æqualibus ſint uti celeritates; hi autem uti producta ex maſſis in quadrata celeritatum; unde conſequens eſt, ut poſitis æqualibus maſſis vires rationem quadrati celeritatum ſequantur. Quamobrem ſi ſint duo corpora æqualia, & alterum celeritate $= 2$, alterum celeritate $= 1$ ferantur, primum habet vim in ſententia Carteſii ſolum duplo majorem vi 2', quia talis eſt etiam celeritatum 2 & 1 ratio; in ſententia vero Leibnitii quadruplo majorem, quod celeritatum 2 & 1 quadrata 4 & 1 eamdem rationem ſectantur. Ego in re tam controverſa inter ſummos Philoſophos primam meæ opinionis, quæ vires æſtimat juxta quadrata celeritatum, rationem eruam ex principio ab omnibus admiſſo, quamvis hoc pacto a poſteriori procedam, & hoc potius principium ab hac ſententia rationibus aliis a priori confirmata ſit eliciendum. Quorum utrumque in conſequentibus præſtabo, ut in gratiam eorum, qui contradicunt, rem ipſorummet principiis firmavero.

ARTICULUS I.

§. 127. **I. Ratio in Sententiam Leibnitii.**

AC primum fateor quidem hoc principium, quo maxime innitor, aliud non eſſe quam illud celebre reſolutionis cujuslibet vis in planum oblique nitentis in duas alias, quarum altera ſit parallela plano, altera vero eidem ad perpendiculum inſiſtat. Quod nolim huic cauſſæ præjudicium afferat apud lectores ob eam rationem, quod cum primus Bernullius (*Diſcours ſur le*

mouve-

mouvement tom. 3. *edit. Genevæ an.* 1741.) illud in hoc negotio uſurpaverit, Æques de Louville in Hiſt. Acad. Pariſienſis (an. 1728. pag. 82. edit. Pariſ.) Cl. Mairanus ibidem, & in Commentariis ejuſdem anni (pag. 1.) & Abbas Deidierius in Mechanica Generali lib. 1. cap. 4. §. 106. ad rationem inde erutam pro ſententia Leibnitii infirmandam plura congeſſerunt, & non paucis viris doctioribus probavere. Nam magnus alioquin Bernullius non ita ſuam cauſſam ab omni parte firmavit, ut nullus ad eam labefactandam pateret aditus, nec firmiſſimum telum, quod habebat præ manibus, ita contorſit, ut ab adverſariis amplius retundi non poſſet. Ego vero, ut facile eſt inventis addere, rationem hominis eo pacto conabor urgere, quod invictiſſimum eſſe futurum, & omnem probabilem contradicendi rationem recuſaturum confido, atque illam ita concludo.

Si corporum vires forent in ratione celeritatum, ſequeretur corpus vi finita percitum poſſe communicare vim illa, quam habet, majorem, & quidem in infinitum; ſi vero ſint in duplicata celeritatum ratione, in quacumque virium reſolutione ſemper conficitur non impertiri vim, niſi æqualem illi, qua primum impingit. Eſt autem abſurdum corpus vi finita præditum poſſe vim majorem & præſertim infinitam communicare, & rationi conſentaneum eſt poſſe tribuere ſolum vim illi, qua pollet, æqualem. Ergo Carteſianum ſyſtema, quod in hanc difficultatem incurrit, repudiandum eſt, & contra amplectendum ſyſtema Leibnitii, quod maximam Phyſicæ difficultatem de virium compoſitione & reſolutione mirifice explicat. Ita vero aſſumtum conficio.

2. Corpus A uno gradu celeritatis incurrat in planum immobile & durum BC (*Fig.* 32.) per rectam $AC = 1$ ita obliquam, ut perpendicularis AB ſit dimidiæ AC æqualis, ideſt $= \frac{1}{2}$, quod uſuveniet, cum angulus incidentiæ ACB 30 graduum fuerit. Cum corpus pervenit ad C, totam vim & celeritatem, rectæ AB quæ reſpondet, ideſt $\frac{1}{2}$ celeritatis & in ſententia Carteſiana $\frac{1}{2}$ vis cum plano communicat & amittit, & juxta leges ab omnibus receptas reſolutionis virium, retinet illam, quæ exprimitur

 per

per BC. Eſt autem $BC = \sqrt{\frac{3}{4}}$. Cum enim ſit $AC^2 = AB^2 + BC^2$, & ex hypotheſi $AC = 1$, & ideo $AC^2 = 1$, item $AB = \frac{1}{2}$, & ideo $AB^2 = \frac{1}{4}$, erit $BC^2 = \frac{3}{4}$, quo fiat $1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$, & idcirco $BC = \sqrt{\frac{3}{4}}$. Jam vero planum B C producatur uſque in E, ut fiat $CE = BC = \sqrt{\frac{3}{4}}$, & circa C E tamquam diametrum deſcribatur circulus, ad quem applicetur chorda C D $= AB = \frac{1}{2}$, & ab extremo D ad extremum E ducatur D E, quæ erit ad alteram perpendicularis. Hoc autem tamdiu fieri poterit, quamdiu C E fuerit major A B, ſive C D. Corpus itaque A ſi celeritate $= CE = \sqrt{\frac{3}{4}}$ progreſſum 2° temporis ſpatio a C feratur in planum durum & immobile E D, cum eo vim & celeritatem $CD = \frac{1}{2}$ communicabit & amittet, conſervabitque celeritatem & vim, quæ per rectam D E exponitur. Eſt autem $DE = \sqrt{\frac{2}{4}}$, quia cum ſit $CE^2 = CD^2 + DE^2$, & CE^2 ſit $= \frac{3}{4}$, $DC^2 = \frac{1}{4}$, debet eſſe $DE^2 = \frac{2}{4}$, & ideo $DE = \sqrt{\frac{2}{4}}, = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, quæ cum ſit adhuc major $AB = \frac{1}{2}$, quia denominator $\sqrt{2}$ eſt minor denominatore 2, poterit continuari & transferri in EG, & circa ipſam tamquam diametrum duci circulus, cujus altera chorda ſit $EF = AB = \frac{1}{2}$, altera F G pariter $= \frac{1}{2}$, quo quadratum $EG^2 = \frac{2}{4}$ fiat = quadratis $EF^2 + FG^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$. Quamobrem cum plano G F communicata

cata vi & celeritate , quæ exprimuntur recta $EF = \frac{1}{2}$, reſtabit in corpore alia celeritas & vis $FG = \frac{1}{2}$, ſive GS, quam cum plano perpendiculari in S communicare poterit. Ita fit, ut corpus A unum ab initio habens celeritatis gradum poſſit in plana immobilia quatuor $\frac{1}{2}$ celeritatis & vis $= 1$ transfundere , ſcilicet $AB + CD + EF + GS = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$. Unde conſequitur, ſi vires ſunt in ratione celeritatum, corpus præditum vi unius poſſe vim 2 cum planis communicare, ſi a primo ita oblique incidat, ut perpendicularis AB ſit $= \frac{1}{2}$.

Si vero minuto angulo ACB perpendicularis AB ſit $= \frac{1}{4}$, & ideo $BC = \sqrt{\frac{15}{16}}$, eadem ratione efficiemus, poſſe a corpore A unum gradum celeritatis & vis habente cum 16 planis ſexdecim $\frac{1}{4}$ communicari, $= \frac{16}{4} = 4$. Item ſi adhuc imminuto angulo ACB fiat $AB = \frac{1}{8}$, & idcirco $BC = \sqrt{\frac{63}{64}}$, ſimili modo conſequetur corpus A, cujus celeritas & vis $= 1$, poſſe tribuere 64 planis ſexagintaquatuor $\frac{1}{8} = \frac{64}{8} = 8$, & ex vi 1 gradus per reſolutionem educi vim 8 graduum , & ita in infinitum. Nam inde lex progreſſionis cognoſci poteſt , ſcilicet vi obliqua AC in perpendicularem AB ad planum , & parallelam BC reſoluta , tot celeritates & vires perpendiculari AB æquales poſſunt communicari, quot exprimit quadratum denominatoris ejuſdem celeritatis AB, ideſt ſi AB ſit $= \frac{1}{2}$, tribui queunt $4 \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$; quia quadratum denominatoris 2 eſt 4; ſi $AB = \frac{1}{4}$, planis impri-

mi poſſunt $16\frac{1}{4}=\frac{16}{4}=4$, quia quadratum denominatoris 4 eſt 16; ſi $AB=\frac{1}{8}$, excitari queunt $64\ \frac{1}{8}=\frac{64}{8}=8$, quia quadratum denominatoris 8 eſt 64. Seu brevius lex progreſſionis patefit, ſi dicamus tot vires & celeritates = primæ AC = 1 poſſe communicari, quot exprimit denominator AB, ideſt vim & celeritatem = 2, ſi $AB=\frac{1}{2}$; 4, ſi $AB=\frac{1}{4}$; 8, ſi $AB=\frac{1}{8}$; 16, ſi $AB=\frac{1}{16}$ &c. Si igitur angulus ACB in infinitum imminuatur, ut fiat $AB=\frac{1}{\text{infiniteſimæ}}$ celeritatis & vis AC, ut contingit in motu corporis in curvis, celeritates & vires = primæ AC tot communicabuntur, quot exprimit denominator fractionis $\frac{1}{\omega}$, ideſt infinitæ. Quod etiam conficitur alia progreſſione: nam poſita $AB=\frac{1}{\omega}$ primi gradus, ex dictis conſequitur tot celeritates & vires $=AB=\frac{1}{\omega}$ poſſe tribui, quot exprimit quadratum denominatoris ω. Quadratum autem infiniti primi gradus ex regulis Analyſis conſtat eſſe infinities infinitum, quia ω^{ω} eſt infinitum reſpectu ω. Quare numerus infinities infinitus, ideſt infinitus $2^{\prime}$ gradus exprimet, quot vices AB infinite parva communicari poſſit. Quantitas autem infinite parva $1^{\prime}$ gradus infinities ſumta facit quantitatem finitam, ſed infinities infinitis vicibus collecta quantitatem infinite magnam. Igitur ſi vires ſunt in ratione celeritatum, concluditur ex vi finita AC per reſolutionem tot duci poſſe, quæ ſimul collectæ quantitatem vis infinitam exæquent.

3. At poſitis viribus, uti ſunt quadrata celeritatum, id minime ſequitur, quia ſemper vires omnes ſimul collectæ & cum planis communicatæ vim primam AC^2 exæquant. Si enim celeritas $AC=1$ & $AB=\frac{1}{2}$, erit vis per AC in hac ſententia =

AC²

$AC^2 = 1$, intellecta unitate quadrata, & vis primo communicata per AB erit $= \frac{1}{4}$ vis totius $AC^2 = 1$; mirum igitur non eſt, ſi ſuperſint tres aliæ vires ſingulæ $= AB^2 = \frac{1}{4}$ cum tribus aliis planis communicandæ, quæ ſimul collectæ $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ non faciant niſi $1 =$ vi primæ. Si celeritas $AC = 1$ & $AB = \frac{1}{4}$, erit in hac ſententia vis per $AC = 1$, & vis per $AB = \frac{1}{16}$ vis primæ per AC; quia $\frac{1}{16}$ eſt quadratum $\frac{1}{4}$. Quid ergo mirum, ſi communicata ab initio ſolum $\frac{1}{16}$ parte vis per $AC = 1$, cum quindecim aliis planis communicandæ reſtant aliæ 15 $\frac{1}{16}$, quæ cum priori communicata ſimul ſumtæ non colligunt, niſi vim $= 1$? nam ex $16 \frac{1}{16}$ conſit 1. Si $AC = 1$ & $AB = \frac{1}{8}$, erit vis per $AC = 1$, & vis per $AB = \frac{1}{64}$ ſolum parti vis per AC. Nemo igitur miretur, ſi tributa vi per AB reſtant aliæ 63 æquales vi per AB totidem planis impertiendæ, ut vis per $AC = 1$ penitus exhauriatur. Id vero colligitur etiam ex natura hypothenuſæ AC, cujus quadratum AC^2 eſt $=$ quadratis $AB^2 + BC^2$; cum vero $BC^2 = CE^2$ ob eamdem rationem ſit $= CD^2 + DE^2$, erit $AC^2 = AB^2 + DC^2 + DE^2$; cumque $DE^2 = EG^2$ ſit pariter $= EF^2 + FG^2$, erit $AC^2 = AB^2 + CD^2 + EF^2 + FG^2$. Cum autem in ſententia Leibnitii vires ſint ut quadrata harum rectarum, quæ exprimunt celeritates, erit vis per $AC =$ iis quatuor in dato primo caſu $AB = \frac{1}{2}$; res autem ſimiliter conficietur in omnibus aliis caſibus. Demum ſi celeritas $AC = 1$ & $AB = \frac{1}{\omega}$ primi gradus parti ce-

leritatis per AC, vis per AC erit finita & $= 1$, & vis per

$AB = \frac{1}{\omega\omega} = \frac{1}{\text{infinities infinitæ}}$ parti vis per AC, quia quadratum $\frac{1}{\text{infinitæ}}$ eſt $\frac{1}{\text{infinities infinita}}$. Quid ergo mirum, ſi cum a principio ſolum una infinities infinitis vicibus minima pars totius finitæ vis per AC communicatur, aliæ reſtent numero infinities infinitæ minimæ 2^{i} gradus vires $= AB$ cum totidem planis communicandæ, quæ totam vim per AC colligant & exhauriant? Quod etiam conficitur illo Analyſis principio, quadratum rectæ finitæ AC eſſe quantitatem infinite magnam ſecundi gradus ratione habita quadrati rectæ AB infinite parvæ 1^{i}, quia quadratum AC^2 ad quadratum AB^2 ſe habet, uti AC ad tertiam proportionalem. Cum vero AC finita ſit infinite magna reſpectu AB infinite parvæ 1^{i} gradus, ut ſervetur proportio, tertia proportionalis debet eſſe infinite parva 2^{i}, ideſt infinite minima, ſi cum AB alioquin infinite parva comparetur. Igitur AC^2 eſt infinite magnum 2^{i} gradus, ſi ad AB^2 referatur. Quamobrem quadratorum æqualium quadrato AB^2 minimo 2^{i} gradus ſumma requiritur non infinita tantum, ſed infinitis vicibus infinita, quod a Geometris dicitur infinitum 2^{i} gradus, quo quadratum AC^2 eadem exæquare poſſit. Ex quo vides, etſi linearum AB infinities infinita ſumma rectam AC infinite ſuperet, tamen quadratorum ſummam rectarum ejuſdem gradus eodem genere quantitatis, ac quadratum AC^2, contineri. Cum vero ex altera parte Leibnitio vires ſint uti quadratum celeritatum ſive rectarum AC, AB, BC, & ex altera quadratum AC^2 hypothenuſæ AC ſit $=$ quadratis $AB^2 + BC^2$, & ideo in infinitum omnibus aliis, quibus BC^2 æquale eſt, nullus mirari debet, ſi cum a principio AB^2, ſeu vis illi reſpondens eſt una tantum infinities infinite parva pars quadrati AC^2, ſeu vis, quæ a primo corpori ineſt, reliquæ ſint aliæ infinities infinitæ parvæ vires $= AB^2$ cum totidem planis communicandæ, quæ ſimul collectæ vim AC^2 finitam exæquent.

4. Quibus liquido conficitur utraque pars ejus, quod aſſumſi priore loco. Nunc reſtat ſecunda, cujus abſurdum Mairanus & Fontenellus citato commentario declinare ſe putant, dum illud idem ex ſententia Leibnitii conſequi ajunt, quod attinet ad celeritates, itaque probant. Qui fieri poteſt, ut ſi pro planis corpora

pora elaſtica oblique incurrenti æqualia objiciantur, ex celeritate finita infinities infinita ſumma celeritatum minimarum 1ⁱ gradus, ideſt infinita ſumma earumdem exſiſtat? Sed nihilominus contendo a ratione abhorrere corpus vi finita præditum poſſe vim majorem & præſertim infinitam communicare, quod ex Carteſii opinione ſequitur, conſentaneum vero poſſe tribuere ſolum vim illi, quam habet, æqualem, tametſi celeritatum ſumma infinita inde oriatur, quod ex ſententia Leibnitii concluditur. Nullus enim Geometra ignorat ex ſolido finito non poſſe quidem elici per diviſionem plura ſolida minora, quæ ſolidum, unde educta fuerunt, excedant, & multo minus infinities infinita parva ſolida 1ⁱ gradus, ex quorum ſumma ſolidum infinitum conſiat; bene vero tot ſuperficies, quarum aliæ juxta alias poſitæ ſuperficiem infinitam componant, tametſi ante partitionem ſolidi ſuperficies minoribus atque finitis limitibus coerceretur: item neque ex ſuperficie finita plures & multo minus infinitas numero exiguas ſuperficies, quæ ſimul junctæ majorem aut infinitam in longum & latum extenſionem conficiant; bene vero tot lineas, ex quarum ſumma longitudo major etiam in infinitum coaleſcat, quamquam eadem ſuperficies minoribus iiſdemque finitis lineis antea contineretur. Quorum ratio eſt, quia parva ſolida, in quæ ſolidum diſpeſcitur, ſunt ejus partes & quantitates ejuſdem generis, quæque idcirco ſuo toto majora præſertim in infinitum eſſe non poſſunt; at ſuperficies ſolidi partes ſubſtantiales non ſunt, ſed modi tantum & quantitates diverſi generis a ſolido; cumque ſolidum in infinitum dividi queat eo ſenſu, quem §. 21. explicuimus, & diviſione ſuperficies ſemper augeatur, quin aliquid maſſæ accedat, mirum videri non debet per diviſionem tot minimas ſuperficies in finita maſſa poſſe inveniri, quæ ſimul junctæ ſuperficiem prima majorem etiam in infinitum efficiant. Hinc cubus conſideratur = producto ex uno libramento quadrato in altitudinem finitam, ſecundum quam ex infinitis punctis conſtantem ſunt infinitæ numero finitæ ſuperficies, quæ latitantes atque confuſæ diviſione ſecernuntur, & ita ſecretæ infinitam ſuperficiem componere queunt. Idem uſuvenit in ſuperficiebus, ſi cum lineis comparentur. Ita vero res ſe habet in vi. Quod ex vi finita ducantur tot minimæ vires ejuſdem generis ac illa, & ſolum magnitudine diſcrepantes, ex quibus vis major & præſertim infinita ejuſdem

generis

generis, ac prima, exſiſtat, id prorſus abſurdum eſt. Partes enim, in quas totum diſtribuimus, toto majores præſertim in infinitum eſſe non poſſunt. Vires autem cum planis, aut æqualibus corporibus communicatæ ſunt veræ partes vis primæ per A C, utpote ab illa eductæ, & ſola magnitudine diſcrepantes; eædemque ſimul coalitæ vim prima majorem atque etiam infinitam in Carteſii ſententia conficiunt. Igitur ex Carteſiana ſententia hoc magnum abſurdum conſequitur. At quod ex vi & celeritate finitis tot exiguæ celeritates eruantur, ut ſi earum ſumma colligatur, fiat priori celeritate ſumma major & veluti infinita, nihil repugnantis in eo eſt, quia celeritates illæ non ſunt partes, ex quibus vis conſtet. Siquidem jam oſtendi vim eſſe aliquid abſolutum a Deo proxime creatum diſtinctumque a celeritate, quæ eſt ipſa per ſe pura relatio ad ſpatium, quam exigit vis, & haberi poteſt pro modo ejuſdem §. 119. Immo naturæ rerum valde conſentaneum eſt, ut cum vis ſit ex iis, quæ ut proxime a Deo creata nec minui per ſe, aut interire, nec per ſe augeri, aut denuo oriri poſſunt §. 125. num. 10. corpus durum in plana, aut in corpora æqualis maſſæ data vi incurrens nonniſi vim æqualem illi, quam habet, communicet. Quod eſſe nequit, niſi vis per A C ſit ut quadratum celeritatis expreſſæ per A C, quia ex infinitis potentiis ſive perfectis, ſive imperfectis, ad quas A C poteſt attolli, ſolum quadratum hypothenuſæ A C eſt æquale quadratis laterum A B & B C, quemadmodum oſtendit Cl. Bulfingerus in Diſſ. de Viribus corpori moto inſitis ſect. 1. §. 4. tom. 1. Comm. Acad. Petropol. Ut igitur quia quadratum eſt = producto ex latere in ſemetipſum, infinita in eo latera & lineæ per ſectionem inveniri poſſunt, ita quia vis finita eſt = producto celeritatis in ſe ipſam, infinitæ celeritates diviſione fieri queunt. Nec enim ipſæ ducuntur ex priori celeritate, quæ finita eſt, ſed ex vi, quæ licet finita, tamen ut quantitas altioris ordinis, quam celeritas, infinitam celeritatum ſummam complectitur; quemadmodum in cubi diviſione infinitæ ſuperficies, quæ primæ æquales inveniuntur, non ex prima extima ſuperficie, quæ finita eſt, ſed ex potentia & veluti ſinu cubi originem trahunt. Quibus perſpicuum factum arbitror etiam id, quod 2° loco propoſui. Quare nihil aliud eſt reliquum, niſi ut ſyſtema Carteſii de virium æſtimatione in ratione ſimplici

Digitized by Google

plici celeritatum eſſe repudiandum, & aliud Leibnitii in ratione duplicata celeritatum eſſe amplectendum concludamus.

5. Sed nobis ex altera parte magna luctatio oritur cum Cl. Viris Equite de Louville, Mairano, Fontenello, & Deidierio, qui adverſus rationem ſumtam a virium compoſitione & reſolutione plura congeſſerunt, quorum tamen aliqua quidpiam momenti habent contra Bernullium, qui aliter, ac nos, eam rationem concludebat, nihil contra nos. Primo Mairanus citato commentario an. 1728. num. 55. ait compoſitionem & productum multum diſcrepare a ſumma ſimplicique additione; ſic numeros 1, 2, 3, 4, ſi alius in alium ducatur, facere 24; ſi vero alius aliis addatur, colligere ſolum 10, cum e contrario ſi numerorum 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ productum fit, exſiſtat $\frac{1}{24}$, ſi additio, exſiſtat numerus valde major $\frac{50}{24}$. Ex quo efficit nihil eſſe abſurdi, ſi vis in motu corporis, in quo ut productum reſidet, eadem non ſit, atque ut ſumma factorum, in quos reſolvitur.

6. Deinde numero 56 negat ex reſolutione vis vivæ in eas, ex quibus coaleſcit, quidpiam concludi, quod non æqualiter valeat in mortuas, ut ſi Bernullius hinc conficere velit vivas eſſe ut quadrata celeritatum, mortuas quoque eam tenere rationem recte inferatur. Nam ſi corpus grave ſupra inclinatum planum locetur, ejus preſſio in duas reſolvitur, quarum altera ad perpendiculum plano inſiſtit, altera vero ab eodem æquidiſtat.

7. Tum ad tempus confugit, obſervatque corpus, quod duplo majorem velocitatem quam alterum æquale haberet, quatuor elaſtra æqualia & firma, quæ Bernullius pro planis duris ponit, flexurum eſſe, ſed tempore duplo majori, quod, ut effecit idem Mairanus in incurſu corporum directo, non probat vires eſſe ut quatuor, ſed tantum ut duo.

8. Immo ſi pro elaſtris firmis quatuor globi elaſtici, quorum ſinguli ſint æquales incurrenti, ponantur, advertit num. 59. quatuor celeritatis gradus æquales iis tributum iri. Dicendum ne igitur eſt etiam celeritates eſſe, ut quadrata celeritatum?

9. Tandem monet celeritatem A C (*Fig.* 32.) non dare ſum-

ſummam virium in ratione quadrati ſuimetipſius; niſi cum hypothenuſa A C eſt dupla perpendicularis A B, hæcque ratio numeris 2 & 1 exprimitur, ut a Bernullio expreſſa fuit, idque propter fortuitam proprietatem numerorum 2, cujus quadratum 4 eſt duplum radicis, & 1, cujus quadratum cum aliis potentiis ſemper eſt unum. Nam ſi pro 2 & 1 ſumantur 1 & $\frac{1}{2}$, uti nos fecimus, vel 4 & 2, comperiemus celeritates & vires decompoſitas facere ſummam duplam primæ, non autem quadratum ejuſdem.

10. Hactenus Mairanus; Fontenellus vero in Hiſt. Acad. an. 1728. pag. 98. ſcite advertit in hac virium reſolutione latere quidpiam, quod in magnam difficultatem incurrit. Si enim in parallelogrammo ſumma laterum diagonalem excedit, & virium lateralium per diagonalem compoſitio ita, quemadmodum vulgo creditur, fit, ut quod eſt in iis contrarii, perimatur, quod vero congruentis, permaneat, qui fieri poteſt, ut quod corruptum eſt, renaſcatur? Re ſiquidem vera ſi in incurſu corporis in planum BC (*Fig.* 32.) per obliquam AC vere imprimitur plano vis $AB = 1$ in caſu Bernullii, qui ponit $AC = 2$, vel $= \frac{1}{2}$ in caſu noſtro, qui ponimus $AC = 1$, & retinetur vis per $BC = \sqrt{3}$ in priori caſu, vel $= \sqrt{\frac{3}{4}}$ in ſecundo, hæ vires ſimul ſumtæ vim per $AC = 2$, vel $= 1$ ſuperant, ſi ex ſententia Carteſii vires æſtimemus. Quod ut expediat, homo ſuſpicatur in compoſitione virium nihil interire, quomodo ſibi in animum Philoſophi vulgo induxerunt, ſed tantummodo vires in æquilibrio conſtitui, quo altera alterius actionem impedit in ea parte, qua contrariæ ſunt, idque tamdiu, quamdiu, ut ego explico, conjunctim agunt, ita ut non magis una, quam altera ſuam explicare poſſit actionem. Quod impedimentum ceſſat ſimul ac corpus iis viribus percitum in corpus aliud ita impingit, ut altera tantum illi opponatur, atque in illud ſe exerere queat.

11. Quia vero Deidierius aliam init viam in refutandis Bernullii rationibus, operæ pretium exiſtimo ſententiam hominis paucis

paucis exponere, ut liquidum fiat, utrum ea, quæ ab ipſo allata ſunt, rationes Bernullii, ut a nobis propoſitæ fuerunt, infirment. Is itaque primum Bernullio dat quatuor gradus vis a corpore A, quod duobus celeritatis gradibus per obliquam AC incurrit, cum planis communicari; ſed negat tum hos quatuor vis gradus duobus primitivis celeritatis gradibus gigni, tum in quatuor planis non impenſos fuiſſe, niſi duos celeritatis gradus, ut Bernullius arbitratur. Nam celeritatum & virium reſolutione fit, ut poſtquam corpus A (*Fig.* 32.), ex duobus celeritatis AC gradibus unum AB cum plano communicavit, non retineat unum tantum celeritatis gradum, ſed celeritatem BC $= \surd 3$, quæ celeritatem 1 excedit, & idem corpus latum per CE celeritate $= \surd 3$ poſtquam plano DE 1 gradum celeritatis impreſſit, non habeat reliquam celeritatem $= \surd 3 - 1$, ſed $= \surd 2$, quæ celeritas $\surd 2$ celeritatem $\surd 3 - 1$; itaque res procedat, ut quemadmodum oſtendit Deidierius, corpus duobus celeritatis gradibus a primo latum alios duos acquirat, quibus quatuor gradibus mirum non eſt, ſi quatuor gradus vis cum planis communicet. Ex quo ſequitur vires eſſe in ratione celeritatum.

12. Deinde concedit Auctor vim extinctam eſſe æqualem quadrato priſtinæ celeritatis 2; ſed cum hæc celeritas non complectatur niſi dimidium celeritatis, quæ hanc vim componit, hinc conſequens eſſe advertit, vim eſſe æqualem quadrato dimidiæ celeritatis; quod tamen non cadere ſubjicit niſi in præſentem caſum primæ celeritatis $= 2$. Si enim velocitas AC fiat $= 4$ & AB $= 1$, 16 quidem gradus vis cum planis communicabuntur, ſed 12 gignentur gradus velocitatis, qui cum quatuor primis juncti 16 gradus etiam velocitatis colligent. Quare vis in hoc caſu foret uti quadratum quartæ partis totius velocitatis, cum in ſuperiori exemplo eſſet uti quadratum dimidiæ. Ex quo concludit in his exemplis vim vivam nullam ratam & certam rationem habere cum velocitatis priſtinæ quadrato, cum e contrario ſemper ſit ut eadem velocitas partim priſtina, partim quæ in reſolutione exſiſtit.

13. Tum confugit ad id, quod aliis etiam obſervatum fuit, vires & celeritates componentes eſſe majores viribus & celeritatibus, quæ componuntur, atque reſolutione virium continuata augeri vim, & idoneam fieri cuicumque vel maximo

eſſe-

effecto ; quod æſtimationi Leibnitianæ virium vivarum minime favet , atque ut is rurſus concludit , numquam conficit vires eſſe ut quadrata celeritatum .

14. Demum ponit velocitatem A*d* (*Fig.* 32.) æqualem & parallelam velocitati CD , velocitatem A*f* æqualem & parallelam velocitati E F , tandem velocitatem A*s* æqualem & parallelam velocitati GS , itaque argumentatur. Celeritas AC ex quatuor æqualibus celeritatibus AB , A*d* , A*f* , A*s* componitur ; quare vis AC conſtat ex hiſce quatuor viribus mortuis , & ſi gradatim ſecundum has directiones in plana impingat , quatuor gradus vis vivæ quatuor gradibus mortuæ reſpondentes imprimit. Quod ſi corpus ſecundum directionem AC ſemper ſe exerat , tunc non tribuit niſi duos gradus vis, qui duobus reſpondent gradibus velocitatis , quos ſecundum eamdem plagam quatuor vires mortuæ exerunt. Igitur vires vivæ ſunt uti mortuæ. Vires autem mortuæ ſequuntur rationem velocitatum , quas efficere conantur . Ergo vires vivæ eamdem rationem ſimplicem ſequantur neceſſe eſt. Quod ſi vivæ ſint ut quadratum velocitatis ſecundum directionem AC, etiam mortuæ , ex quibus hæc celeritas AC conſtat , eamdem rationem ſequuntur. Id quod nec Leibnitius admittit .

15. Atque hæc ſunt , quæ Cl. Viri contra Bernullium congeſſerunt, ea tamen animi & verborum moderatione , quæ graves Philoſophos decet , quæque in eo genere hominum , qui Arti criticæ alioquin præſtantiſſimæ operam navant , jamdiu deſideratur. Ex his autem quædam pertinent ad id , quod aſſumſi priore loco, quædam vero ad id, quod ſecundo. Objecta primi generis etſi vim aliquam obtineant adverſus hanc pro ſententia Leibnitii rationem , quatenus a Bernullio concluſa fluit , nullam tamen habent adverſus eamdem , quatenus a nobis proponitur. Nam ſi ſententia Mairani contingit , vim eſſe ut quadratum velocitatis propter fortuitam ſolam proprietatem numeri 2 , quo exprimitur prima velocitas AC (*Fig.* 32.), & numeri 1 , quo prima reſoluta AB , non vero eſſe hujuſmodi , ſi aliis numeris quamvis in eadem ratione 1 & $\frac{1}{2}$, 4 & 2 illæ velocitates exponantur , ſi ſententia Deidierii nullam certam rationem habere vim vivam cum quadrato velocitatis deprehendimus , id valet in Bernullium , qui ex eo tantum , quod

quod poſita celeritate $AC = 2$, & $AB = 1$ ſequitur quatuor vires AB, ideſt quatuor gradus cum quatuor elaſtris communicari, vim eſſe ut quadratum velocitatis collegit, non vero in nos, qui certa progreſſionis lege detecta & indicata, quam conſtanter vis ad quadratum celeritatis referatur, oſtendimus. Nam factis celeritatum AC & AB quadratis iiſque inter ſe comparatis, ex ratione, quam quadratum AB^2 habet ad quadratum AC^2, colligitur, quota pars vis per AC primo tempore communicatur per directionem AB, quotve reſtent primæ AB æquales cum aliis planis communicandæ, ut totam vim per AC exhauriant. Quod efficit vires per AC & per AB eſſe ut quadrata celeritatum AC & AB. Id autem obtinet quocumque numero rationem duplam explicemus. Schema propoſitum rem oculis ſubjicit, quod attinet ad 2 & $\frac{1}{2}$. Quod vero attinet ad $4 = AC$ & $2 = AB$, facile confici poteſt communicata vi per AB reſtare alias tres vires ſingulas $=$ vi per AB tribus aliis planis impertiendas; & revera factis quadrato 16 numeri 4 & quadrato 4 numeri 2, intelligitur in noſtra ſententia primo tempore quartam totius vis partem tribui, & ideo alias tres quartas remanere non minus, quam cum AC ponitur $= 2$ & $AB = 1$, vel $AC = 1$ & $AB = \frac{1}{2}$. Quamobrem cum certa lex in ſententia Leibnitii appareat, quæ in alia ſententia nullimode figi poteſt, jam objecta primi generis nullum amplius locum habere poſſe concluditur.

16. Veniamus igitur ad objecta ſecundi, quibus efficere conantur nihil repugnantis eſſe in eo, quod ex aliqua vi per reſolutionem vires illa majores educantur. Diſcrimen illud inter additionem ac productum aliquid afferret momenti, ſi quæ vires laterales AB & BC (*Fig.* 32.) in reſolutione altera alteri addita a Mairano putantur, & in conjunctione per diagonalem AC veluti productum alterius in altera æſtimantur, revera facerent vim per AC, ſi invicem ducerentur. Nunc vero cum ducta vi per $AB = \frac{1}{2}$ ſententia Mairani in vim per $BC = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, non exſiſtat 1, ideſt vis per $AC = 1$, ſed

ſed $\frac{\sqrt{3}}{4}$, qui numerus utpote minor quam $\frac{1}{2}$ eſt multo magis minor $1 = AC$, non video quid ad ſummam quæſtionem & ad infirmandam Bernullii rationem conferat objicere ſummam virium in decompoſitione per laterales AB, BC aliam eſſe a producto earumdem, cum vires in diagonali AC conjunguntur.

17. Majoris difficultatis ſpeciem habet, quod num. 6. in Leibnitianos retorſit, nec ſine cauſſa id Mairano tanti viſum eſt, ut quamvis multi docti Philoſophi lecta Bernullii diſquiſitione in virium vivarum ſententiam deſcenderint, tamen ob id unum a primo aſſenſum ſe ſuſtinuiſſe litteris conſignarint (citato comm. n. 56.) Ut hæc primum legi, fateor, nihil propius eſt factum, quam ut ad Carteſii caſtra, in quibus Philoſophiæ tyrocinium poſueram, & aliquot annos militaveram, redirem. Tam inenodabile mihi hoc videbatur certam exiſtimanti communem ſententiam, quæ ponit exſiſtere ſeorſim puras preſſiones, quæ ſint quantitates diverſi generis a viribus cum motu conjunctis. Sed revocatus ratione, quam pro viribus vivis propoſui, memetipſum cohibui, & in hac re ita meum ingenium contudi, ut tandem elicuerim id, quod capite ſuperiore monſtravi, puras preſſiones in eo ſenſu, ut ſint quantitates diverſi generis a viribus cum motu conjunctis, nequaquam ſine fluxu atque ideo ſine vi, quæ ſit ejuſdem generis, ac viva, in hac rerum univerſitate exſiſtere poſſe, & ſimul veram & unam ſolvendæ difficultatis rationem. Si enim cum grave in planum inclinatum incumbit, gravitas fluit & in vim ejuſdem rationis, ac viva, degenerat, quid mirum, ſi inſtar vis vivæ in duas laterales reſolvitur? Nec hoc loco objiciendum eſt vires gravitatis, cujuſcumque demum generis ſint, in lancibus eſſe in ratione maſſarum & ſimplicium celeritatum; nam id alio loco refutandum eſt, cum ſcilicet expendemus, cur in colliſione corporum durorum, ad quem caſum reducemus æquilibrium §. 201. etiam vires in omnium ſententia vivæ ſolum in ratione ſimplici celeritatis ſe exſerere videantur.

18. Mitto, quod Mairanus objecit de celeritatibus; quia jam expendimus, quare cum ratione non pugnet majorem ex aliqua certa celeritate, ſeu melius ex vi certi definitique gradus

velo-

Digitized by Google

velocitatem habentis celeritatem educere ; & ad Fontenellum, qui rem hanc acu tetigit, venio. Si Vir Cl. putaret vires, quæ reapſe per duo latera ad angulum rectum oppoſita in corpore gignerentur, quatenus contrariæ ſunt, non ſe perimere ſed in æquilibrio conſtitui, ejus opinionem non improbarem. Nam ſi perfectum æquilibrium in rerum natura datur, vires contrarias in corpore exſiſtere nec ſe corrumpere jam inſinuavi §. 125. num. 13. & 14. tametſi contrarium ut verius ibidem probarim, quod ex altera parte pura preſſio, quæ non fluat, conſtare non poteſt, ex altera vis ipſa per ſe vim proxime a Deo creatam deſtruere nequit. At ſi, quod ad infringendam noſtram rationem opus eſt, impreſſa corpori vi ſolum per diagonalem AC (*Fig.* 32.) ex. gr. virtute unius elaſtri ſe expandentis ſecundum plagam AC, vult exſiſtere & excitari in ipſo vires laterales AB & BC, quarum illa pars, quæ contraria eſt, æquilibretur, atque in infinitum omnes alias laterales, cum primum planum BC ad angulum ita acutum BCA concurrere ponitur, ut ſit AB infinite parva, mihi hoc ſyſtema tolerabile non videtur. Qui enim fieri, immo fingi poteſt, ut in communicatione unius vis per AC infinitæ laterales communicentur, quæ ſimul acceptæ ſummam vis infinitam colligant? Quid quod aliquando vis ultima FG, ſive GS eſt in plagam omnino oppoſitam vi priſtinæ per AC ſin minus in caſu, quem exprimit ſchema, ſaltem in poſitione primæ perpendicularis AB minoris, quam ibidem ponitur? Num dicet in excitanda una vi ſecundum plagam AC imprimi etiam aliam vim ſecundum plagam omnino contrariam, quæ ſuam virtutem non explicet, niſi omni vi ſecundum plagam AC cum planis communicata? Immo etiam in caſu ſchematis quadamtenus id fieri poteſt. Nam ſi GS parallela ducatur rectæ CA, & ab E ducatur ad illam perpendicularis, deſtructa vi perpendiculari reſtabit aliqua pars per GS in plagam contrariam directioni per AC. Quare ne in hæc ita ab omni aliena ratione incidamus, nihil aliud eſt reliquum nobis, niſi ut Leibnitii complectamur ſententiam, in qua cum in omni reſolutione virium non communicetur niſi quæ prius erat in corpore, omnia cum aliis principiis conveniunt, & præſertim cum eo, quod in aliis quantitatum continuarum generibus uſuvenit. Hic ſolum adverto, quod alias ex profeſſo tractabitur, ſi Carteſiani aliqua ratione ſine adminiculo virium vivarum Leibnitii corpus duabus viribus

ad angulum contrariis percitum diagonalem parallelogrammi eodem tempore abſolvere debere conficerent, aliquam meo judicio latebram in earumdem reſolutione virium haberent. Sed jamdiu eſt, cum præſtantes Viri agnoverunt nihil effici a Carteſianis, dum ex poſitione celeritatum in lateribus compoſitionem earum in diagonali derivarunt; atque huic prope depoſitæ parti Philoſophiæ opem ferre conati ſunt; quam aliunde accerſiri non poſſe, quam ab æſtimatione virium ſecundum quadrata celeritatum, in conſequentibus demonſtrabo. Quamobrem non video, quid in hac virium reſolutione, quæ cum ſententia Leibnitii tam arcte cohæret, præſidii poſſint habere Carteſiani ſyſtematis defenſores.

19. Antequam ad Deidierium accedam, revertor ad Mairanum, quod e memoria excidit illud reſponſum, quod is a longiori tempore petiverat. Cui breviter ſic occurro. Si Mairanus in majori tempore momentum aliquod ponit in iis viribus, quæ jugiter fluunt, & novos a ſua cauſſa ictus indeſinenter recipiunt, non repugno, quod quo longiori tempore motus corporum, quæ hiſce viribus percelluntur, durat, eo plures preſſiones & impetus, ex quibus major generatur vis, accipiunt; ut accidit in gravi cadente. At in iis viribus, quæ jam communicatæ ſunt, & a ſua cauſſa non reſtaurantur, qualis ponitur vis corporis A per AC ſemel pulſi, arbitrari quidpiam ad majorem vim communicandam conferre diuturnius tempus, quo illa communicatio peragitur, non eſt illius, qui compertum habere debet partes, quæ ex finita certaque quantitate ſubducuntur, eaſdem eſſe & æqualem ſummam conficere, ſive breviori tempore, ſive longiori detrahantur. Nec ſimile eſt, quod eodem commentario reſpondit ad Leibnitianam rationem ductam ex eo, quia ſpatium a gravi duplo tempore confectum eſt ad ſpatium peragratum tempore $= 1$ in ratione duplicata celeritatum & temporum, ideſt ut 4 ad 1. Nam majus ſpatium confectum majori tempore non eſt intenſive majoris vis indicium, ſed ſolum extenſive, ſcilicet vis majori tempore durantis. At in noſtro caſu corpus pulſum per AC celeritate $= 1$ (*Fig.* 32.), in quatuor maſſis, quarum ſingulæ ſint ipſi æquales, $\frac{1}{2}$ ſuæ celeritatis gignit. Quare ſi in ſententia Carteſii vis eſt productum ex maſſa in celeritatem, id argumento eſt duplo majorem & quidem inten-

tenſive vim majori tempore fuiſſe generatam. Tempus autem nihil habet, quod ad vim intenſive augendam conferat. Igitur nihil ex tempore duci poteſt, quod elevet rationem a nobis concluſam.

20. Sed propius accedo ad Deidierium & primum ajo, non aliam ob cauſſam ex prima celeritate AC (*Fig.* 32.) duorum graduum duos alios elici gradus, ut quatuor exſiſtant, niſi quia vis eſt genus continuæ quantitatis diverſum a celeritate, ideſt ut infra magis perſpicuum faciam, conſtans ex preſſionibus in celeritatem, qua fluunt, ductis, tamquam ex elementis. Cum vero quælibet continua quantitas in partes & elementa infinita dividi queat, mirum non eſt, ſi ex vi finita finitam celeritatem habente alii atque alii velocitatis gradus in infinitum elici queunt. Ita non aliam ob cauſſam ex quadrato finitis longitudine & latitudine circumſcripto & in partes diſpecto infinitæ longitudines ſive rectæ in longum extenſæ ducuntur, niſi quia ex altera parte quadratum eſt genus quantitatis continuæ diverſæ a rectis & conſtantis ex rectis infinitis tamquam elementis, ex quorum fluxu generatur, & ex altera rationem rectarum ſive laterum aut peripheriæ non ſequitur. Nam, ex. gr. quadrato in quatuor quadrata diviſo peripheria dupla fit, area tamen eadem manet. Simili modo res hic ſe habet. In reſolutione virium aliquid accedit velocitati, tantumque accedere poteſt, ut infiniti gradus inde exſiſtant. Nulla vero eſt ratio, cur vis aliquod incrementum, præſertim infinitum, accipiat. Neque enim majus tempus, quo vis ſe exerit, cum corpus projectum oblique incidit in planum, quidpiam, ut modo conſeci, conferre poteſt ad virium augmentum. Quare tantum abeſt, ut ex eo, quod in virium reſolutione novi gignantur celeritatis gradus, quidpiam effici poſſit, quod ſit e Deidierii ſententia, ut maximum contrariæ ſententiæ momentum inde accedat.

21. Deinde ſi forent duo quadrata A & B, quorum majoris A latus eſſet duorum pollicum, minoris B unius, & Deidierius ex eo, quod quadratum A diſpeſci poteſt in quatuor quadrata æqualia, quorum quodlibet ſit æquale quadrato A, concluderet quadratum A eſſe quadruplum quadrati B, atque idcirco in ratione duplicata laterum, ſive peripheriarum; alius vero contradiceret, affirmaretque quadrata ſequi rationem ſimplicem peripheriarum, eo quod quadrato A in quatuor quadrata diſpecto augetur etiam atque, ut conſtat, duplo major ſit ejus peripheria,

quæ cum ante ſectionem peripheriam quadrati B duabus partibus ſuperaret, ea peracta quatuor excedit, ita ut quadrata ſemper rationem peripheriarum ſequantur, ſi alius, inquam, hæc contradiceret, tria reſponſurum hominem puto. Primo non affirmare Geometras quadrata rationem habere duplicatam quarumcumque peripheriarum, quæ per diviſionem exſiſtunt, ſed earum tantum, quæ in quadratis non ſectis ab initio ſunt; deinde ex illo ipſo, quod aucta per diviſionem peripheria minime creſcit quadratorum area, confici poſſe quadrata rationem peripheriæ ſimplicem non habere; tertio ſi quadratum B in quatuor ſimiliter quadrata partiamur, omnium quatuor quadratorum, ex quibus A componitur, peripherias eſſe duplas tantum quatuor quadrati B ſecti circumferentiarum, nihilo tamen minus areas arearum eſſe quadruplas. Quia vero res ſimiliter cadit, cum ad Bernullii demonſtrationem illud de novis celeritatis gradibus ex reſolutione virium ortis Deidierius opponit, idcirco iiſdem fere reſponſionibus utor. Primo cum Leibnitiani digladiantur cum Carteſianis in definienda quantitate vis corporis duos celeritatis gradus habentis ratione habita alterius, quod ſolum uno gradu cieatur, de hoc uno contendunt, utrum illarum a primo celeritatum 2 & 1 rationem ſimplicem, an duplicatam habeant: ad id autem definiendum nihil referre, utrum illæ ſint totæ celeritates, quæ in viribus corporum reperiantur, nec ne. Deinde ex eo ipſo, quod ut paulo ante dixi, vires corporum in plana incurrentium ſunt certi gradus, & celeritatum gradus in infinitum variari poſſunt, & facto angulo ACB (*Fig.* 32.) in infinitum minori, infinities infiniti numero, ſed quantitate minimi 2ⁱ ordinis cumulantur, concludi poteſt rationem virium aliam omnino eſſe, atque eſt ratio celeritatum. Tertio ſi poſita celeritate $AC = 2$ & $AB = 1$ ideſt dimidiæ parti, quatuor eliciuntur gradus celeritatis, ita ut celeritas fiat duplo major, ita etiam poſita $AC = 1$ & $AB = \frac{1}{2}$ ſervatoque eodem angulo, pariter $4\frac{1}{2}$ elici poſſunt, quæ colligunt celeritatem $= 2$ duplam celeritatis primæ $= 1$. Velocitates igitur eamdem rationem duplam tuentur. Reſtat igitur inquirendum, utrum eamdem teneant etiam vires, an vero duplicatam. Quod ex ratione jam expoſita & ex iis, quæ mox exponentur, dijudicandum eſt.

Quod

Quod attinet vero ad collationem virium vivarum cum mortuis, ſatis hunc explicui locum, cum Mairani commentarium expenderem.

ARTICULUS II.

§. 128. II. Ratio in ſententiam Leibnitii circa vires vivas.

QUæ cum ita ſint, mihi liquere videtur a poſteriori, ut ajunt, vires motrices æſtimandas eſſe quadrato celeritatum, ſive preſſionum, quæ quamvis ſine viribus eſſe non poſſint, tamen uti lineæ a quadrato, & quadratæ ſuperficies a cubo, cogitatione ab iiſdem ſecerni queunt non ſine fundamento in ipſamet re. Nunc ratione docendum eſt, quæ a priori ducatur. Qua in re illa conabor afferre, quæ non ſolum efficiant vires eſſe ut quadrata celeritatum, verum etiam claram & evidentem rationem & explicantem modum, quo vires in ea proportione generentur, contineant. Arbitror enim multos eam præſertim ob cauſſam in ſententiam non deſcendiſſe Leibnitii, quod plurima paradoxa & a communibus abhorrentia rationibus per Leibnitium inducerentur. Quorum ſpeciem opus eſt ut clara explicatione modi, quo vis generatur, elevemus. Ac primum explico quo fundamento preſſionem a vi cogitatione diſtinguamus, etſi de hoc etiam egerim §§. 123. 124. idque repeto a modo, quo tres quantitatis extenſæ ſpecies alias ab aliis ſecernimus, tametſi aliæ ſine aliis revera exſtare non poſſint. Primum in rectangulo longitudinem ab altitudine ob hanc rationem internoſcimus, quod longitudo eadem manet, ſive in infinitum producta altitudine quantumvis magnum ſpatium illorſum occupet, ſive in infinitum partibus multata quantumvis exiguum. Deinde ſi alterum rectangulum cum altero, quod ſit duplo longius, comparemus, qualeſcumque fuerint & quantumvis aut parvæ, aut magnæ altitudines & ſpatia ab iis ſecundum altitudinem occupata, ſemper alterum altero duplo longius eſt. Ita ſe res habet in preſſionibus & in vi. Nam ſi ad obicem S Z nitatur altero brachio B A elaſtrum (*Fig.* 35.) compreſſum A B C, & altero B C premat corpus C, & ſe explicans vim in eodem gignat; id, unde illa vis generari incipit, idem propemodum eſt, ſive multum, ſive parum elaſtrum ſe expanderit, & ideo ſive magna, ſive parva vis in corpore fuerit generata. Quod ſi corpus C ſimplici elaſtro A B C, & corpus M pelli ponatur duobus conjunctis, ut ſchema exhibet, quorum ſingulorum vis premens

Digitized by Google

vim elaſtri A B C exæquet, id, unde incipit gigni vis corporis M, duplo majus eſt eo, unde ſumit initium vis corporis C, quædemumcumque ſint ſive magnæ ſive parvæ vires, quæ in hiſce corporibus generantur.

2. Quare preſſio diſtinguitur a vi, uti rectangulum a linea recta. Unde conſequitur, quemadmodum rectangulum fluxu parallelo lineæ rectæ generatur, ita vim gigni fluxu preſſionum, quarum aliæ aliis ſuccedunt. Ob illud enim, quod elaſtrum ſe expandens corpora brachio mobili admota per aliquod tempus premere pergit, vis aliqua finiti gradus in iiſdem exſiſtit. Ex quo aliud etiam colligitur, ad quantitatem duarum virium noſcendam tria eſſe attendenda, quantitatem ſive intenſionem ipſam preſſionum, quibus vires gignuntur, celeritates, quibus preſſiones fluunt, & tempora, quibus fluxus durant, & ſi tempora æqualia ſunt, duo prima, intenſionem preſſionum & celeritatem. Nam quemadmodum duplo majori recta, quæ duplo majori celeritate feratur, quadruplo majus rectangulum eodem tempore gignitur, eo quod duplo majori celeritate fit, ut rectarum duplo majorum duplus etiam numerus exſiſtat, quod ſummam quadruplam colligit; ita dupla preſſione, quæ dupla celeritate eodem tempore fluat & migret in corpus M, quadruplo major vis in eodem creatur, quam ſi duplo minori preſſione A B C idem pellitur, propterea quod vis eſt ſemel & iterum dupla; ſemel, quia preſſiones primæ ſunt duplo majores ſingulis preſſionibus A B C, iterum, quia propter duplam celeritatem earumdem preſſionum duplo major numerus cum corpore M communicatur. Quod ſi ſingulæ preſſiones in duobus corporibus ſint æquales, & nihilominus aliæ aliis duplo majori celeritate fluant, hæ generabunt vim duplo majorem; quemadmodum ſi ex foraminibus æqualibus æquales aquæ quantitates ſingulis momentis effluant, ſed ex altero duplo majori velocitate, ex altero duplo minori, nemo eſt, qui non videat hinc conſequi duabus partibus majorem aquæ copiam ex foramine primo effluere, quam eodem tempore ex altero duplo minori celeritate exſiliat.

3. His poſitis cum Bernullio tom. 3. Oper. edit. Genev. N. CXXXV. *Diſcours ſur le Mouvement* §. 21. ſint duo corpora inæqualium maſſarum A = 4, B = 2 (*Fig.* 33.), & quod ſchema non exhibet, in C poſita intelligantur, ita ut ſex elaſtra omnino compreſſa æqualis magnitudinis atque virtutis

inter

inter illa intercipi percipiamus. Quæ elaſtra cum diducentur, corpora repellent A & B, alterum dextrorſum, alterum ſiniſtrorſum, quoad omnino diducta fuerint; cumque preſſiones ſint æquales utrimque, quod elaſtrum in utramque partem æquali niſu ſe exerit, & maſſæ inæquales, erunt celeritates in ſingulis momentis acquiſitæ in ratione inverſa maſſarum, atque ideo ſumma omnium celeritatum diductione completa, ideſt celeritas corporis A erit ad ſummam omnium celeritatum, ideſt ad celeritatem corporis B, ut B ad A, ſive ut 1 ad 2. Quare quæ preſſiones in corpore A maſſæ duplo majoris celeritate duplo minori fluunt, eædem ſive æquales & æquali tempore in corpore B maſſæ duplo minoris celeritate duplo majori feruntur. Ergo quemadmodum ſi ex duabus rectis æqualibus, quæ tempore æquali ſuper aliam moventur, altera duplo citius feratur, hæc rectangulum duplo majus efficit; ita cum preſſiones fluentes ex parte CB ſint quidem intenſione æquales fluentibus ex parte CA, ſed eodem tempore progrediantur & ab elaſtris effluant duplo majori celeritate, numero duplo plures eſſe, & ideo duplo majorem ſummam ſeu vim vivam gignere debent. Quod confirmatur, ſi quatuor elaſtra CB poſueris disjuncta a duobus CA. Nam quo tempore duo elaſtra CA in ſpatium duplo minus ſe exerunt, & in maſſa A = 2 celeritatem = 1 efficiunt, eodem quatuor elaſtra CB ſejuncta ab elaſtris CA in ſpatium duplo majus ſe explicant, & in maſſa B = 1 celeritatem = 2 gignunt; quod cadit in ſingula puncta ſpatii CB, quæ a puncto C, unde elaſtra incipiunt ſe expandere, duplo magis abſunt, quam totidem puncta ſpatii CA ab eodem C diſtent. Rationi autem conſonum eſt, ut quatuor elaſtra duplo majorem vim communicent, quam duo, quæ eodem tempore ſe exerant; præſertim cum ſingulis tempuſculis preſſiones ipſæ per ſe ſint æquales, ſed in quatuor elaſtris duplo majori velocitate fluant, in duobus autem duplo minori.

4. Ad hanc rem facit etiam experimentum Muſſchenbroechii tom. 1. *Eſſai de Phyſ.* pag. 181. Sumtum eſt ab homine elaſtrum ad certum quemdam gradum compreſſum, eique admotus cylindrus cavus, qui, obice amoto, ab elaſtro ſe expandente ita pulſus fuit, ut celeritatem 10 graduum, quos ſcala celeritatum metitur, acquireret. Cum vero maſſa plumbea in cavitate cylindri reponebatur, ut tota maſſa pellenda

 duplo

duplo gravior fieret, & experimentum eadem expoſita ratione tentabatur, in dupla maſſa celeritas 7 grad. & 7 minutorum exſiſtebat. Cum denique maſſa quadruplo gravior fiebat, ſola celeritas 5 graduum cum eadem communicabatur. Quo experimento primum compertum fit celeritates eſſe in ratione inverſa ſubduplicata maſſarum; nam maſſæ ſunt 1, 2, 4, celeritates vero 10., 7. 7., 5, qui poſteriores numeri ſunt in ratione inverſa ſubduplicata priorum. Quod ratione a priori planum faciemus, cum de vi elaſtrorum ex profeſſo tractabimus. 2°. vires ab eodem elaſtro ad eumdem gradum compreſſo cum tribus diverſis maſſis communicatas eſſe futuras æquales, ſi vis in ſententia Leibnitiana ponatur æqualis producto ex maſſa in quadratum velocitatis; nam

in 1 Experimento eſt $V = 1 \times 10 \times 10 = 100$
in 2 $V = 2 \times 7.7. \times 7.7 = 100$ fere
in 3 $V = 4 \times 5 \times 5 = 100$

3°. vires eſſe inæquales, ſi cum Carteſio æſtimentur ex producto celeritatis in maſſam; nam

in 1 $V = 1 \times 10 = 10$
in 2 $V = 2 \times 7.7. = 14$, & aliquid amplius.
in 3 $V = 4 \times 5 = 20$

Unde apparet vires haud eſſe æquales, ſed in ratione directa ſubduplicata maſſarum; cum enim maſſa eſt 1, vis eſt 10, cum maſſa eſt 4, vis eſt 20; ſed numerus 10 ad numerum 20 eſt in ratione ſubduplicata 1 ad 4. Quamobrem ſi ab expoſito elatere vires æquales proficiſci debent, id aliter eſſe non poteſt, quam in ſententia Leibnitii. Re autem vera elaſtrum vires æquales exerat neceſſe eſt. Nam ut argumentatur Muſſchenbroechius, elaſtrum eſt idem, ejuſdem determinatæ vis, eodem modo compreſſum, eodemque maſſis pellendis applicatum. Qui igitur fieri poteſt, ut vires diverſas in corporibus excitet? fac hominem 100 vires habere; ſive multum, ſive parum temporis in iis exerendis impendat, plus 100 virium communicare non poteſt: fac lapidem lapſu definitam celeritatem & vires ex. gr. 100 acquiſiviſſe; ſive in argillam duram incidat, in qua parvam foveam facit, & parum temporis inſumit, ſive in mollem, in qua profundiorem & longiori tempore excavat, ſive in planum ex lana ſubtili, in quo adhuc altiorem cavitatem efficit, & in ea facienda majori temporis intervallo opus habet, in his tribus eventi-

eventibus argillæ duriuſculæ , mollis , & lanæ nec plus nec minus quam 100 vires impertit. Quid ni ergo idem cadat in elaſtrum , quod ad certum gradum compreſſum vi pollet definiti gradus ? Quod ſi fingamus dicta tria corpora celeritate , quam ab elaſtro ſe expandente acceperunt , in elaſtrum expanſum recurrere , multo magis æqualitas virium confirmabitur. Intelligemus enim a ſingulis elaſtrum ad eumdem omnino gradum compreſſum iri , a quo cum idem remitti incipiebat , eam in corporibus diverſæ maſſæ celeritatem efficiebat. Unde effectum eumdem atque ideo vires æquales facile concludemus .

5. Hæc Muſſchenbroechius , quæ infirmari poſſunt afferendo diſcrimine, quod eſt inter actionem illorum corporum, quæ habent quidem vim vivam , ſed illiuſmodi , ut a propria cauſſa minime reſtauretur , ſi quid ejuſdem vis in alia corpora migrat , ut cum globus in alterum globum , aut in planum molle incurrit ; interque actionem illorum , quorum amiſſæ vires indeſinenter a ſua cauſſa reſtaurantur , cujuſmodi ſunt elaſtra , dum in globos ſe explicant. Prima enim cum corporibus , in quæ incurrunt , communicare non poſſunt , niſi aut partem illius definitæ vis , quam habent , aut ad ſummum totam, ſed nihil amplius. Quam enim communicant, amittere debent. Unde ſi totam tribuerint , nullam ejus partem retinent , nec aliam , ut ponitur , aliunde recipiunt , quo alii communicandæ idonea fiant. Quamobrem in hiſce corporibus nihil refert , quo tempore vires ab alio in aliud migrent , ut virium quantitatem metiamur , quia tempus vim definiti gradus per ſe nec augere nec minuere poteſt ; quemadmodum ſi definita quædam aquæ menſura cratere contineatur , & in alium transfundenda ſit , ad ejus quantitatem noſcendam nihil attinet ſcire, quantum temporis in transfuſione liquoris impenſum fuerit. At res aliter eſſe videtur , cum agitur de corporibus , quæ cum cauſſa pellente jugiter conjuncta ſunt , quorumque vires indeſinenter reficiuntur. Quo enim longiori tempore manent in eo ſtatu , quo novos & plures a cauſſa motrice ictus accipiunt , eo majorem vim recipere debent & eo majorem communicare. Ita videmus corpus grave in deſcenſu ab altiori loco plus virium acquirere , eo quod plus temporis impendit , & ideo plures elementares plagas , ex quibus major exſiſtit vis , recipit a gravitate. Finge corpus gravitatis expers

Digitized by Google

pers ſubjectum corpori gravi, quod deſcendere incipiat. Sane plus temporis, quam ſi ſolum grave foret, interfluxerit, antequam fundum attingat, quod tota maſſa ex gravi & non gravi conflata minori celeritate feratur neceſſe eſt, quam ſi ſolum grave deorſum peteret. Quidni ergo plures æquales ictus accipiat a gravitate atque idcirco majorem vim? Nonne hic res ſe habet, ſicut in fonte perenni? In quo ſane temporis ratio habenda eſt, quia cum nova perpetuo aqua ſuppeditetur, perinde ac ſi nihil ante fluxiſſet, pro majori tempore major aquæ copia erumpat oportet. Jam vero corpori gravi deſcendenti major adhuc maſſa propemodum iners opponatur, indeque fiet, ut minori celeritate atque ideo majori tempore ſpatium idem, ac antea, corpus emetiatur. Quamobrem eodem modo confici poteſt plures ictus æquales eſſe futuros, atque ex pluribus ictibus majorem vim iri conflatum.

6. Quibus conſtitutis duo animadverto, quorum alterum eſt, corpora elaſtica in eorum numero eſſe ponenda, quorum vires a ſua cauſſa perpetuo & indeſinenter reſtaurantur, quia vis elateris eſt ejus naturæ, ut quidquid ab ea fuerit amiſſum, continuo reſarciatur; alterum vero, tempus, quo major maſſa urgetur & premitur, ad tempus, quo minor ab eodem elaſtro pellitur, ſe habere in ratione ſubduplicata directa majoris maſſæ ad minorem, ut alibi planum faciemus. Quamobrem iis, quæ modo concluſa ſunt, cum recta ratione haud pugnare conficitur, ſi cum elaſtrum in pellenda maſſa quadruplo majori duplo plus temporis inſumit, cum eo duplam communicet vim. Quemadmodum nec pugnare oſtenditur, ſi quæ elaſtra idem tempus in pellendis æquali preſſione duabus maſſis impendunt, illa cujuſcumque demum numeri ſint, vi æquali maſſas impertiant.

7. Hæc vero mihi videntur poſſe elevare momenta & rationes Muſſchenbroechii & Bernullii, niſi alio modo contorqueantur. Quod ut præſtem, inſiſto in illo eodem, quo Adverſarii uti poſſunt, aquæ ex fonte perenni fluentis exemplo, & ajo non ſolius temporis, quod in effluxu impenditur, ſed etiam celeritatis, qua fluit aqua, rationem haberi oportere, uti veram aquæ dato tempore egredientis quantitatem metiamur, ut verum quidem ſit duplo tempore duplam aquæ copiam emanaturam, ſi ſit eadem, ac ſubduplo, celeritas; at fal-

falſum, ſi tale impedimentum aquæ fluenti objiciatur, ut duplo tempore exſiliat duplo minori velocitate. Nam hydroſtaticæ leges evidenti innixæ rationi certum & exploratum faciunt tunc ex eodem, aut ex æqualibus epiſtomiis eamdem aquæ copiam emanatum ire; & e contrario duplo plus aquæ eodem tempore effluxurum, ſi ex altero epiſtomio ſemper duplo majori celeritate egrediatur. Quo poſito cum jam docuerim tamquam fluxu lineæ rectangulum, ſic fluxu preſſionum vim generari, liquet opus eſſe, ut in metienda vi inde orta non ſolum quantitatis preſſionis & temporis inſumti, ſed etiam celeritatis rationem habeamus. Celeritas enim preſſionum nobis indicat numerum earumdem, qui ad menſuram quantitatis facit. Cum vero elaſtri, quod quadruplo minorem maſſam pellit, preſſiones duplo majori celeritate ferantur, & ab elaſtro in corpus migrent, liquet in corpus quadruplo minus ſubduplo tempore ab elaſtro explicari eamdem preſſionum quantitatem, quæ duplo tempore, ſed celeritate duplo minori, cum corpore quadruplo majori ab eodem communicantur. Cumque quatuor elaſtra in maſſam duplo minorem eamdem preſſionem jugiter exerant, ac duo in maſſam duplo majorem, & nihilominus illæ preſſiones eodem tempore duplo majori celeritate fluant num. 3. pariter liquet in corpore duplo minori duplam vim generari; quod verum eſſe non poteſt niſi in ſyſtemate Leibnitiano.

8. Quamvis, hæc, ut mihi quidem videtur, ita perſpicue concluſa ſint, ut nullus dubitandi locus ſuperſit, tamen arbitror aliquem Carteſianum ex altera parte poſſe exoriri, qui ajat preſſiones quidem, quibus quadrupla maſſa ab elaſtro pellitur, eſſe duplo tardiores & quodammodo intenſione duplo minores preſſionibus, quibus quadruplo minor ab eodem cietur, ſed eſſe quadruplo majores, quod attinet ad extenſionem, quod in quadruplam maſſam migrant; & inde fieri, ut duplo major duplo majori tempore in quadrupla maſſa gignatur; ſimiliter in quatuor elaſtris, quæ duplo minorem maſſam pellunt, preſſiones quidem duplo majori celeritate ferri, quam preſſiones duorum elaſtrorum in duplo majori, num. 3. ſed illas eſſe quod ad extenſionem his duplo minores; quo preſſionum compenſatio & virium æqualitas exſiſtit.

9. Ut his ſatisfaciam, optionem do Carteſii Defenſoribus eligendi utrum velint, an preſſiones ſint in ratione ſimplici dire-

directa maſſarum, quæ pelluntur, an in ſubduplicata. Si primum, quod videtur illis propugnandum, qui eo majorem preſſionem eſſe volunt, quo eſt major maſſa pellenda, in Carteſiana æſtimatione conſequeretur, non duplo majorem vim in quadrupla maſſa ab eodem elaſtro generari, ut ex ea ſententia conſequi ſupra evici num. 4. ſed quadruplo. Nam in maſſa quadrupla eſſent hæc tria elementa, ex quorum ductu vis tota exſiſteret $M = 4$, $T = 2$, $C = 1$, in maſſa vero ſubquadrupla hæc alia $m = 1$, $t = 1$, $c = 2$ Quare vis V primæ maſſæ foret $= M.T.C = 8$, & vis v ſecundæ $= m.t.c = 2$. Igitur vis primæ maſſæ ad vim ſecundæ foret in ratione quadrupla, ſcilicet ut 8 ad 2, contraquam in ipſamet Carteſii ſententia uſuvenire oſtendimus. Si vero ponantur preſſiones ab eodem elaſtro explicatæ eſſe in ratione ſubduplicata directa maſſarum, res quidem optime cadet in allato exemplo, verum aqua Carteſianis hærebit, cum explicandum ſuſcipient, qua de cauſſa in duabus maſſis A & B (*Fig.* 33.) quarum altera A ſit duplo major B, ab eodem elaſtro AB ſe in utramque partem expandente eadem vis generetur. Nam ſi ſumma preſſionum & ideo vis ſit æqualis producto ex ratione ſubduplicata maſſæ, quæ premitur, in celeritatem, qua fluunt preſſiones, erit vis corporis $A = 1 \sqrt{2} = \sqrt{2}$, & vis corporis $B = 2\sqrt{1} = 2$; quia corporis A maſſa $= 2$, & ideo ratio ſubduplicata $= \sqrt{2}$, celeritas $= 1$; corporis autem B maſſa $= 1$, & ideo ratio ſubduplicata $= \sqrt{1} = 1$, celeritas $= 2$. Quare vis corporis B erit major vi corporis A, contraquam eſſe debet in ſententia Carteſii, cui cum vires ſint æquales productis ex ſimplici maſſa in ſimplices celeritates, hic ob rationem reciprocam inter maſſas & celeritates ſint æquales oportet. Ita fit, ut, ſi Carteſium ſequaris, in alterutro ex his turpiſſime offendas, in neutro vero, ſi Leibnitium audieris; propterea quod cum ex altera parte ſumma preſſionum & ideo vis ſit = producto ex quantitate ipſa preſſionis per ſe ſpectata, quatenus in elaſtro eſt, nulla ratione habita majoris vel minoris maſſæ, in qua recipitur, in celeritatem, qua fluit, & in tempus, quo is fluxus durat, & ex altera preſſiones ſint æquales, eo quod ab eodem elaſtro exeruntur, erit in primo exemplo preſſio $P = 1$, maſſæ quadruplo majoris celeritas $C = 1$, tempus $T = 2$, & ideo vis $V = PCT = 2$; item $p = 1$, maſſæ quadruplo minoris cele-

celeritas $c = 2$, & tempus $t = 1$, ideoque vis $v = pct = 2$ pariter ut V; & in altero exemplo corporum A & B (*Fig.* 33.) ab eodem elaſtro in contrarias partes pulſorum, quia preſſiones & tempora ſunt æqualia, erunt vires uti celeritates, quibus fluunt, ideſt vis corporis B $= 2$, & vis corporis duplo majoris A $= 1$.

10. Neque dixeris in ipſa quoque Leibnitiana ſententia in ſubducenda quantitate preſſionis haberi maſſæ rationem; id enim cadit in æſtimationem preſſionis illius vis, quæ jam generata eſt; quia quo major maſſa majori celeritate fertur, eo majorem preſſionem conjicere oportet, non autem in æſtimationem preſſionis illius vis, quæ generatur. Quia ſi preſſiones cauſſæ pellentis ſint æquales & una maſſa $= 2$, altera $= 1$, celeritates, quæ tempuſculis æqualibus excitantur, ſunt in ratione inverſa maſſarum, ideſt celeritas maſſæ $= 2$ eſt $= 1$, & maſſæ 1 eſt $= 2$. Quare ſingulæ preſſiones æquales manent etiam in corpore, in quo recipiuntur, cum in corpore, unde effluunt, æquales fuerunt; contra quam contingere poteſt in viribus jam generatis, quia ſæpe contingit, uti celeritates rationem inverſam maſſarum non ſequantur. Cum vero harum preſſionum maſſæ $= 1$, quæ ipſæ per ſe ſunt æquales ſingulis preſſionibus maſſæ $= 2$, duplo major numerus ob duplo majorem celeritatem eodem tempore fluat, in corpore duplo minoris maſſæ duplo majorem celeritatem habentis vim duabus partibus majorem generari conſequitur. Quod vero habenda ſit ratio celeritatis, qua preſſiones fluunt, etiam eo ſuaderi poteſt, quod eatenus vis in maſſa inerti generatur, quatenus preſſiones ab elaſtro in maſſam inertem tranſmittunt. Quamdiu enim in elaſtro permanent, nullam in eo vim gignere poſſunt. Ita fit, ut quo magis dato tempore tranſeunt, eo majorem excitent vim. Quo vero celerius fluunt, eo magis dato tempore tranſeunt. Igitur in æſtimatione vis, quæ in maſſa generatur, celeritas, qua preſſiones feruntur, attendenda eſt.

11. At enim exempla a nobis allata parum habent momenti ad id efficiendum, quod volumus. Nam ideo rectangulum eſt æquale producto ex recta, quæ motu parallelo fluit, in celeritatem fluxus, & in tempus, quo fluxus durat, & quantitas aquæ effluentis eſt æqualis producto ex quantitate aquæ, quæ ſingulis momentis ex foramine egreditur, quæque foramini

pro-

proportione reſpondet, in celeritatem, qua manat, & in tempus, quo manare pergit, quia ſunt elementa diverſa in hiſce caſibus, & recta differt a celeritate tamquam res a modo rei, ſeu melius tamquam modus a modo diverſæ ſpeciei, eademque ratione quantitas aquæ, quæ ſingulis punctis emanat, a velocitate, qua fluit, diſtinguitur. At hic elementorum diſcrimen minime habemus. Nam preſſiones eſſe duplo intenſiores idem penitus eſt, ac duplo majori celeritate ferri. Quare in hac re ſola extenſio preſſionis in majori, vel minori maſſa diſtinguenda ab intenſione, ſive celeritate ejuſdem, non autem intenſio a celeritate. Ex quo fit, ut in corporibus A & B (*Fig.* 33.) eadem vis æquali tempore generetur, quia quantum preſſiones in B ratione habita duplæ intenſionis, ſive celeritatis ſuperant preſſiones in A, tantumdem ab his ob duplo minorem extenſionem ſuperantur.

12. Ad hæc primum iterum ajo, & confirmo in corporibus A & B eamdem ſingulis momentis preſſionem exſiſtere, ſive quatuor elaſtra CB ſint avulſa a duobus, ſive ſecus: quia, ut loco citato oſtendit Bernullius, elaſtrum continuatum AB ſingulis momentis in utramque partem æqualiter premit maſſas, ac ſi foret ſolum CB, vel CA, & CB æqualiter, ac CA, tametſi hoc quatuor elaſtris æqualibus & æqualis virtutis, illud ſolum duobus conſtet, propterea quod ſolum unum elaſtrum, immo unum unius elaſtri brachium in maſſas ſe explicare nititur. Cum vero preſſiones in A & B ex parte cauſſæ prementis ſint æquales, ob illud præciſe non evadunt inæquales, quod preſſio in B a ſubdupla maſſa, preſſio in A ſuſcipiatur a dupla. Major enim maſſa non facit ut preſſio augeatur, ſed ſolum, ut ſervata eadem quantitate preſſio magis diſpergatur. Quod etiam cadit in vim. Cum enim vis, quæ communicatur, eſt definiti gradus, perinde eſt, ſive majori maſſæ tribuatur, ſive minori, niſi quod in majori tanto minus intenſa manet, quam in minori. Quemadmodum ſi duas æquales vini menſuras cum duabus inæqualibus aquæ menſuris commiſceas, in utraque menſura æqualis vini quantitas ineſt, ſed in majori vinum magis diſperſum eſt, in minori autem minus. Quidni ergo idem in preſſione contingat, quæ ſua natura intendi ac remitti poteſt? Nonne duplum elaſtrum HEF, HDG (*Fig.* 35.) de quo num. 1. diſſerui, ipſum per ſe preſſionem duplo majorem exercet in maſſam M, quam ſimplum ABC in maſſam C, etiamſi fingas

eas

eas preſſiones eadem celeritate ferri ? Igitur neceſſe eſt , ut preſſionem a celeritate diſtinguas . Præterea id quod fluit , aliquid ſit oportet a fluxu diſtinctum ; fluxus enim eſt rei fluentis relatio . Cum vero preſſionem fluere concedas , eam aliquid eſſe a fluxu diſcretum fatearis opus eſt . Si vero per ſe quidpiam ſunt , & eodem tempore ſuſcipere plus , vel minus poſſunt , intenſionem preſſionis a celeritate diſpeſci tamquam rem a modo , aut modum a modo alius ſpeciei negare non potes . Sed ut rem magis ad vivum reſecem , memoria repeto id , quod in ſuperioribus animadverti , ex preſſionibus tamquam ex intrinſecis elementis gigni vim ; vim autem a motu & a celeritate , quæ eſt motus affectio , differre tamquam accidens abſolutum a relativo , ſive tamquam cauſſam ab effectu §. 119. unde conſequitur preſſiones etiam & earum intenſionem a motu & a celeritate , quæ eſt motus intenſio , tamquam ab effectu diſcrepare . Quod ſi in eam deſcendas ſententiam , de qua in antegreſſa propoſitione §. 125. num. 12. & ſeq. diſputatum eſt , vires in perfecto æquilibrio ſine ullo motu eſſe poſſe , multo magis cogereris aſſentiri preſſiones utut a virtuali , ut ajunt , celeritate non diſcrepent , ab actuali tamen ita differre , ut ſine illa conſiſtere queant . Cum ergo ſingulis minimis temporis punctis , quo elaſtrum AB ſe expandit (*Fig.* 33.) & explicat , preſſiones ſubinde generatæ utrimque ſint intenſione æquales , & in B duplo majori velocitate fluant , quod etiam convenit in elaſtra CB , CA disjuncta , conſequens eſt preſſionum ultro citroque æqualium duplo majorem numerum in maſſa ſubdupla B atque ideo duplo majorem vim generari . Quamobrem preſſiones , quibus elaſtra ejuſdem virtutis maſſas inæquales urgent , comparandæ non ſunt cum gravitatibus maſſarum in eodem terræ loco . Nam in eodem terræ puncto gravitates maſſis proportione reſpondent , ita ut in dupla maſſa duplo major preſſio exſiſtat , idque ob eam rationem contingit , quod duplicata maſſa , cauſſa premens gravia duplicatur . At hic duabus partibus aucta maſſa non continuo vis elaſtri maſſam pellentis ſit duplo major , ſed eadem permanet. Nil igitur mirum , ſi intenſio preſſionis in maſſa majori & minori eadem ſit , & totum diſcrimen in ſola majori aut minori velocitate ſit conſtitutum. Quod vero preſſiones non maſſæ pulſæ , ſed vi pellenti proportione reſpondeant , id liquet in ipſomet gravitatis nego-

negotio. Nonne æqualium maſſarum, quarum altera in majori a centro telluris diſtantia poſita ſit, altera vero in minori, inæquales preſſiones a Recentioribus judicantur, & inæqualium æquales, ſi diſtantiæ a centro ſint in ratione inverſa ſubduplicata maſſarum, ut ſi maſſa A = 4 locata ſit in intervallo 3000 milliarium, maſſa B = 1 in intervallo duplo minori 1500 milliarium collocetur? Id vero non aliunde oritur, quam ex eo, quia cauſſæ prementes corpora centrum verſus ſunt in ratione inverſa quadratorum diſtantiæ a centro telluris. Similiter cum hic habeamus cauſſas æquales, quibus inæquales maſſæ premuntur, preſſiones ſint æquales neceſſe eſt. Cumque eædem preſſiones in maſſa duplo minori percitæ ſint celeritate duplo majori, & fluxus ex utraque parte idem temporis ſpatium durent, ſumma & numerus preſſionum & ideo vis duplo major generetur oportet. Quid ad hæc hiſcere poſſint Adverſarii, ego certe non video, niſi velint, quæ celeritas elementorum tum in generatione ſuperficierum & ſolidorum, tum in fluxu aquarum ex foraminibus, tum in omnibus aliis quantitatibus, quæ fluxu elementorum gignuntur, neceſſario ſubducitur, ut veram genitæ quantitatis menſuram habeamus, eam in hoc uno negotio vis, quæ ex preſſionibus fluentibus exſiſtit, contemni oportere. Quod quantum ab omni ratione ſit alienum, nemo non videt.

13. Ceterum hæc elaſtrorum materies mihi alia plura ſuppeditat, quibus conficere poſſim vires eſſe uti quadrata celeritatum; verum quia res eſt cum nimis multis Geometriæ Phyſicæque principiis implicata, quam ut hic ſatis intelligi queat, mihi de iis integrum ſervabo in eum locum, in quo leges in actione elaſtrorum obſervatas expendam. Interim iis, quæ contradicuntur, ſatisfacere conabor.

§. 129. Scholion.

Id enim quammaxime neceſſarium eſt. Multi enim ſibi in animum induxerunt quæſtionem de viribus vivis eſſe unam ex iis, in quibus ſi rationum conſideres momenta, quæ in utramque partem Philoſophi afferunt, nihil, quod ſolidiſſimæ demonſtrationi concludendæ neceſſarium eſt, deſideres; ſin animum advertas ad rationes, quibus altera alterius fundamenta convellere nititur, neutram ſuo munere ullatenus defungi arbitreris. Id vero præſertim accidit Carteſianis, cum rationem illam §. 127. ab incurſu obliquo corporis ductam refutare nituntur, Leibnitia-

nitianis autem, cum ad leges motuum in recto corporum conflictu ſervari ſolitas deveniunt. Quod ad primos attinet, præter ea, quæ jam diſputata ſunt, non erit abs re proponere aliam ſubtiliter excogitatam rationem, qua doctiſſimus vir & in mathematicis diſciplinis contritus, ut ab ipſo editi libri & diſſertationes palam omnibus faciunt, mihique in amicitia conjunctiſſimus Cl. P. Federicus Sanvitali S. J. putat ſe evertere poſſe argumentum, quod in Leibnitianam ſententiam ex virium compoſitione duximus. Utitur enim hac diſtinctione. Concedit quidem cum planis, in quæ corpus oblique incurrit, vim poſſe communicari majorem prima etiam in infinitum, non demta contrarietate, ſed ea demta vim ſolum finitam & æqualem primæ exſtare. Quod ſic explicat. Rectæ Diagonalis AC (*Fig.* 34.), quæ exprimit vim obliquam corporis ab A profecti & in planum BC oblique incidentis, perficiatur rectangulum ABCD; circa duo latera AD, AB tamquam diametros deſcribantur circuli AED, AFB; erigatur in A ad diagonalem AC perpendicularis FAE, quæ in utramque partem producatur, donec in puncta F & E peripheriarum incidat. Tam puncta E & D, quam puncta F & B rectis lineis connectantur, ductiſque ad diagonalem perpendicularibus BG, DM rectangula AFBG & AEDM perficiantur. Ex quibus 1° liquet rectam AF eſſe = rectæ AE, & AG = MC, propterea quod triangula ABG & DCM ſunt ſimilia, & unum latus AB eſt = lateri DC; ergo erit tum AF = GB = DM = EA, tum AG = MC. 2° vim obliquam AC reſolvi in duas AD, AB; vim autem AD in duas alias AM, AE ob rectum angulum E in ſemicirculo; item vim AB in alias duas AG, AF ob eamdem rationem. Jam vero duæ AE, AF utpote omnino contrariæ & æquales ſe mutuo perimunt, & ſemetipſas exerere non poſſunt, & ideo perinde eſt, ac ſi in corpore non forent. Ergo demtis hiſce contrariis AE, AF in corpore reliquæ ſunt tantum duæ AM, AG, ſive AM + MC, quæ finitæ ſunt, & rationem diagonalis, ſive celeritatis ſequuntur.

2. Quo his ſatisfaciam primum do id, de quo paulo poſt enucleate diſputabo, quaſdam ex hiſce viribus, ex quibus vis per diagonalem componitur, eſſe contrarias, uti conſtat non ſolum ex ſchemate Cl. Viri, verum etiam ex meo (*Fig.* 32.)

nam ultima celeritas FG $= \frac{1}{2}$ eſt in plagam contrariam ei, quorſum dirigitur prima AB; verum ajo has vires etſi contrarias, tamen re ipſa cum planis a corpore communicari, idque in infinitis viribus fieri poſſe, ſi vires rationem celeritatum ſequantur; nam in meo ſchemate (*Fig.* 32.) communicata ab initio vi per AB, quarto temporis minuto etiam vis per FG licet in contrariam partem plano S imprimitur, & in ſchemate illius (*Fig.* 34.) poſtquam corpus plano BC impertitum eſt vim AB, quæ incluſam habet vim AF, poteſt in plano RN æquidiſtanti ab AC vim per AE communicare, tametſi hæc vi per AF adverſetur. Quo conſtituto vel hujuſcemodi infinitæ vires ſunt in corpore tantum potentia, vel actu; ideſt dum in corpore conjunguntur, vel qua parte oppoſitæ ſunt, ea ſe mutuo perimunt, non ſolum quod attinet ad effectum & ad motum, verum etiam quod attinet ad ſubſtantiam ipſam vis, adeout in nihilum redigantur, vel manent quidem quod ad ſubſtantiam, ſed ſe mutuo corrumpunt quod ad motum, ita ut nullus ſit in corpore motus, qui iiſdem reſpondeat, propterea quod, ut Fontenellus inſinuavit §.127. num.10. tamquam contrariæ & æquales in æquilibrio conſtituuntur, & aliæ aliarum effectum impediunt. Si actu non ſunt, qui fieri poteſt, ut a corpore actu exerantur eæ vires, quæ actu non ſunt? aut quæ cauſſa poteſt afferri, qua fiat, ut illæ vires ob contrarietatem in nihilum redactæ & omnino corruptæ renaſcantur, cum illud corpus & ſejunctum ponatur a cauſſa pellente, & ſuam ipſam vim augere non poſſit? Sin autem ſint actu, inde conſequitur vires infinitas quantum ad ſubſtantiam re ipſa in quolibet corpore moto inveniri, quod incurrit tum in eas difficultates, quas loco citato explicavimus, tum in hanc, quod qualitas actu infinita quantum ad ſubſtantiam in corpore quolibet finito reperiretur. Quam ſi quis Philoſophus concoquere poſſet, per me defendat licet ſententiam Carteſii, unde illa concluditur. Mihi enim verius eſt Leibnitianam tueri, quæ omnes vires a corpore oblique incidente explicatas non eſſe æquales niſi vi priſtinæ eique finitæ perſpicuum facit. Deinde etſi actu forent hæ vires contrariæ & æquales, tamen cum planis communicari non poſſent; nam vires in æquilibrio conſtitutæ perinde ſunt ac eæ, quæ in corpore non exſtant quod attinet ad actionem: nam uti

lanx

lanx cum altera lance æquilibrata manum eidem ſubjectam non gravat, ita vis AF(*Fig.* 34.) cum vi contraria & æquali AE in æquilibrio conſtituta planum non poteſt premere utpote impedita, neque idcirco cum eodem communicari. §. 125. num. 11. Vires ergo, quæ planis imprimuntur, ſint illæ oportet, quæ congruunt ſecundum directiones ED & FB, ſive ſecundum directionem AC. Quamobrem etiamſi demus vires illas contrarias & æquales corpori ineſſe, tamen illud conſequitur, quod maxime abſurdum eſt, in Carteſiano ſyſtemate tot vires ex qualibet finita vi elici poſſe, quæ vim infinitam exæquent.

3. Sed negari etiam poteſt vires illas in contrarias plagas directas in corpore exſtare; nam ad verum propius accedit eaſdem non reperiri, propterea quod, ut ea nunc mittam, quæ citato §. num. 11. in hanc rem diſſerui, ex altera parte cum corpus non poſſit niſi verſus unum locum ſingulis momentis moveri, vis quoque, qua cietur, quæ eſt ultima ratio & cauſſa motus, verſus unam tantum plagam dirigatur oportet, & ex altera ex reſolutione vis in laterales nequaquam conficitur eas directiones actu & reipſa ante fuiſſe, quam corpus oblique in planum incurreret. Nam ſi ex eo, quod ubi corpus per obliquam AC pervenit ad planum BC (*Fig.* 34.) pergit ſecundum directionem rectæ BCN, ſive AD, ſequeretur eamdem directionem AD in corpore ante incurſum re ipſa fuiſſe, etiam conſequens foret vim, qua corpus movetur ſecundum rectam AC verſus C, æqualem habere directionem verſus contrariam plagam; quod prorſus a vero diſſentit; vis enim in contrarias partes æqualiter directa corpus loco pellere nequit. Quod vero id ſequatur, ſic oſtendo. Globus pulſus per rectam BA circuli AED tangentem in ejuſdem cavam ſuperficiem incurrat; is, ut Geometræ norunt, ſemicirculum AED eadem, ac incidit, velocitate, ſi a reſiſtentia frictionis & aeris diſcedas, percurrit, & ubi ad punctum D e diametro oppoſitum pervenit, eadem pariter, qua incurrerat, celeritate metitur rectam DC tangentem ſecundum directionem DC, quæ primæ directioni BA omnino adverſatur. Ergo ſi quæ novæ directiones in corpore oblique in planum incurrente obſervantur, eædem in ipſo prius exſiſterent, in vi corporis aliquorſum tendentis duas æquales directiones in contrarias omnino plagas ineſſe concluderetur. Quod cum longiſſime abſit a vero, aliud nihil eſt reliquum quod dicamus, niſi obliquo corporis in planum incurſu & communicatione

partis vis fieri, ut nova ſecundum ejuſdem plani longitudinem exſiſtat directio, tametſi eadem in corpore reipſa prius non foret. Quo multo magis infirmatur ſuperior diſtinctio poſita in eo, quod in corpore re ipſa ſint vires in contrarias partes directæ, quæ ſubinde cum planis communicantur.

ARTICULUS III.

Quædam Objecta adverſus Leibnitii ſententiam.

§. 130. Objectum.

SEd veniamus ad ea, quæ contra Leibnitianam virium æſtimationem a Carteſianæ ſententiæ Patronis dicuntur. Sunt autem tam multa, ut nimis longum facerem, ſi ſingula perſequerer. Quamobrem ea ſeligam, in quibus majus eſt in præſenti negotio momentum, quæque ad alia omnia ſolvenda nobis viam munient. Primum itaque inculcant illud principium, cauſſas effectis plenis proportione reſpondere, eoque ſic abutuntur. Si ex duobus corporibus A & B maſſæ æqualis alterum A in vacuo percitum ſit velocitate conſtanti = 2, alterum B celeritate = 1, effectus pleni virium ſunt quantitates motus, quæ in hiſce corporibus excitantur. Nam in vacuo, ubi nullum eſt aliud corpus, in quod vis ſe exerere poſſit, illæ vires aliud nihil facere poſſunt, niſi movere corpora A & B. Quantitates autem motus ſunt producta ex maſſis in celeritates, quæ producta in corporibus A & B ſunt in ratione dupla, nimirum in ſimplici celeritatum 2 & 1. Ergo ſimiliter vires pellentes rationem ſimplicem velocitatum, non vero duplicatam ſequuntur.

§. 131. Reſponſio

Ut his ſatisfaciam, ſint (*Fig.* 35.) elaſtrum ſimplex ABC pellens corpus C, & quatuor elaſtra HEF, HDG, FRI, GNK ſingula æqualia & æqualis virtutis, ac ABC, ſimiliter expanſa, & ita conjuncta, ut duo ſe conſequantur, & alia duo aliis impoſita ſint, pellentia corpus æquale M. Cum ſingulæ preſſiones in M ſint intenſione duplo majores ſingulis preſſionibus in æquali maſſa C non ſolum initio, verum etiam in ſingulis punctis eam diſtantiæ rationem ſervantibus ab initiis H & A, quam puncta C & M, ut puncta ſcilicet M duplo majori intervallo abeſſe ponantur ab H, quam quælibet puncta

Eta C abſunt ab A, celeritates genitas in M eſſe duplo majores celeritatibus genitis in C conſequetur. Cum vero duo elaſtra ſe conſequentia HDG, GNK ſe in duplo majus ſpatium expandant, quam ſimplex ABC, hinc efficietur preſſiones quatuor elaſtrorum duplo majori celeritate latas eodem tempore fluere, ac cum corpore M communicari, quam preſſiones ſimplicis ABC. Ita fiet, ut preſſionum per ſe intenſione duplo majorum ſingulis momentis duplo major numerus exſiſtat. Unde vim quadruplam gigni in ſuperioribus collegimus. Hæc autem vis non eſt quadrupla ſolum ratione duplo majoris celeritatis, qua fit, ut duplo plures preſſiones fluant, ſed etiam ratione duplo majorum intenſione preſſionum, quibus corpus M dupla celeritate latum ſingulis momentis duplo vehementius alia premeret corpora, ſiquibus occurreret. Quia vero in inani nulla ſunt corpora, quæ poſſit offendere, hinc in ſpatio, quod dupla celeritate percurritur, & in ipſa celeritate præciſe cognoſci non poteſt effectus quadruplus vis corporis M: quamquam ſi rem ſubtilius examinemus, in eodem ipſo ſpatio, quod a corpore M duplo majori velocitate & eodem tempore conficitur, quadruplo majorem vim & effectum obſervare poterimus. Nam cum in ſingulis illius dupli ſpatii punctis ſint ſingulæ preſſiones duplo majores, ſequitur ſummam omnium preſſionum, quas corpus M eodem tempore exerere poteſt, eſſe quadruplo majorem ſumma omnium preſſionum, quæ a corpore C fluere queant. Cum ergo objicitur quantitatem motus, qui eſt effectus virium, eſſe æqualem producto ex maſſa in celeritatem, id quidem convenit in quantitatem motus momentaneam, ſive potius in conatum ad motum, ſive in preſſionem & elementum vis, quia corpus in vero temporis puncto moveri incipit, non movetur, §. 36. non autem in quantitatem motus, qui dato quodam tempore conſideretur gigni in corporibus, quæ tempore æquali ſpatia celeritatibus proportionalia emetiantur. Nam quamvis duorum corporum M & C maſſæ ſint æquales, tamen in ſpatii dupli, quod ab M dupla velocitate lato conficitur, ſingulis punctis preſſiones quoque ſingulæ duabus partibus ſingulas preſſiones corporis C duplo minori celeritate perciti ſuperant. De quo vide quæ diximus §. 38. unde quæ hic conſtituimus, confirmantur.

§. 132. Objectio

Alia etiam ratio contra Leibnitianam ſententiam ita concludi-

cluditur. Si vires forent uti quadrata celeritatum, vis per diagonalem A C (*Fig.* 34.) foret æqualis viribus per latera A B, A D = B C. Ideſt ſi tria corpora æqualia A, T, V velocitates haberent, A æqualem diagonali A C, T æqualem lateri A B, & V æqualem alteri lateri A D, vis ſolius corporis A æquaret vim ſimul duorum corporum T & V. Nam vis ſolius corporis A eſt in hac ſententia æqualis quadrato hypothenuſæ A C in maſſam A = 1 ducto, ſcilicet ejuſdem hypothenuſæ ſimplici quadrato. Vis autem corporis T eſt = quadrato celeritatis ſive lateris A B eam exprimentis pariter in maſſam T = 1 ducto, videlicet ſimplici quadrato; item vis corporis V eſt = quadrato rectæ A D, ſive B C in maſſam V = 1 ducto, nimirum ſimplici quadrato. Liquet autem ex elementis Euclidis quadratum hypothenuſæ A C eſſe æquale duobus quadratis laterum A B, A D, ſive B C. Igitur conſequens foret vim ſolius maſſæ A, quæ celeritatem diagonalis A C haberet, eſſe æqualem ſimul vi maſſæ æqualis T, quæ tempore eodem latus A B percurreret, & vi corporis pariter æqualis V, quod pariter eodem tempore latus aliud A D peragraret. Id vero a recta ratione quammaxime diſſentaneum eſt. Siquidem cum eidem corpori A duæ vires per latera A B, A D ad angulum rectum oppoſitæ imprimuntur, illæ ut aliqua ex parte contrariæ aliqua ex parte ſe perimere debent. Cum vero duobus corporibus T & V ſeorſim tribuuntur, nihil vis per A B perimi poteſt a vi per A D, & e contrario. Quare vires A B, A D ad angulum rectum oppoſitæ & in corpore A congruentes, ſeu vis per diagonalem A C ex illis partim ſe corrumpentibus, partim congruentibus coalita minor eſſe debet ſumma virium A B, A D, quæ in duabus maſſis æqualibus & inter ipſas & maſſæ A reperiuntur. Contraquam contingit in æſtimatione Leibnitiana. Ex quo fit hanc æſtimationem eſſe repudiandam.

§. 133. Reſponſio

Ad hæc refellenda in anteceſſum adverto non perinde eſſe, ſive in duabus æqualibus maſſis duo gradus celeritatis alter in altera ſeorſim excitentur, ſive in tertia maſſa A, quæ ſit uni ex primis æqualis, duo ſimul copulentur. Nam in poſteriori caſu vis ut 4 requiritur, & in A generatur, & in primo vis ſolum ut 2; nam ut advertimus §. 131. quatuor elaſtra (*Fig.* 35.) H E F R I, H D G N K vim ut quatuor exerentia, & vim ut qua-

quatuor in corpore M generantia celeritatem ut duo gignunt; at ſimplex & unum elaſtrum ABC in corpore æquali C ſolum vim unius explicans celeritatem ut 1 excitat. Quare ſi ponatur aliud corpus B æquale pelli ab alio æqualis virtutis elaſtro, vis & celeritas unius pariter generabitur. Quare duo corpora æqualia C, B, quæ habeant ſingula unum gradum celeritatis, & ideo ſimul duos gradus, vi ut duorum inſtructa reperientur. At corpus M æquale uni ex illis, in quo ii duo gradus celeritatis conjuncti ſint, vim ut quatuor habebit. Id vero proficiſcitur ex eo, quod poſtquam corpus M (*Fig.* 35.) accepit celeritatem unius gradus, & ideo vim unius, non poteſt ſecundum celeritatis gradum accipere, quin triplo majorem ſummam preſſionum ideoque triplo majorem vim, quam in primo gradu celeritatis accipiendo, acquirat. Quamvis enim preſſiones ſingulæ ſint æquales, tamen in corpore jam unum gradum celeritatis habente duplo majori velocitate fluunt, & ideo duplo majorem generant vim §. 128. Atque explicato quid faciant preſſiones & celeritates æquales diviſæ in duabus maſſis, quid perfecte congruentes in una maſſa videamus, quam vim generare debeant cum in eadem quidem conjunguntur, ſed non verſus eamdem plagam, ſed ita ut ad angulum oppoſitæ ſint. Si has preſſiones, & celeritates AD, AB (*Fig.* 34.) cum preſſionibus & celeritatibus æqualibus, ſed quæ in duabus maſſis generantur, conferamus, in his duo ſunt, quorum altero ſuperari debent a preſſionibus & celeritatibus diviſis, altero eas ſuperare. Si conſiderentur, quatenus ſunt ex parte contrariæ, aliæ ab aliis ſuperari debent, quod in preſſionibus diviſis nihil contrarii eſt. Si vero conſiderentur, quatenus in eodem corpore A conſpirant, ſuperare debent, eo quod preſſiones in corpore conſpirantes, utpote quæ majori celeritate fluunt, plures in corpore ſunt, & ideo majorem ſummam, ideſt vim generant. Quamobrem hæc duo ita compenſare ſe invicem poſſunt, ut quantum preſſiones & celeritates ad angulum conjunctæ a preſſionibus diviſis ob contrarietatem vincuntur, tantumdem ob congruentiam & majorem celeritatem eas vincant. Id vero contingit cum angulus concurſus rectus eſt.

§. 134. Corollarium.

Quo ſatisfit non levi cuidam difficultati, quæ mihi ſententiam Carteſii olim defendenti magnum faceſſivit negotium in compoſitione motuum. Nam ſi globi ABLD (*Fig.* 36.) puncta A & B quadrante BA diſſita viribus æqualibus ſecundum

directiones & rectas *e* E, *e* F æquales eadem celeritate & eodem tempore peragrandas, & ad centrum *e* corporis ad angulum F *e* E rectum concurrentes pellantur, experimentis compertum ſit globum centro *e* illo eodem tempore deſcribere diagonalem *e* H quadrati *e* E H F. Quo fit ut cum recta *e* H, quæ celeritatem reſiduam exprimit, ſit major quolibet uno ex lateribus *e* E, *e* F, in ſententia Carteſii vis reſidua & ex lateralibus coalita ſit major dimidio virium *e* F, *e* E; ſi utraque ſecundum eamdem directionem B F imprimeretur, & corpus duplo majori celeritate in recta *e* F ferretur. Id vero in hanc difficultatem incurrit. Nam ſi corpus iis viribus æqualibus in punctis e diametro contrariis A & L ſecundum directiones omnino contrarias A L, L A pelleretur, illæ vires ſe omnino perimerent; ſi vero utraque vis in puncto A ſecundum eamdem directionem *e* E excitaretur, nihil earum virium corrumperetur. Ergo ſi vires & celeritates æquales in punctis B & A eodem intervallo diſſitis tum a loco maximæ oppoſitionis, tum a loco nullius, & ad angulum rectum, qui ab angulis tum maximæ, tum nullius contrarietatis æqualiter abeſt, imprimantur, conſequens eſſe videtur oportere, ut dimidia pars totius vis, quæ ex duabus conjunctis celeritatibus exſiſteret, corrumpatur, dimidia permaneat. Hoc autem non contingit in ſyſtemate Carteſiano, quia, ut paulo ante docui, celeritas & vis *e* H reſidua eſt major qualibet una ex celeritatibus & viribus lateralibus; bene vero in Leibnitiano, quia poſitis celeritatibus *e* F = 1 & pariter *e* E = 1, & in puncto B ſecundum eamdem directionem *e* F omnino conſpirantibus vis ad eas efficiendas in corpore generata eſt 4; ſin autem ad angulum rectum concurrant, vis per *e* H eſt = quadrato rectæ *e* H ideſt quadratis laterum *e* F, *e* E ſimul = 1 + 1 = 2; quod quadratum quadrati 4 eſt præciſe dimidia pars. Igitur hoc etiam nomine Leibnitianum ſyſtema Carteſiano præſtat, in quo vis compoſita ex lateralibus æqualibus foret æqualis uni earum, quando componentes æquales angulum 120 graduum facerent. Sint enim rectæ æquales A B, A D (*Fig.* 37.) angulum rectum in A conſtituentes, & circa illas centro A circulus B D E deſcribatur. Sumto arcu E D 30 graduum, ideoque $= \frac{1}{12}$ totius peripheriæ, ducatur ſinus E S, & producatur, quoad in punctum G circuli incurrat:

cum-

cumque ob rectum angulum in S pars SC ſit = parti SE, chorda EC perpendicularis ad radium AD & ideo a recta AB æquidiſtans arcum 60 graduum EDC & ideo ſextam peripheriæ partem ſubtendet, & radium AB æquabit. Quare ductis BC, AE parallelogrammum ABCE exſiſtet, cujus diagonalis AC in punctum C peripheriæ cadet, eritque = AE, ſive AB. Ita fit, ut ſi rectæ AB, AE angulum EAB = recto DAB 90 grad. & etiam angulo EAD 30 graduum conſtituentes & ideo = 120 grad. celeritates corpori in A impreſſas exhibeant, celeritas ex iis coalita & in ſententia Carteſii vis media futura ſit = uni ex celeritatibus & viribus, quæ conjunctim in corpore generantur. Quod repugnare videtur, quia tunc dimidium utriuſque vis reliquum eſſet, tametſi multo plus oppoſitionis, quam congruentiæ in iis viribus foret.

Scholion

Solvenda nunc eſſet potiſſima ratio, quæ adverſus Leibnitianam virium æſtimationem affertur, quæque a legibus petitur colliſionis corporum perfecte durorum. Ea enim tanti fit a majori parte Philoſophantium, ut omnium, quæ in contrarium producuntur rationes, evidentiam illa obſcurari arbitrentur: præſertim ubi Leibnitii Aſtipulatores tantum in eadem viderint eſſe momenti, ut aliter ipſi fieri ſatis non poſſe crediderint, quam illud inficiando, quod aſſumebatur, corpora perfecte dura in hac rerum univerſitate poſſe conſtare. Verum antequam in ea diluenda vires contendam ingenii, neceſſe mihi video rem altius petere, ut id ſub oculos ponam, in quo cardo vertitur hujus quæſtionis, & ejus adminiculo certas hujuſmodi leges cum Leibnitii ſententia conciliem. Quod ita exſequar toties citato §. 201. ut plane confidam neminem amplius futurum, qui ea de cauſſa hanc virium æſtimationem repudiet. Id tamen non ita mature, propterea quod ad id oſtendendum, in quo ille cardo ſit poſitus, multa ſunt ante tractanda, & præſertim docendum eſt nullam eſſe vim in aliquibus Leibnitianorum argumentis, ſaltem ſi eo modo, quo iidem fecerunt, in Carteſianos contorqueantur.

ARTICULUS IV.

De rationibus, quæ pro æſtimatione virium ducuntur ex deſcenſu vel aſcenſu gravium.

§. 135. Objecta

MIrum eſt enim Leibnitianos & Carteſianos de hac re quam præ manibus habemus, adeo inter ipſos diſſidere, ut in quo corporum gravium deſcenſu & aſcenſu quidam ex illis magnum ſuæ cauſſæ præſidium conſtituunt, eodem ſuam iſti ſententiam maxime confirmari arbitrentur. Quamobrem operæ pretium exiſtimo hæc etiam examinanda ſuſcipere & Carteſiani perſonam adverſus rationes inde ab Hermanno & ab aliis pro Leibnitii ſententia petitas ſuſtinere, quo noſtram ſententiam, quam ſequenti articulo proponemus, in majori luce ponamus. Ac præſertim expendendum ſuſcipio caſum corporis ex altitudinibus A E & G N (*Fig.* 40.), quarum A E ſit quadruplo major G N, ſcilicet A E = 16 palmis & G N = 4. Communibus de motu æquabiliter accelerato legibus efficitur, ſi corpus S conficiat uno minuto ſpatium G H, & altero ſpatium H N triplo majus ſpatio G H, fore ut V quatuor minutis ſpatium A E, ideſt 1.° palmum A B, 2.° tres palmos B C, 3.° quinque palmos C D, 4.° ſeptem palmos D E percurrat; atque ut in E celeritatem duplo majorem, quam corpus S in N, acquiſierit. Quo poſito primum ajo ex perſona Carteſii vim acquiſitam a corpore V in E eſſe ſolum duplo majorem vi acquiſita a maſſa æquali S in N. Nam corpora V & S uſque in C & N duobus minutis a gravitate, quam poſt Galilæum æquales ictus æqualibus temporibus imprimere omnes aſſentiuntur, æqualem vim accipiunt. Sed corpus V in percurrenda alia parte C E duo tantum impendit minuta. Ergo numerum impetuum accipit a gravitate æqualem numero ictuum, quos ab eadem acceperat, cum primam partem A C peragraret. Igitur toto ſpatio A E & 4 minutis in eo conficiendo impenſis ſolum duplo plures ictus, quam per ſpatium A C duobus percurſum, a gravitate poteſt habere, atque ideo ſolum duplo majorem vim adipiſcitur.

2. Neque difficultatem facere debet, quod effectus vis corporis

poris V, ſive ſpatium percurſum AE ſit quadruplo majus effectu vis corporis S, ſive ſpatio GN, quod ab eodem percurritur. Nam diſtinguendum eſt inter ſpatia percurſa eodem tempore, & inter ſpatia, quorum alterum tempore longiori percurratur. Siquidem illa ſunt effectus intenſionis virium; hæc autem effectus majoris durationis, quæ majorem vim non ſignificat. Quod ab ipſis etiam Leibnitianis concedendum eſt. Nam ſi corpora V & S æqualia eadem celeritate conſtanti ferantur, illud tempore duorum minutorum, hoc tempore unius, nemo non videt ſpatium confectum ab V fore duplum ſpatio confecto ab S, & nihilominus vires eſſe æquales etiam in Leibnitii ſententia, quoniam quadrata celeritatum, quibus dictæ vires proportionales ponuntur, ſunt æqualia. Cujus ratio evidens eſt, quia vis omnino eadem plus, minus, immo infinito tempore durare poteſt. Quo conſtituto notandum duos impetus gradus, quos a gravitate corpus V ab A uſque in C duobus minutis accepit, integros perſeverare per alia duo minuta. Unde cum quilibet illorum corpus moveat, uno minuto per duos ſpatii palmos, & idcirco duobus per quatuor, corpus V poſitum in C a puncto eodem C uſque ad imum E ex iis duodecim palmos octo percurret non virtute novi impetus, ſed vi antegreſſorum. Quamobrem hi octo palmi non ſibi volunt auctam fuiſſe vim, ſed ſolum duplo majorem ejus durationem. Igitur ſubductis his octo ex 16 reſtant 8, qui ſunt in proportione virium; quod a viribus eodem tempore exſtantibus conficiuntur. Siquidem tam duobus minutis durant vires per GN, quam vires æquales per AC, & quam æquales per CE. Ita fit, ut ſi res hac ratione expendatur, vis acquiſita per AE ſit ad vim acquiſitam per GN ut 8 ad 4, atque idcirco in ratione dupla; Quod ſi negaveris vires æquabiles eſſe ſpatiis eodem tempore peractis proportionales, quo innititur id, quod ultimo loco concluſi, multo meliori jure tibi ego inficias ierim vires inæquabiles eſſe in ratione ſpatiorum diverſo tempore percurſorum, quorum bonam partem vides a viribus primis confici, quæ amplius, quam vires GN, duobus minutis integræ permanent, quæque idcirco ſi per ſe ipſæ ſpectentur, quod attinet ad ſpatium percurrendum, pro æquabilibus haberi poſſunt. Hæc autem attuli non eo fine, ut novum aliquod momentum huic ſententiæ inde acceſſurum crediderim, ſed quo planum

facerem

facerem in ſpatiis motu inæquabili percurſis nihil eſſe momenti pro Leibnitiana opinione, & quod Cl. Mairanus advertit, omnia in motum æquabilem recidere, & quæſtionis ſummam in eo verſari.

3. Ad hæc tamen contradicit Hermannus tom. 1. Acad. Petrop. pag. 20. hæcque affert ad efficiendum vires vivas in deſcenſu acquiſitas eſſe in ratione ſpatiorum, ideoque in duplicata celeritatum. Spatium, per quod grave deſcendit, ſit = AH (*Fig.* 41.) Gravitas ſeu vis mortua, qua grave in ſingulis punčti ſpatiis urgetur, eſt ſemper eadem & æqualis. Quamobrem exprimi poteſt rečtis æqualibus A*a*, B*b*, C*c*, &c. quæ ſpatio inſiſtant ad perpendiculum. Igitur ſumma omnium virium mortuarum eſt æqualis vi vivæ in deſcenſu acquiſitæ; propterea quod eſt ſemper eadem, ſola, & una gravitas, quæ a principio vim efficit vivam, & proceſſu auget. Nec enim vis viva primo tempore acquiſita ſemetipſam augere poteſt. Porro hæc vis acquiſita, ſive ſumma omnium virium mortuarum eſt æqualis producto ex ſpatio in gravitatem A*a*; nam tunc tertia quantitas eſt æqualis producto ex prima in ſecundam, quando quot ſunt unitates, ſive puncta in prima, tot vicibus ſecunda integre convenit & ſumenda eſt. Quot autem ſunt puncta in ſpatio AH, tot ſunt vires æquales gravitatis A*a*; B*b*, C*c* &c. nam corpus indeſinenter urgetur a gravitate æquali, atque ideo in ſingulis ſpatii punctis novos primo æquales ictus accipit. Igitur vis acquiſita in ſpatio AH eſt ad vim acquiſitam in ſpatio AE, ut rectangulum AH*ha* ad rectangulum AE*ea*, ſive ut ſpatium AH ad ſpatium AE; ex quo efficitur vires eſſe in duplicata celeritatum ratione.

4. Hæc eſt Hermanni ratio, ſed paulo aliter concluſa; cui primum in Academia propoſitæ ſubjungit ab Academicis objectum fuiſſe eodem modo cogi & effici poſſe vires acquiſitas rationem temporum & conſequenter celeritatum habere, ſi rectæ AE, AH non ſpatia exhibeant, ſed tempora inſumta in deſcenſu. Siquidem in hypotheſi Galilæi, quam omnes amplectuntur, corpus in ſingulis inſtantibus temporis æquali vi premitur a gravitate. Quo fit, ut ſumma virium mortuarum ſit productum ex tempore in gravitatem.

5. Huic autem objecto triplici ratione occurrit Hermannus, quarum prima hæc eſt. In ſubducenda virium vivarum ſumma potius habenda ratio eſt ſpatii, quam temporis, quod

tempus,

tempus atque celeritas ſint tantum *ens modale & incompletum, ſpatium verò deſcenſu confectum ſit ens reale indicans multitudinem virium mortuarum in unam veluti ſummam, quæ eſt vis viva, agglomeratarum* pag. 24.

6. Secunda vero ita concluditur. Corpus deſcendens alio in ſtatu eſt in aliis temporis articulis. Sit enim tempus AD $= t$; DE infinite parva $= dt$ (*Fig.* 41.), ſive elementum hujus temporis. Sitque v vis viva, quam corpus acquirit tempore t, atque idcirco dv, quam tempuſculo dt; tandem c celeritas acquiſita tempore AD, & m maſſa corporis. Porro incrementum vis vivæ per dt naſcitur tum a gravitate g, tum a quantitate motus, quam corpus habet in puncto D, ſive a producto ex maſſa in celeritatem c, quæ a corpore ibidem ſito disjungi non poteſt. Quamobrem coaleſcit ex his tribus g, mc, & dt, ſive $dv = gmcdt$, non autem, ut vulgo ponitur, $= gmdt$, & integrando $v = gmct$. Quod ſi ponatur aliud tempus AS $=$ T, SH $=$ DT, celeritas $=$ C, vis $=$ V, cujus incrementum $= d$V; maſſa eadem $= m$, ſicuti & gravitas g, erit $d\text{V} = gm\text{C}d\text{T}$, & integrando $\text{V} = gm\text{CT}$. Quamobrem $v : \text{V} = gmct : gm\text{CT} = ct : \text{CT}$ ideſt vires v & V ſunt in ratione compoſita celeritatum & temporum, quæ rationes cum in deſcenſu gravium ſint ſimiles, faciunt duplicatam celeritatum.

7. Tertia denique cum aſcenſu corporum (*Fig.* 41.), implicata eſt, itaque ſe habet. Si vis acquiſita tempore AE adminiculo virium mortuarum Aa, Bb, Cc, Dd, Ee exprimenda foret per rectangulum AEea, & vis acquiſita tempore EH per rectangulum EHhe; hæc eadem rectangula exprimerent reſiſtentias in aſcenſu corporis temporibus HE & EA. Quamobrem ſi tempora HE & EA ſunt æqualia, etiam reſiſtentiæ forent æquales. Hæ autem reſiſtentiæ nequeunt eſſe æquales. Nam 1° minuto corpus N (*Fig.* 40.) conficit aſcendendo ſpatium NH $= 3$ & 2° minuto ſpatium HG $= 1$; quibus ſpatiis in eadem ratione reſiſtentiæ reſpondent. Niſi enim ita foret, gravitas non premeret corpus æquabiliter in utroque ſpatio 3 & 1, ſed inæquabiliter & ſubſultim: Quod adverſatur probatæ ſententiæ, quæ ponit corpus ſemper grave & in ſingulis ſpatii punctis vi inſita urgeri æquabiliter. Atque hæc ultima ratio Hermanni valet etiam in gravium deſcenſu: nam primo minuto corpus deſcendens conficit

conficit ſpatium GH = 1 (*Fig.* 40.), & ſecundo minuto ſpatium HN = 3; ne igitur gravitas inæquabiliter & ſubſultim per ſpatium in corpus ſe exerat, debet habere rationem ſpatii, non temporis.

8. Ex quibus objectis intelligo ſummam quæſtionis in eo poſitam eſſe, utrum numerus ictuum, quos gravitas corpori deſcendenti infligit, ſpatio percurſo reſpondeat, an vero tempori, quod impenditur in eo percurrendo. Itaque ut eam enodemus, conſiderentur corpora V & S æqualia, quæ a punctis A & G (*Fig.* 40.) eodem inſtanti cadere incipiant. Hæc primo minuto ſpatia æqualia AB, GH primo gravitatis impetu conficient. Item 2° minuto ſecundo gravitatis impetu ſpatia æqualia BC, HN. Nam primo impetu, qui utpote jam generatus in punctis B & H incipit æquabilem motum efficere, corpus duos palmos B3, H3 percurrit. Ergo ut alium ſolum palmum primo æqualem 3C, 3N novo impetu peragret, hic novus impetus 2° momento genitus primo ſit æqualis neceſſe eſt. Adhuc omnia ſunt æqualia. Jam vero corpus S quieſcat in N, & corpus V pergat ima petere duobus aliis minutis; quo tempore duodecim palmos CE peragrabit, ſed ex iis palmos octo vi impetus duobus primis minutis accepti, qui integer perſeverat; ergo ut alios quatuor vi novi impetus faciat, hic novus impetus non poteſt eſſe niſi æqualis illi, cujus virtute quatuor primos palmos AC conficit. Quamobrem ictus ſive preſſiones mortuæ in toto ſpatio AE tempore quatuor minutorum non poſſunt eſſe, niſi duplo plures ictibus & preſſionibus mortuis in ſpatio quadruplo minori AC, vel GN, ſed tempore ſolum duplo minori. Ex quo efficitur numerum ſive ſummam preſſionum, ſeu virium mortuarum eſſe in ratione temporum, non autem ſpatiorum.

9. Quamvis autem corpus tam grave ſit in ſpatio AC, quam in ſingulis punctis ſpatii CE triplo longioris, non ideo tamen in triplo ſpatio triplo plures ictus accipit a gravitate. Nam ſi corpus in C novum tantum ictum illi æqualem, quem in ſpatio AB, accipiat, illo percurrere debet ſolum palmum = C5; ſed interea a vi jam acquiſita in ſpatio AC uſque ad D transfertur. Quo loco peto ab Hermanno, an poſtquam gravitas in ſpatio AC duos ictus inflixit, tertium tantum uni ex illis æqualem infligere queat. Non arbitror id ab ho-

mine iri negatum ; quod ante quartum eſt tertius . Quod ſi ita eſt , illo tempore , quo tertius ictus inſligitur, vis jam acquiſita quid fecit? Num eſt iners & in corpore otiatur? Profecto nequaquam ; id enim eſſet contra virium , quæ non impediuntur , naturam . Ergo dum corpus accipit tertium , interea vis jam genita corpus trudit , & quidem per ſpatium CD, eo quod ille ictus æqualis prioribus niſi æquali tempore generari non poteſt in hypoteſi gravitatis, quæ actionem æquabilem exerceat .

10. Quare ſi ſola Hermanni momenta attendantur , vires mortuas atque preſſiones eſſe non ſpatiis ſed temporibus proportionales concluditur. Non inficior tamen in alia hypotheſi fieri poſſe , ut ſpatiis proportione reſpondeant ; ſed tunc in ſpatio quadruplo non tantum duplo major celeritas acquireretur . Nam ſi celeritas eſt dupla, cum vires ſingulis momentis impreſſæ temporibus proportionales ſunt , velocitas major dupla oriatur neceſſe eſt , cum vires aliam rationem majorem , qualis eſt ſpatiorum ratio , ſequantur . Quod vero tempus ſit modus entis , id non evincit ictus gravitatis eſſe non poſſe in ratione temporum , quorum menſuram motus æquabilis ſuppeditat . Præterquamquod ſi rem ad vivum ſecueris , etiam ſpatium percurſum inter modos entis referendum eſt . Quid eſt enim ſuperficies & ultimus limes corporum, quibus corpus in motu poſitum circumambitur, & in quibus ſpatium a corporibus motu peragratum poſitum eſſe §. 27 monſtravimus ? Ex hoc ergo capite nihil eſt in ſpatio , quo tempus ſuperet, atque ideo quodammodo poſtulet , ut vires potius ipſi , quam tempori , proportione reſpondeant .

11. Ad illud autem de incremento vis , non video , quam ob cauſſam vir ceteroquin ſummus celeritatem jam acquiſitam voluerit ad acceſſionem virium conferre . Celeritas enim poteſt ne ipſa per ſe augere vim? Eſt enim effectus vis jam acquiſitæ , non cauſſa vis acquirendæ ; niſi velit eſſe cauſſam , ut ajunt , *per accidens* ; quia novi gravitatis ictus ſpatiis proportionales fiunt , vel quia conſpirantes ictus non ſummam, ſed quadratum aliquod faciunt . Quorum neutrum ab homine oſtenditur , quemadmodum nos oſtendemus , ubi Carteſiani perſonam , quam hic ſuſcepimus , depoſuerimus . Sane a Wolphio , qui alioquin partes Leibnitii ſequitur , §. 101. & ſequent . Mech. tom. 2. Elem. Matheſ. in vi metienda, quæ

tempuſculo

tempuſculo infinite parvo acquiritur, nulla habetur ratio jam acquiſitæ celeritatis. Quod vero hæc a corpore ſejungi non poſſit, id unum probat illo tempuſculo majus a corpore ſpatium deſcribi, quam ſi nullam antea comparaviſſet. Quamobrem fallax eſt illa formula $dv = gmcdt$, & integrando $v = gmct$, & vera communis $dv = gmdt$, & integrando $v = gmt$. Unde $v : V = gmt : gmT = t : T$ ſcilicet vires v & V ſunt in ratione temporum atque ideo celeritatum.

12. Quod attinet ad ultimam Hermanni rationem, illud liquet in aſcenſu corporis per ſpatium EA (*Fig.* 40.) reſiſtentias eſſe non poſſe niſi preſſiones & vires mortuas gravitatis, & has fore eaſdem, ac eas, quas in deſcendendo corpus accepit. Quare cum illæ in quadruplo majori ſpatio ſint tantum duplo plures, atque ideo temporibus reſpondeant; etiam reſiſtentiæ tantum duplo plures ſint atque idcirco in ratione temporum, non ſpatiorum oportet. Neque ex hoc ſequitur gravitatem urgere corpus inæquabiliter & ſubſultim; quia cum corpus celerius fertur, pro majori ſpatio minor ejus pars in qualibet parte ſpatii exeritur, quam ſi illud corpus tardius aſcenderet. Imo ex eo, quod actio gravitatis eſt æquabilis, conficitur numerum ictuum non ſpatiis, ſed temporibus ſe accommodare debere. Sed hac de re nunc enucleatius.

13. Nam aſcenſum corporum gravium Mairanus in Comment. Acad. an. 1728. pag. 9, & ſequent. ingenioſiſſime expendit, & inter alia motum retardatum corporum aſcendentium in æquabilem converti imaginatus eſt, ſepoſita pauliſper gravitatis actione. Quo (*Fig.* 40.) fit, ut corpus V ab E profectum ea celeritate, quam in deſcendendo acquiſivit, duplum ſpatii ſcilicet 32 palmos tempore 4 minutorum æquabili motu percurrat, atque ideo tempore duorum minutorum 16 palmos; corpus vero S ab N ſurſum aſcendens duobus minutis duplum ſpatii NG nimirum 8 palmos motu æquabili conficiat. Ex quo concludit vim in E ad vim in N ita ſe habere, ſicuti ſpatium duobus minutis prima vi confectum ad ſpatium eodem tempore ſecunda vi percurſum, ideſt ut 16 ad 8; quam rationem etiam celeritates ſequuntur. Reſtituatur gravitas; ratio virium nullam mutationem ſubibit. Nec enim impedimenta & reſiſtentiæ quantitatem virium, quibus reſiſtitur, ullo modo mutant. Hæc Mairanus cumulatis multis, quæ in ejus

Digitized by Google

ejus Commentario leguntur. Sed illud præſertim hac in re notandum eſt, quemadmodum ſpatia AE, GN in deſcenſu corporum non ſunt in ratione virium, eo quod octo palmi ex ſpatio AE vi eadem acquiſita per AC, quæ plus duobus minutis quam vis per GN durat, conficiuntur, ita eadem ſpatia in aſcenſu virium rationem non ſequi, propterea quod duplum tempus ante requiritur, quam tota vis per EA perimatur, & ſpatia majora eadem vi plus durante confecta non ſignificant vim tanto majorem, ſed ſolum longiorem ejus durationem. Nec vero prætereundum eſt rationem virium in aſcenſu corporis creſcere. Nam ſi ex duabus quantitatibus, quarum altera major, altera minor, eadem quantitas ſubducatur, ratio majoris ad minorem creſcit, & eo quidem magis, quo major eſt quantitas, quæ ſubducitur. Quo poſito corpus V aſcendens ab E poſt 1 minutum (*Fig.* 40.) reperitur in D, & S aſcendens ab N poſt primum minutum reperitur in H. Gravitas autem eodem tempore eamdem impetus quantitatem in utroque corpore perimit. Quamobrem neceſſe eſt, ut vis corporis V in D poſiti ad vim corporis S in H conſtituti majorem habeat rationem, quam vis primi in E ad vim primi in H. Et revera aſcendens corpus V in D eam habeat vim neceſſe eſt, quam per AD deſcendens acquireret; & corpus S in H eam, quam deſcendendo per GH compararet. Spatium AD eſt noncuplum ſpatio GH. Ergo ſive vis ſit in ſubduplicata ſpatiorum ratione, ut Carteſiani volunt, ſive, ut placet Leibnitii ſectatoribus, in ſimplici eorumdem ratione, vis in D ad vim in H majorem habere debet rationem, quam vis in E ad vim in N. Quid igitur mirum ſi cum creſcat ratio virium atque celeritatum, ſpatia a viribus & celeritatibus initio duplis peracta viribus ipſis atque celeritatibus initialibus proportione non reſpondeant? Non enim major eſt ratio, cur ſpatia peragenda non primis tantum viribus, ſed etiam iis omnibus, quæ per totum ſpatium fuſæ ſunt, ſequantur potius primarum rationem, quam omnium aliarum. Quæ igitur ratio a ſpatio quadruplo majori pro Leibnitii hypotheſi ducitur, nulla propemodum eſt; quod ratio virium per EA ad vires per NG aliquando ita creſcit, ut ad infinitum perveniat. Siquidem poſt duo minuta corpus V reperitur in C, & S in G, in quo puncto nullam ſive infinite parvam habet vim, cum interea corpus V adhuc finita cieatur.

14. Iis tamen, quæ Mairanus & alii attulerunt, manus non dedere Adverſarii. Bulfingerus in Actis Acad. Petrop. t. 1. pag. 87. edit. Petrop. ſic exceptionem temporis in corporis motu retardato infirmare conatur. *Negat Leibnitius habendam eſſe rationem temporis in hoc argumento. Ajunt illi. Latet hic amphibolia aliquid; evolvetur autem, ſi ſingulorum dicta preſſius examines. Monent qui Leibnitianas tuentur partes, ſe de illis loqui viribus, quæ dum effectus ſuos producunt, per reſiſtentias ſibi oppoſitas ſucceſſive conſumuntur: has enim vires eſſe reſiſtentiis illis proportionales, ſive magnum, ſive parvum temporis intervallum ſit, quo illum ſuum effectum præſtant. Quod ſemel conſumtum eſt, proportionale eſt reſiſtentiis, quæ ad effectum producendum ſuperari debuerunt, ſive alterum ſimul conſumatur ſive non, ſive citius conſumatur ſive tardius.* Tum paulo infra ad Mairanum, qui motus æquabiles in retardatos convertit, hæc reſpondet. *Sed vero cum motus retardati, in æquabiles convertuntur, vis plane aliter ſe habet. Innitebantur priora huic theſi, quod vires, quæ producendo effectum a reſiſtentiis ſibi oppoſitis conſumuntur, ſunt ut effectus illi totales, ſive uti translationes maſſæ per ſpatium aſcenſus eæ, quibus plane impenditur quidquid in corpore eſt virium. Si motum ſubſtituas uniformem, vires illæ producentes non amplius concipi poſſunt, ut inter productionem effectus ſui per reſiſtentias contrarias abſorbendæ*: Hactenus Bulfingerus, qui addit virium æquabilium nullum eſſe effectum totalem, quia vires illæ non conſumuntur, ſed ſemper integræ perſeverant. Similia habet Hermannus in citata diſſert. de menſura virium vivarum pag. 12. quo loco inter alia ſcribit propoſitionem hanc *omnia impedimenta motus, quæ vim aliquam extinguunt, ſimul ſumta huic vi æqualia ſunt*, perinde claram & certam videri, ac illud geometricum principium *omnes partes una collectæ & totum ſunt æqualia*.

15. Quid vis Bulfingere? Vires conſumtas eſſe proportionales reſiſtentiis? Aſſentior. Quid tum? Sequiturne vires eſſe ut quadrata celeritatum, niſi pariter reſiſtentiæ ſint ut eadem quadrata? Quomodo vero id oſtendis? Num ex eo, quod reſiſtentiæ in aſcenſu ſint ut vires in deſcenſu? Qui vero efficis vires in deſcendendo acquiſitas eſſe ut quadrata celeritatum? Sunt, inquies, ut ſpatia peracta, quæ quadratorum habent rationem. At non vides ſpatia ipſa præciſe ſumta eſſe non poſſe menſuram virium creſcentium, quia ſpatium majus majori tempore perficitur, & pars hujus ſpatii exceſſu temporis confecta non ſolum per vires,

vires , quas illo exceſſu corpus accepit , ſed etiam per vires , quas primo tempore acceperat , diutius permanentes conficitur; majoris autem ſpatii per eamdem omnino vim magis durantem confectio vim corporis minime auget? Negas in motibus æquabilibus ſpatium eodem tempore percurſum eſſe menſuram virium, & in motibus acceleratis ponis ut menſuram hujuſmodi ſpatium, cujus bona pars exceſſu temporis per vires primum acceptas , quæ tunc æquabiles ſunt , ſive perinde ſe exerunt ut æquabiles, tranſitur? Num inficias ieris tempus quidquam conferre ad longius ſpatium eadem vi magis durante conficiendum? Scio quo te vertis. Vires, quæ ab oppoſitis reſiſtentiis vincuntur, ſunt ut effectus totales , ſive uti tranſlationes maſſæ per ſpatium aſcenſus eæ , in quibus tunc impenditur quidquid in corpore eſt virium. Concedo vires eſſe ut effectus totales. At nego effectus totales eſſe uti tranſlationes maſſarum. Quis enim tibi dabit in maſſis transferendis impendi quidquid in corpore eſt virium ; cum bona pars virium non in maſſa movenda , ſed in ſuperanda gravitatis reſiſtentia inſumatur? Conſidera corpus , quod aſcendat ab E (*Fig.* 40.) & quod primo minuto perveniat ad D ob contrariam gravitatis actionem , alioquin perventurum ad 8 , ſi nulla gravitas opponeretur ; hic vides tranſlationem maſſæ per ſolum ſpatium E D eſſe non poſſe effectum virium totalem , ſed habendam eſſe rationem etiam ſpatii D 8 , quod conficeretur, niſi pars vis ſe in vincenda reſiſtentia gravitatis exereret. Quod cadit in omnia alia loca ſpatii A E. Quamobrem ſolæ tranſlationes maſſæ quantitatem effectorum totalium exæquare non poſſunt. Optionem igitur tibi do eligendi utrum velis , an effectus totales ſint ſimul uti tranſlationes maſſæ & reſiſtentiæ ſuperandæ, an vero ſolum ut eædem reſiſtentiæ. Si primum, jam effectus totalis in ſpatio E A erit ratione ſpatii quadruplus effectus totalis in ſpatio N G, & ratione reſiſtentiæ erit duplus, ideoque effectus totalis in ſpatio E A octuplus effectus totalis in ſpatio N G. Quæ res nec tibimetipſi commode cadit. Quod ſi vires in aſcenſu & effectus totales earumdem ponuntur in ſola ratione reſiſtentiarum ob nuper allatam Hermanni propoſitionem , quæ mihi quoque certiſſima eſſe videtur , jam hujuſmodi reſiſtentiæ in ſpatio E A non ſunt niſi duplæ reſiſtentiarum in ſpatio N G , atque ideo ſolum duplam rationem virium & effectorum totalium evincunt. Non ſum neſcius , quod exitum habeas Bulfingere, quemadmodum duplæ vires mortuæ pel-

lentes quadruplam vim vivam efficiunt, ita duplas vires mortuas reſiſtentes quadruplam vim vivam extinguere. At certiorem te facio mihi in his rationibus contorquendis hoc unum fuiſſe propoſitum, ut te ad hunc locum deducerem; quo intelligeres & fatereris in ratione a ſpatio quadruplo poſita, quod Leibnitius, Wolphius, Hermannus, & alii tanti faciunt, ſi ſpatium per ſe ſpectetur, nullum eſſe cauſſæ Leibnitianæ præſidium, ſed ejus vim alibi, quam in ſpatio poſitam, in eo ſcilicet jam explicato §. 128. & infra magis declarando majoris ſcilicet ac minoris celeritatis, qua preſſiones fluunt, principio. Deſine igitur illud nobis inculcare vires eſſe proportionales reſiſtentiis, ſive parum, ſive multum temporis in iis perimendis impendatur. Id enim ultro fatemur. Sed ne ex eo concludas rationem temporis eſſe propemodum alienam ab hoc negotio. Etſi enim vires ob id ipſum, quod plus aut minus durent, nequaquam minores aut majores fiant, tamen maſſam per longius ſpatium, ſi tardius a reſiſtentiis vincantur, deferre queunt: idque in cauſſa eſt, cur nolumus vires eſſe ſpatiis peractis proportionales.

16. Sed Bulfingerum pauliſper dimittamus & revertamur ad Hermannum. Quoniam is tamquam pro aris & focis pugnat pro ſumma virium mortuarum, ſive in deſcenſu corpus pellant, ſive in aſcenſu reſiſtant, quæ rationem ſpatiorum ſequatur, quamquam ea mihi videar in ſuperioribus attuliſſe, quæ rem omnino conficiant, nihilominus ad eam magis ſub oculos ponendam alia in præſenti producam. Quæ in ſuperioribus ex Galilæo conſtituta fuere, perſpicuum faciunt corpus V primo minuto, conficere ſpatium A B palmo æquale, 2 minuto tres palmos B C; 3 quinque palmos C D, 4 ſeptem palmos D E (*Fig.* 40.) quia vero impetus jam productus eam vim habet, ut corpus illo percitum ſpatium percurrat duplum ejus, quod percurrit eodem impetu, dum gradatim generatur, illud etiam palam faciunt, corpus V ſecundo minuto duos palmos conficere vi prioris impetus jam generati, quo, dum primo minuto generabatur, unum palmum A B tranſivit; ex quo conſequitur virtute illius impetus, qui ſecundo minuto per tres palmos B C efficitur, corpus unum tantum palmum percurrere; idem vero corpus V tertio minuto ob cauſſam modo explicatam ex quinque palmis C D, quos peragrat, quatuor peragrare vi duorum impetuum, qui jam integri exſiſtunt, atque ideo vi novi impetus, quem cum ipſo gravitas per totum ſpatium C D communicat, unum tantum deſcribere

ſcribere palmum, ut in prioribus minutis contigerat; denique corpus V ob eaſdem rationes quarto minuto tribus integris impetibus ex ſeptem palmis ſex, novo autem unum tantum palmum peragrare. Quamobrem cum corpus eſt in B, ſine alio impetu, qui denuo communicetur, vim habet uno minuto conficiendi duos palmos, cum eſt in C, uno minuto & ſine alio impetu vim percurrendi quatuor; cum eſt in D, vim ſex, cum demum in E vim 8. Hac igitur vi ſurſum ab E corpus pellatur; ſi gravitas non foret, ſpatium E 8 octo palmorum percurreret; ſed quia gravitas eſt, & experientia patet perveniri ſolum in D, ſpatium uno minuto percurrit ſolum ſeptem palmorum, & contraria gravitatis actio ſolum efficit, ut abſolvat ſpatium uno palmo minus eo, quod ſine oppoſita gravitate metiretur. Jam vero in D corpus habet eamdem vim, ac ſi deſcenderet per AD, atque ideo conficiendi ſex palmos uno minuto, niſi gravitas reſiſteret. Quia vero gravitas jugiter obnititur, & ſolum quinque ſecundo minuto palmos aſcendit, impetu contrario, qui eo tempore generatur a gravitate, fit, ut ſpatium conficiat uno palmo minus eo, quod ſine contrario impetu gravitatis percurreret. Eodem modo planum fit contrariam actionem gravitatis, quæ tertio & quarto minuto ſe exerit, eſſe cauſſam, cur corpus uno minuto percurrat ſpatium uno palmo minus illo, quod ab eodem, ſi per gravitatem non ſtaret, conficeretur. Cujus ratio peti etiam poteſt ex eo, quod quemadmodum in deſcenſu, impetu favente, qui generatur, unum palmum corpus promovetur, eo vero, qui generatus eſt, duplum ſpatium, ſcilicet duos palmos; ita in aſcenſu impetu contrario, dum generatur, corpus unum palmum retrahitur ab eo loco, quo alioquin perveniſſet. Nam ex hoc intelligitur corpus ea vi, qua ſurſum aſcendit ab E, octo palmos ſingulis quatuor minutis confecturum fuiſſe, niſi gravitas impediret; ſed ea objecta primo minuto conficere debere octo minus uno propter primum contrarium impetum gravitatis, qui paulatim generatur; ſed quia hic impetus contrarius ſecundo minuto jam generatus eſt, ſecundo minuto percurrere ſex, niſiquæ nova vis a gravitate deſtrueretur; ſed quia gravitas eſt, & conficit ſolum quinque, id indicio eſſe vi contraria gravitatis fieri, ut ſolum palmum retrahatur ab eo loco, quo ſine oppoſita gravitate perventurum fuiſſet. Eodemque modo perſpicuum fit in tertio & quarto minuto vi novi impetus contrarii fieri, ut corpus ab eo loco, quem abſente gravitate

dato tempore attigiſſet, ſolum unum palmum retrahatur .

17. Quibus conſtitutis ſic cum Hermanno congredior. Impetus & vires mortuæ gravitatis in aſcenſu & deſcenſu ſunt proportionales non ſpatiis ſed temporibus, ſi in ſingulis inæqualibus ſpatiis A B, B C (*Fig.* 40.) C D, D E, quæ temporibus æqualibus corpus emetitur, impetus, qui generantur, ſunt æquales. Res autem ita ſe habet. Nam illi impetus etiam in Leibnitianorum ſententia ſunt æquales, quorum virtute fit, ut corpus idem ſpatium eodem tempore promoveatur, ſi motui faveant, retrahatur, ſi obſiſtant. Siquidem cum eodem tempore idem ſpatium conficitur, etiam celeritatum quadrata, quibus per eos vires proportione reſpondent, ſunt æqualia. Liquet autem ex iis, quæ modo expoſuimus, virtute novorum impetuum, qui per illa inæqualia ſpatia, ſed æqualibus temporibus a gravitate imprimuntur, corpus deſcendens unum ſemper palmum procedere, & aſcendens retro unum pariter palmum trahi. Igitur conſequens fit eoſdem impetus eſſe æquales, atque ideo non ſpatiis, quæ inæqualia ſunt, ſed temporibus utpote æqualibus proportione reſpondere .

18. Arctius aſtringi, ut mihi quidem videtur, ratio non poteſt, ſed nihilominus putat Hermannus ſe habere aliquid, quo rem expediat. Lego apud Bulfingerum citato loco pag. 86. eum confugere ad ſemicycloides, e quorum ſingulis punctis ſi corpora aſcendant aut deſcendant, æquale tempus impendunt, non tamen æqualem vim aut amittunt aut acquirunt; immo ultra procedere ac monere facillime curari poſſe, ut minor altitudo majori tempore, major minori percurratur. Non ſunt igitur temporibus proportionales vires aut acquiſitæ in deſcenſu aut in aſcenſu peremtæ, ſed ſpatiis. Bulfingerus autem idem notat uſuvenire in chordis arcuum circuli ejuſdem. Sit enim circulus AMD (*Fig.* 42.) cujus diameter AD horizonti ad angulos rectos inſiſtat. Abſcindantur BD & CD, quarum altera BD ſit quadrupla alterius CD, & ductis ſemiordinatis BM, CE, ex punctis M & E ad punctum D chordæ MD & ED ducantur. Wolphius tom. 2. Element. Math. §. 310. Mech. & alii innumeri monſtrarunt deſcenſus per chordas MD & ED eſſe iſochronos; nihilotamenminus celeritas a globo decidente per MD acquiſita eſt duplo major velocitate acquiſita per ED, propterea quod illa ad hanc ſe habet, uti $\sqrt{BD}$ ad $\sqrt{CD}$. Ex quo efficitur vim per MD eſſe majorem vi per ED, ſcilicet aut duplam in

Carte-

Carteſiana virium æſtimatione, aut in Leibnitiana quadruplam. Quod aliter ſe haberet, ſi gravitas vim temporibus proportionalem communicaret. Nam æquali tempore æqualis vis imprimeretur. Quod ſi quam celeritatem globi acquirunt in deſcendendo, ea per chordas DM, DE aſcenderent, aſcenſus forent æquidiuturni, attamen vis a gravitate deſtructa per MD vim peremtam per DE minime æquaret.

19. Sed res ipſa, qua de agitur, facilem reſpondendi rationem ſuppeditat. Etenim ex eo quod (*Fig.* 42.) vis per MD in D acquiſita vim excedat acquiſitam per ED, nego evidenter concludi, inæquales ictus & impetus elementares globis æqualibus per MD & ED inflictos a gravitate fuiſſe, cum in fine inæquales exſiſtere potuerint ob eam rationem, quod de æqualibus ictibus minus per MD & plus per ED a minori reſiſtentia per MD, quam per ED, detractum fuerit. Quotus enim quiſque ignorat, ſi ex æqualibus inæqualia ſubducantur, reſtare inæqualia, & vim, cui minus reſiſtitur, majorem manere alia ceteroquin æquali, cui major objicitur reſiſtentia? Ita vero res hic ſe habet. Nam planum MD valde minus inclinatum eſt plano ED, atque ideo multo minus obnititur gravitati, qua truditur corpus deorſum.

20. Sed ut aliquid afferam exactius, aliam, ac vulgo ſolent, trado rationem (*Fig.* 42.) cur tempus deſcenſus per MD ſit æquale tempori deſcenſus per ED; quod nolim putari ſupervacaneum, quia cauſſam a priori ſub oculos ponet, & mihi viam muniet ad illud declarandum, de quo diſputamus. Sed res paulo altius petenda eſt. Primum itaque ſtatuo poſita G gravitate abſoluta globi, gravitatem reſpectivam $\frac{1}{m}$ G in chorda MD eſſe ad gravitatem reſpectivam $\frac{1}{n}$ G ejuſdem globi in chorda ED, ut longitudinem chordæ MD ad longitudinem chordæ ED; nam

$AD : DM = DM : DB$. §. 330. Geom. Wolphii

& $G : \frac{1}{m} G = DM : DB$ §. 261. Mech. ejuſdem

ergo $AD : DM = G : \frac{1}{m} G$

Rurſus $AD:DE = DE:DC$ §. 330. Geom. Wol.

& $G:\frac{1}{n}G = DE:DC$ §. 261. Mech. ejuſdem

ergo $AD:DE = G:\frac{1}{n}G$

Cum igitur in tertia & ſexta analogia primi termini AD ſint æquales, item & tertii G, erit $DM:DE = \frac{1}{m}G : \frac{1}{n}G$, ſcilicet ut chorda DM ad chordam DE, ita gravitas reſpectiva $\frac{1}{m}G$ in chorda DM ad gravitatem reſpectivam $\frac{1}{n}G$ in chorda DE, Q. E. O.

21. Deinde ajo chordas MD, ED eſſe in ratione ſubduplicata altitudinum, quæ ipſis reſpondent, BD, CD. Sit enim $AD = a$, $BD = c$, $MD = x$, $DE = z$ & $CD = d$. Erit ex num. antecedenti

$AD:DM = DM:BD$ Quare
$\sqrt{AD}:\sqrt{BD} = DM:BD$ ideſt

$\sqrt{a}:\sqrt{c} = x : \frac{x\sqrt{c}}{\sqrt{a}} = c$ Rurſus ex num. antecedenti

$AD:DE = DE:CD$ ideoque
$\sqrt{AD}:\sqrt{CD} = DE:CD$ ideſt

$\sqrt{a}:\sqrt{d} = z : \frac{z\sqrt{d}}{\sqrt{a}} = d$ Quare

$c:d = \frac{x\sqrt{c}}{\sqrt{a}} : \frac{z\sqrt{d}}{\sqrt{a}} = x\sqrt{c} : z\sqrt{d}$

& dividendo primum & tertium per $\sqrt{c}$, ſecundum & quartum per $\sqrt{d}$ erit $\frac{c}{\sqrt{c}} : \frac{d}{\sqrt{d}} = x:z$ ideſt $\sqrt{c}:\sqrt{d} = x:z$

ideſt $\sqrt{BD}:\sqrt{CD} = MD:DE$
ideſt chordæ MD & DE ſunt in ratione ſubduplicata altitudinum BD & CD. Q. E. O. Gravitas autem $\frac{1}{m}$ G in chorda MD eſt ad gravitatem $\frac{1}{n}$ G in chorda DE, ut MD: DE, num. ante-

antecedenti. Ex hoc ergo ſequitur eſſe

$$\frac{1}{m}G:\frac{1}{n}G=\sqrt{BD}:\sqrt{CD}.$$

22. His conſtitutis propius ad rem accedo. Si ſingulæ preſſiones & vires elementares in primo ſpatio, ſive plano ſemper eodem modo ſe habeant ad ſingulas preſſiones & vires elementares in altero, celeritates productæ debent eſſe in ratione preſſionum. Quod ut omnino evidens etiam Aſtipulatores Leibnitii aſſentiuntur. Quamobrem iis celeritatibus ſpatia eodem tempore percurruntur, quæ ſint in ratione preſſionum. Sunt autem preſſiones in ſingulis punctis chordæ MD ad preſſiones in ſingulis punctis chordæ ED, ut eadem ſpatia ſive plana MD & ED. Nam in planis inclinatis preſſiones, quibus celeritas generatur, non a gravitate abſoluta, cujus aliqua pars ab oppoſito plano jugiter perimitur, ſed oriuntur a relativis $\frac{1}{m}G$, $\frac{1}{n}G$, quæ in omnibus punctis chordarum ſunt ſemper eædem. Hujuſmodi vero preſſiones, ſive gravitates reſpectivæ $\frac{1}{m}G$, $\frac{1}{n}G$ ſunt chordis & ſpatiis MD, ED proportionales. Chordæ igitur MD, ED eodem tempore a globo percurruntur.

23. Quamobrem etiam celeritates acquiſitæ ſunt in ratione chordarum MD & ED; ſed MD & ED ſunt in ratione ſubduplicata altitudinum BD & CD. Igitur celeritates eamdem rationem ſequuntur. Quare ſi BD ponatur quadrupla CD, celeritas per chordam MD acquiſita erit dupla celeritatis per chordam ED comparatæ.

24. Quibus explicatis nego in his deſcenſibus iſochronis eſſe quidpiam, quod rationes a nobis allatas pro numero preſſionum in ratione temporis refutet. Nam ex eo quod numerus preſſionum (*Fig.* 42.) in chorda MD ponatur æqualis numero preſſionum in chorda ED, haud efficitur illud abſurdum vires acquiſitas a globis æqualibus, qui per eas chordas deſcendunt, eſſe æquales, ſed illud ſolum, in quo nihil abſurdi eſt, ſummam omnium preſſionum & virium in chorda MD eſſe ad ſummam omnium preſſionum & virium in chorda ED,

ſicuti

ſicuti una ex preſſionibus in chorda MD, ſcilicet gravitas reſpectiva $\frac{1}{m}$ G ad unam ex preſſionibus in chorda ED, ſcilicet ad gravitatem reſpectivam $\frac{1}{n}$G ſe habet. Porro $\frac{1}{m}G : \frac{1}{n}G = MD : ED$. Ergo ſumma omnium virium, ideſt vis acquiſita in deſcenſu per MD eſt ad ſummam omnium virium, ideſt ad vim acquiſitam in deſcenſu per ED, ut MD ad ED; ideſt ut celeritas in fine ſpatii MD ad celeritatem in fine ſpatii ED num. 22. Vires igitur acquiſitæ in deſcenſu per chordas circuli ejuſdem ſunt in ratione celeritatum, tametſi gravitas æquales ictus utrique corpori infligat.

25. Quorum ſi ratio habeatur, poſſumus rationem reddere omnium eorum, quæ in deſcenſu corporum accidunt, quod prius uno exemplo doceo, quam pergam ad alia. Si corpus deſcendens ex plano inclinato ED (*Fig.* 42.) comparemus cum corpore eodem deſcendente ex altitudine CD plani ejuſdem ED, quod perſpicuitatis gratia duplum ponatur altitudinis CD; ex notis Mechanicæ legibus, de quibus inter alios vide Wolphium citatis locis, conſtant hæc omnia, celeritates in fine ſpatiorum & vires acquiſitas eſſe æquales, gravitatem abſolutam urgentem corpus in altitudine CD eſſe duplam gravitatis reſpectivæ urgentis idem corpus in plano ED, tempus vero per ED duplum temporis per CD. Ex quibus conſequitur ſingulas preſſiones in perpendiculari eſſe duplo majores ſingulis preſſionibus in inclinato, ſed preſſiones in inclinato propter duplum tempus eſſe duplo plures preſſionibus in eo plano, quod ad perpendiculum erectum eſt. Quamobrem efficitur celeritates & vires acquiſitas eſſe æquales, uti experientia docet, propterea quod quanto ſumma virium in perpendiculari eſt major ſumma virium in inclinato, ſi ratio intenſionis ſingularum virium habeatur, tanto ſumma virium in inclinato excedit ſummam virium in perpendiculari, ſi ad numerum preſſionum attendas. Igitur alterum altero compenſatur, & vires æquales acquiruntur.

26. Superſedeo ab afferendis aliis exemplis, quod ad eum finem, quem mihi propoſui, recitatum eſt ſatis. Atque ut Hermanno plane ſatisfaciam, ajo, qua ratione deſcenſus æquidiuturni per plures ejuſdem circuli chordas expenſi ſunt, eadem deſcenſus pariter iſochro-

chro-

crhonos per arcus ſemicycloidis eſſe expendendos, proptereaquod arcus ſemicycloidis chordas in circulo genitore reſpondentes duabus partibus ſuperant. Sed quia deſcenſus per curvas peculiarem habent difficultatem, ſeorſim de iis diſputabo.

ARTICULUS V.

§. 136. Continuatio ejuſdem argumenti.

NAm quas hactenus conſideravimus mortuas gravitatis vires, illæ in ſingulis ſpatii percurſi punctis eædem ſunt; quo facilius intelligitur inter eas rationem non ſpatiorum ſed temporum intercedere. At non ita facile eſt rem expedire, cum de iis preſſionibus agitur, quæ aliæ in aliis ſpatii partibus inveniuntur. Videtur enim earum ſumma non temporibus, quæ illas per ſe non variant, ſed ſpatiis, in cujus ſingulis punctis preſſio mutatur, reſpondere. Sed præſtat in hanc rem afferre, quæ in citata Diſſert. de menſura virium §. 14. adjicit Hermannus ad ea, quæ jam ex eodem exſcripſimus & refellimus. Cum enim duobus modis contingere poſſit, ut alia in aliis locis gravitas ſit, primo in parvis a centro telluris intervallis, altero in hac magna diſtantia ſed in lineis curvis, eo quod curvarum partes aliæ aliter gravitati corporis deſcendentis reſiſtunt, auctor ad primam hypotheſim hæc tradit. Sit AE recta (*Fig.* 43.) quam corpus ab A deſcendendo metitur, & gravitas jugiter augeatur; AN referat gravitatem in loco A, BM vero, CK, *c*I, EH, & aliæ omnes interpoſitæ gravitates auctas in ſingulis punctis B, C, *c*, E, & in aliis omnibus interjectis. Summa omnium harum virium eſt æqualis vi vivæ, adeo ut vis viva acquiſita per ſpatium AB ſit ad vim vivam acquiſitam per ſpatium AE, ut area ABMN ad aream AEHN. Quod confirmari poteſt ex eo, quod modo advertimus, in colligenda ſumma harum virium non eſſe rationem habendam temporis, ad cujus ſingula inſtantia relatæ vires nos fugit quales ſint, ſed ſpatii, cujus ſingulis punctis vires diverſæ reſpondent, & quidem hujuſmodi, ut ex Nevvtono ſit vis AN in puncto A ad vim BM in puncto B, ut inverſe quadrata diſtantiarum a puncto E, quod centrum telluris ponatur, ideſt ut BE^2 ad AE^2. Igitur etſi cum gravitas conſtans eſt, vires mortuæ ſimul ſumtæ ſint in ratione temporum, tamen cum gravitas in ſingulis ſpatii punctis varia eſt, ſummam preſſionum ſpatiis reſpondere ſuadetur.

2. Idem

2. Idem ſuadent motus & deſcenſus in curvis; de qua re hæc habet Hermannus. Si corpus deſcendat in curva quacumque AEH (*Fig.* 44.) & ejus pondera in diverſis a terra diſtantiis per applicatas aP, bQ, dR ad curvam PQRH exprimantur: vis in B exprimetur area $abQP$, & vis in D exprimetur area $adRP$ &c. fac enim arcum $AD = s$, abſciſſam $ad = x$, ordinatam $dR = g$, quæ exprimit gravitatem reſpectivam & mortuam, qua corpus in D urgetur, elementum arcus, ſeu $DM = ds$, elementum abſciſſæ, ſeu dm vel $NM = dx$. Recta autem DF paralella axi aH exponat gravitatem corporis abſolutam $= G$; & ex F ducatur FG ad perpendiculum inſiſtens tangenti curvæ DG. Ex quibus fit gravitatem corporis in D abſolutam in duas reſolvi DG & FG, quarum altera FG utpote ad curvam perpendicularis a curva retunditur, & ſe in corpus non exerit. Quamobrem deorſum pellitur ſola vi mortua DG, quæ gravitatem reſpectivam in D exprimet, atque idcirco applicatam dR æquabit & erit $= g$. Jam vero quia ob angulum FDG æqualem alterno DMN, & angulos D & N rectos triangula DFG & DMN ſimilia ſunt; erit

$$DM : NM = DF : DG$$

$$ds : dx = G : \frac{G\,dx}{ds}$$

Cum vero in ſpatiolo $DM = ds$ gravitas eadem permaneat, vis viva ab ea generata erit productum ex gravitate $\frac{G\,dx}{ds}$, quæ ſola agit in D, in ſpatiolum ds. Quare elementaris vis viva $= G\,dx$, & integrando tota vis viva acquiſita per ſpatium AD erit $= Gx$; quia G conſtans eſt utpote gravitas abſoluta. Hermannus non ponit $DF =$ gravitati abſolutæ, ſed $=$ reſpectivæ $dR = g$, quæ variatur; unde infert elementum vis vivæ $= g\,dx = dm\,TR$, & integrale vis vivæ $= Sg\,dx = adRP$. Sed nihil obſtat, quominus DF perpendicularis ad horizontem ponatur exprimere gravitatem abſolutam conſtantem, cum in hac tanta a centro telluris diſtantia in curva ADH gravitas abſoluta eadem ſit, & reſpectu corporis per curvam pellendi non varietur, niſi quia aliæ aliter curvæ partes obſiſtunt. Quo fit ut DF poni poſſit $=$ gravitati abſolutæ, ut nimirum FG exprimat partem, quæ a

curva

curva perimitur, DG partem, qua corpus deorſum urgetur, ſcilicet gravitatem reſpectivam. Poſita autem DF = gravitati abſolutæ nemo in analyticis verſatus non videt, quod inde concluditur. Sed de hoc paulo infra.

3. Nunc pergo referre aliam Cl. Viri rationem §. ſuper. num. 18 a deſcenſu per ſemicycloides ductam, qua Samuelis Clarke objecta in libro, qui inſcribitur *Recueil des diverſes Pieces ſur la Philoſophie, la Religion naturelle, l'Hiſtoir, les Mathematiques par Mrs. Leibnitz, Clarke, Nevvton, & autres Auteurs celebres*, refutare conatur. Eſt autem hujuſmodi. Sit curva ADH ſemicyclois, cujus vertex H, circulus generator *a*XH habens diametrum *a*H (*Fig.* 44.) finitori ad angulos rectos inſiſtentem, & idcirco ſemibaſis ſit A*a*. Corpus autem gravitate abſoluta ſemper æquabili percitum percurrat cavitatem curvæ ADH. Qua in re Nevvtonus primum & alii deinceps oſtenderunt in A corpus tota gravitate abſoluta pelli deorſum, in B vero & aliis punctis parte ſolum gravitatis abſolutæ, ſcilicet relativa; & gravitatem in A ad gravitatem, qua corpus pellitur in B, ita ſe habere, uti arcum AH ad arcum BH, & ſimiliter gravitatem reſpectivam in B ad gravitatem reſpectivam in D, uti arcum BH ad arcum DH. Quamobrem ſi ad puncta A, B, E, D, H, & ad omnia interjecta excitentur rectæ perpendiculares, quæ referant vires, ideſt ſint æquales in A arcui AH, in B arcui BH, efficitur ab Hermanno vires eſſe ut quadrata velocitatum.

4. Quod mihi videor hoc pacto poſſe concludere. Ad diametrum enim *a*H circuli *a*XH, qui cycloidem ADH (*Fig.* 44.) generavit, intelligantur applicatæ *a*P, *b*Q, *d*R *m*T &c. quæ referant gravitates reſpectivas, quibus corpus deorſum pellitur in punctis A, B, D &c. ideſt propter demonſtrata a Nevvtono ſint æquales reſpondentibus arcubus AH, BH, DH &c. Gravitas abſoluta dicatur $= G$, & reſpectiva $= g$. Sit $ad = x$, $dm = dx =$ NM, & $AD = s$, $DM = ds$, vis per $AD = v$, & ejus elementum $= dv$. Excitetur in D recta DF perpendicularis ad horizontem, & æqualis arcui AH, ſive rectæ *a*P, ut nimirum referat gravitatem abſolutam, & conſtantem G; ex puncto F ducatur perpendicularis FG ad tangentem DG productam; erit ex dictis DG gravitas reſpectiva g, qua corpus deorſum pellitur, poſtquam ab A in D pervenit, & ideo DG = arcui DH = applicatæ

R*d*.

Digitized by Google

Rd. Quamobrem propter ſimilitudinem triangulorum DFG, DMN erit DM : NM $=$ DF : DG

$$ds : dx = G : \frac{G\,dx}{ds}$$

Unde $DG = dR = g = \frac{G\,dx}{ds}$, quæ gravitas reſpectiva g per ſpatiolum eadem manet. Ex quo fit, ut ſi ex Hermanno vis viva ſit æqualis producto ex vi mortua conſtante in ſpatium, ſit $dv = g\,ds$, & ſubſtituendo valorem, $= \frac{G\,dx\,ds}{ds}$ $= G\,dx$, & integrando, cum G ſit conſtans, $v = Gx =$ rectangulo compoſito ex abſciſſa ad in gravitatem conſtantem G $= aP$, ideo vis viva v acquiſita per AD erit $= aP.ad$; & ob eamdem rationem vis viva V acquiſita in deſcenſu per $AE = aP.ae$. Unde

$$v : V = aP.ad : aP.ae = ad : ae$$

Eſt vero ſpatium ad ad ſpatium ae in ratione duplicata celeritatis acquiſitæ in deſcenſu per ad ad celeritatem acquiſitam in deſcenſu per ae, & celeritates in perpendicularis aH punctis d & e ſunt æquales celeritatibus, quæ in curvæ punctis æqualiter altis D & E in deſcenſu per AD & AE acquiruntur. Vide Wolphium Mech. §. 308. Ergo vires v & V acquiſitæ in deſcenſu per arcus AD, AE ſunt in ratione duplicata celeritatum, quibus in fine horum arcuum corpora pelluntur.

5. Sed hæc omnia iiſdem omnino rationibus refelluntur, quibus ſuperiora refutata ſunt. Nam tota pendent ex principio jam labefactato, quod ſumma omnium virium mortuarum & æquabilium ſpatio, non tempori proportione reſpondeat. Poſtquam enim Hermannus valorem gravitatis reſpectivæ DG (*Fig.* 44.) ſupputavit, & eum toto ſpatiolo DM permanere notavit, eumdem valorem duxit in ſpatiolum DM, ex quo producto vi calculi integralis alia omnia efficiuntur. Quod ſi ponatur ſumma omnium virium mortuarum tempori reſpondere, aliter eodem integrali calculo concludetur. Sint enim eadem ut paulo ante, ſcilicet (*Fig.* 44.) $ad = x$, $dm = dx =$ NM; $AD = s$, $DM = ds$ & $ae = X$, $er = dX$; $AE = S$; $EV = dS$; ſpatiola autem DM, EV eodem tempore

pore T percurrantur, & vires vivæ in his ſpatiolis æquali tempore percurſis dicantur dv & dV. Quibus poſitis erit gravitas, ſeu vis mortua in D & per totum ſpatium DM $= \frac{G\,dx}{ds}$ num. 4. & gravitas per ſpatium EV $= \frac{G\,dX}{dS}$. Quare ſi ſumma omnium virium ſeu vis viva in ſententia Hermanni eſt æqualis producto ex vi mortua æquabili in tempus, erit $dv : dV = \frac{G.T.dx}{ds} : \frac{G.T\,dX}{dS} = \frac{dx}{ds} : \frac{dX}{dS}$

Sed in motu æquabili ſpatia ds, dS eodem tempore percurſa ſunt ut celeritates c & C in punctis D & E acquiſitæ in deſcenſu per AD & per AE. Quare $dv : dV = \frac{dx}{c} : \frac{dX}{c}$: ſunt autem ex notis theorematibus c & C in ratione ſubduplicata altitudinum ad, ae, ſive ut $\sqrt{x}$ ad $\sqrt{X}$. Ergo $dv : dV = \frac{dx}{\sqrt{x}} : \frac{dX}{\sqrt{X}} = x^{-1:2}\,dx : X^{-1:2}\,dX$, & integrando vires vivæ v & V acquiſitæ in deſcenſu per AD & AE erunt ut $2x^{1:2}$ ad $2X^{1:2}$, ſive ut $x^{1:2}$ ad $X^{1:2}$, ſive ut $\sqrt{x}$ ad $\sqrt{X}$, ſive ut $\sqrt{ad}$ ad $\sqrt{ae}$; ſed etiam celeritates c & C in punctis D & E ſunt in ratione ſubduplicata altitudinum ad & ae, ſive ut $\sqrt{ad}$ ad $\sqrt{ae}$. Ergo vires vivæ acquiſitæ in deſcenſu per AD & AE ſunt uti celeritates.

6. Ex quo intelligi poteſt ſummam quæſtionis dijudicari non poſſe Analyſis calculo, qui omnes in partes verſari poteſt pro qualitate formulæ, a qua ſumit initium, ſed ad eam definiendam cum in multis Matheſeos ac Phyſicæ capitibus, tum in hac re formulam ipſam expendi oportere, utrum ſcilicet ſumma virium mortuarum in motu æquabili ſit productum ex preſſione ſive vi mortua in ſpatium, an vero in tempus. Cum vero temporis rationem habendam non eſſe ſed ſpatii, non iis rationibus, quemadmodum articulo ſuperiore monſtratum eſt, Hermannus confecerit, ut rem hanc, qua de agimus, extra omne dubium poſuerit, ex analyticis calculis nihil pro æſtimatione virium Leibnitiana, uti ob eamdem cauſſam nec pro Carteſiana erui poſſe concluditur.

A R-

ARTICULUS VI.

De actionibus Elaſtrorum in corpora.

§. 137. Scholion

HÆc latius, quam hic locus poſtulet, explicare volui, quo perſpicuum facerem parum eſſe momenti vel in rationibus, quæ pro Leibnitiana virium æſtimatione ex aſcenſu vel deſcenſu corporum gravium ducuntur, vel in iis, quibus argumenta a Carteſianis inde petita pro antiqua menſura refutata fuerunt; & ſimul docerem veram reſpondendi rationem aliunde peti non poſſe, quam ex iis, quæ §. 128. de velocitate preſſionum fluentium ſtatuimus. Verum ut id in majori luce ponatur, neceſſe mihi videò rem altius petere, & de actionibus elaſtrorum in corpora accuratius, quam ibi ſit factum, differere. Qui locus cum multa requirat nondum explicata principia motus, atque idcirco hic ſatis commode ſervatis methodi legibus tractari non poſſit, una cum iis, quæ in ſuperiori articulo diſputata fuerunt, appendicis loco haberi poterit. Quod in cauſſa eſt, ut etiam plura ex iis, quæ ibidem diſputata fuerunt, ſim retexurus, perinde ac ſi ſeparatam ab iiſdem diſputationem hic habeam.

§. 138. Diviſio

Qua in re primum exponam elaſtrorum leges & rationes inde ab auctoribus ductas in ſententiam Leibnitii; deinde quid a Carteſianis contradici poſſit; tum eaſdem magis urgere conabor, & ab objectis vindicare nitar; denique eorum adminiculo, quæ ex aſcenſu vel deſcenſu corporum in ſuperiori articulo objecta fuerunt, refutare contendam.

§. 139. Scholion

Nam qui Leibnitii partes ſequuntur, arcem Leibnitiani Syſtematis in colliſione corporum elaſticorum jamdudum poſuere. Poſtquam enim Leibnitius in ultimo illo Schediaſmate, quod eſt in Actis Erud. Lipſiæ an. 1695. Men. April. tom. 3. edit. Venet. 1742. ſe habere in promtu ſignificavit, quo per horum corporum conflictum Carteſianos refelleret; Joannes Bernullius primum anno 1742. deinde Graveſandus, Muſſchenbroechius, Daniel Bernullius Joannis filius & alii hoc caput diligentiſſime expenderunt, & multas inde ſubtiles rationes e re ſua duxerunt. Nam Camuſium in Comment. Acad. Pariſ. an. 1728. in horum nume-

numero nequaquam pono, quod etſi in eadem materie luculenter verſatus ſit, & ad ſpeciem Leibnitio faveat, re tamen vera, ut ſuo loco videbimus, Carteſii ſententiam ibidem ſecutus eſt.

§. 140. Propoſitio

Sed ut initium capiamus a Bernullio, qui de hiſce corporibus in ſententiam Leibnitii primus enucleate diſſeruit, is tomo 3. N. CXXXV. *Diſcours ſur le mouvement* pag. 43. hæc habet. Sint plures ordines elaſtrorum (*Fig.* 45.) A 1 B, B 2 C &c. ex. gr. 12, quorum quodlibet eadem vi ſit inſtructum & ad eumdem angulum A 1 B 30 graduum apertum, ita ut ceſſante vi comprimente ad angulum 90 graduum ſe poſſit expandere. Ex altera parte ſit punctum fixum A, ex altera globus S, cui applicetur potentia, quæ 12 elateres ad angulum 30 graduum compreſſos cohibeat. Sint pariter tres alii elateres E 1 V, V 2 Z, Z 3 P ejuſdem plane vis ac ſuperiores, & contra punctum fixum E ad eumdem angulum 30 graduum compreſſi a corpore R alicujus potentiæ adminiculo. Ex quibus patet, quemadmodum numerus elaterum A Q eſt quadruplo major numero elaſtrorum E P, ita ſpatium A Q occupatum a primis eſſe quadruplo majus ſpatio E P, quod complent ſecunda, propterea quod ſingula ſunt æqualia & ad angulum triginta graduum aperiuntur, & ſimiliter ſpatium ab illis occupatum, cum ad maximam dilatationem perveniunt, quatuor partibus ſuperare ſpatium, quod hæc maxime expanſa tenent; eo quod ſingula æqualium brachiorum ab angulo 30 ad uſque angulum 90 graduum expanduntur.

§. 141. Propoſitio

Quibus poſitis eamdem potentiam requiri demonſtrat, quæ tum elaſtra A Q, tum elaſtra E P cohibeat; propterea quod omnes elateres A Q & omnes E P premant globos S & R, perinde ac ſi utrinque unus tantum A 1 B, ſive O 12 Q, E 1 V, ſive Z 3 P foret; fac enim eſſe ſolum elaſtrum A 1 B, & ad extrema latera A & B applicatas duas potentias A & B, quarum quælibet ſit æqualis potentiæ, quæ idem elaſtrum A 1 B contra punctum fixum A ſuſtineret. Sane potentiæ in B eodem modo obſiſteretur, ac ſi loco æqualis potentiæ foret punctum fixum, itemque potentia in A eamdem preſſionem ſuſtineret, ac ſi loco potentiæ punctum fixum eſſet in B. Quamobrem ſi pro elatere A 1 B in B foret punctum fixum, potentia in C eamdem vim ſuſtineret, ac cum eſt elater A 1 B. Quod in alios omnes cadit: igitur potentia in S obnititur elateri O 12 Q, perinde ac ſi ſolus foret; & ob

eamdem rationem potentia in R ſoli elateri Z 3 P. Hæc autem elaſtra vim æqualem habere poſuimus. Igitur æqualis potentia in S & R deſideratur, quo elaſtra compreſſa permaneant. Quod etiam hoc pacto confici poteſt. Vis mortua brachii E 1 ſe in punctum fixum E exerit; non ergo in potentiam, quæ foret in V; multo minus igitur in potentiam, quæ eſt in R. Preſſio vero brachii V 2 a potentia, quæ foret in Z, aut in R, ſuperari non debet, eo quod brachium Z 2 æquali vi eidem obnititur; atque ob eamdem rationem vis mortua brachii Z 2 vinci non debet a potentia in P aut in R, quia brachium Z 3 æquali vi percitum eidem objicitur. Igitur potentia in R ſolam vim mortuam brachii P 3, ideoque potentia in S ſolum æqualem vim mortuam brachii Q 12 ſuſtineat neceſſe eſt. Vires ergo æquales deſiderantur. Hactenus omnia mihi probantur.

§. 142. Propoſitio

Jam vero ſi ab S & ab R (*Fig.* 45.) potentias, quæ elaſtris obnituntur, ſummoveas, elateres ſe expandere incipient, & omnis eorum vis in globos, qui æquales ponuntur, tranſibit. Quo enim ferri poteſt? Nam quidpiam illius non perit, cum jugiter globi ſint, in quos tranſmittat. Cum autem Bernullius videret hic dici poſſe partem aliquam in ipſis elaſtris expandendis impendi, in Diſſertatione Latina de vera notione virium vivarum, quam poſt Gallicam edidit, quod aliquos adhuc audiret ſtare a Carteſio, quæque exſtat tom. 3. N. CXLV. §. 15. hæc habet verba: *Abſtrahimus ſcilicet a materia ipſa elaſtrorum, quæ quidem etiam movenda eſt, ſed quam tamquam nullam, vel admodum parvam ſupponimus, ita ut nihil in illis præter eorum virtutem elaſticam conſideremus*. Quod infra enucleatius tractabo. Interim maneat vim omnem, quam exercent elaſtra, in globos transfundi.

2. Vis autem viva 12 elaterum æqualium eſt quadruplo major vi trium, quorum ſinguli vim mortuam ſingulorum 12 æquant. Tribus enim elaſtris pro unitate ſumtis utrinque hæc unitas in numero 12 quater perfecte continetur. Quod enim eſt vis in primis tribus, id totum invenitur in ſecundis tribus, in tertiis & in quartis, ideoque maſſæ & vires trium per 4 perfecte multiplicantur. Quamobrem tametſi preſſiones ſive vires mortuæ ſint æquales, nihilominus vis viva elaſtrorum A Q quatuor partibus (*Fig.* 45.) vim vivam elaſtrorum E P ſuperat.

§. 143.

§. 143. Propoſitio

Deinde ſpeciatim a Bernullio definitur virium proportio ſecundum quadrata celeritatum. Nam elaſtra compreſſa AQ, EP (*Fig.* 45.) exprimantur rectis AQ, EP (*Fig.* 46.) ut nimirum AQ ſit quadruplo major EP. Ad puncta Q & P, ubi globi eſſe finguntur, curvæ deſcribantur QN, PM, quarum ordinatæ HN, CM exponant celeritates, quas in expanſione elaſtrorum ſecundum rectas AQH, EPC pro axibus ſumtas globi acquirunt, & in ſingulis punctis H, C, &c. habent. Puncta autem H & C ita definiri intelligantur, ut ſemper ſit AQ : EP = QH : PC. Jam vero fiat $AQ = a$, $QH = x$, $Hh = dx$, $HN = V$, & incrementum celeritatis V, ſive $Rn = dV$. Fiat inſuper $EP = na$, quæ quantitas n erit nota ob notam rationem quadruplam inter AQ & EP, ſcilicet $= \frac{1}{4}$, ideoque $PC = nx$, & $Cc = ndx$; denique ſit $CM = v$, & $Tm = dv$. Item T tempus per QH & dT ejus elementum per Hh, t vero tempus per PC & dt tempuſculum per Cc. His poſitis faciamus elaſtra ſe diſtrahere & globos ab iis impulſos uſque ad puncta H & C perveniſſe, quibus in locis liquido patet vim mortuam elaſtrorum ſive preſſionem, quæ vocatur p, eſſe futuram æqualem; propterea quod cum ſit AQ : EP = QH : PC, ſinguli elateres in utraque ſerie ad puncta H & C ad eumdem angulum expanſi inveniuntur. Quo fit, ut æqualis vis mortua ab utriſque exerceatur §. 141. Porro ex notis regulis incrementum celeritatis, ſive $Rn = dV$ eſt æquale vi prementi productæ in tempuſculum, quo percurritur ſpatium $Hh = dx$. Neque enim vis viva ab elatere per ſpatium QH acquiſita quidpiam confert ad incrementum celeritatis in globo, eo quod globus jam ea celeritate fertur, quam vis viva ab elatere per ſpatium QH exercita requirit, ſive eadem celeritate, ac requirit vis ab elaſtro acquiſita. Quare $dV = pdT$; ſed dT ex notis regulis $=$ ſpatiolo dx diviſo per celeritatem V, ideſt $= \frac{dx}{V}$. Igitur $dV = \frac{pdx}{V}$, ſive $VdV = pdx$, atque ob eamdem rationem $Tm = dv = \frac{npdx}{v}$ & $vdv = npdx$. Quare integrando $\frac{1}{2}V^2 = Spdx$,

& $\frac{1}{2}$ $v^2 = Snpdx$: ideoque $V^2 : v^2 = Spdx : Snpdx = 1 : n = a$: $na = AQ$: EP. Sed AQ & EP deſignant vires, quæ ſe habent uti numerus elaſtrorum, ſive ut AQ ad EP §. 142. Igitur vires ab elaſtris exercitæ & a globis per ſpatia QH, PC acquiſitæ ſunt uti V^2 ad v^2, ſive ut quadrata celeritatum, quibus in fine ſpatiorum globi feruntur.

§. 144. Corollarium

Quod ſi numerus elaſtrorum infinitus ponatur, & AQ, EP (*Fig.* 46.) infinitæ, tunc expanſis elaſtris per ſpatia finita QH, PC, preſſio p in omnibus illorum punctis eadem erit & conſtans, eo quod elaſtra eodem modo compreſſa ſemper manerent.

Quare $\frac{1}{2}V^2 = Spdx = px$, & $V^2 = 2px$, & $\frac{V^2}{x} = 2p$, itemque $\frac{1}{2}v^2 = Snpdx = npx$, & $v^2 = 2npx$, & $\frac{v^2}{nx} = 2p$. Ex quo apparet curvas QN, PM eſſe parabolas, quarum diameter eſt æqualis & eadem, ſcilicet $2p$. In parabolis enim parameter eſt = quadrato ſemiordinatæ per abſciſſam reſpondentem diviſo; ut res hic ſe habet; nam $\frac{V^2}{x}$ in curva QN & $\frac{v^2}{nx}$ in curva PM ſemper ſunt æqualia conſtanti $2p$. Quo poſſum confirmare Bernullii ſententiam; cum enim ſit eadem parameter, erit eadem parabola, ideſt poſito puncto P ſuper Q, & abſciſſa PC ſuper abſciſſam QH, curva PM congruet cum QN, eritque ejus portio, ſicut PC eſt portio abſciſſæ QH, & ſemiordinata CM congruet cum aliqua ſemiordinata parabolæ QN, quæ ad aliquod punctum axis inter Q & H interceptum ducatur. Quamobrem erit $HN^2 : CM^2 = HQ : CP$. Porro HQ & PC ſunt ut vires, & HN & CM ut celeritates. Igitur vires ſunt ut quadrata celeritatum.

§. 145. Corollarium

Quo etiam compertum ſit, ut advertit idem Bernullius, hunc caſum eſſe propemodum eumdem, ac corporum gravium cadentium per QH & PC, quia gravitas etiam eſt preſſio conſtans; atque ideo in corporum lapſu vires eſſe ut altitudines, itemque & quadrata celeritatum eſſe ut eaſdem altitudines. Quo via munitur ad illa infirmanda, quæ articulo ſuperiori contradicta fuerunt. Sed de hoc infra accurate. §. 146.

§. 146. Propoſitio

Multa alia ſunt, quæ premit Bernullius in dicta Gallica Diſſertatione, ſed quia ſunt alterius generis, tametſi in corporibus elaſticis verſentur, ideo mittimus in præſenti, & ad illa, quæ habet in citata Diſſertatione Latina, utpote his magis affinia progredimur. Cum enim objiceretur nullam haberi temporis rationem ab iis, qui ex quadratis celeritatum vires æſtimant, ad hoc refutandum objectum multa reſpondet, ac primum §. 10. & 11. ineptum eſſe aliter judicare de quantitate rei, quæ ipſa per ſe ſit, quam per definitam menſuram, quæ aliquoties ſumta totum exhaurit, neque aliquid ad rem pertinere, quo tempore illa dimenſio perficiatur; quemadmodum perſpecto quot aquæ menſuræ in cratere ſint, nihil attinet ſcire, quanto tempore canalis aquam ſufficiens craterem impleverit, aut perſpecto quot aquæ menſuræ ex alio cratere in alium transfuſæ fuerint, nihil facit ad rem plus aut minus temporis in ea transfundenda inſumtum fuiſſe. Eadem vero menſura in 12 elaſtris quater ſumitur, in tribus ſemel §. 142. num. 2. Igitur quadrupla vis ab elaſtris 12 in corpus tranſmigrat, & ſubquadrupla a tribus, quamcumque rationem habeant tempora, quibus hæc elaſtra ſe exerunt in maſſas æquales.

147. Propoſitio

Deinde quo magis perſpicuum faciat, ſi modo conſtet quantum vis communicatur, nihil referre quo tempore, vel quo modo, quibuſve elementaribus preſſionibus id fiat, ponit quatuor elaſtra æqualia tribus diverſis modis ſe in corpus æquale exerere, primo ut (*Fig.* 47. num. 1.) omnes quatuor elateres alius alium conſequantur, & tantum primus L 1 obicem proxime premat, quartus autem 4 A corpus A. 2° (*Fig.* 47. num. 2.) ut duo M 1, M 3 obicem M, alii duo 2 B, 4 B corpus æquale B proxime pellant. 3° ut (*Fig.* 47. num. 3.) omnes quatuor, alius ſuper alium poſiti ſint, & quilibet tum in obicem N, tum in corpus æquale C proxime niſum exerceant. His vero ſubjectis figuris advertit preſſionem primorum quatuor num. 1. fore 1, ut eſt num. 4. & tempus 4; preſſionem ſecundorum num. 2. eſſe 2 & tempus 2; preſſionem denique tertiorum num. 3. eſſe 4 & tempus 1; & nihilominus vires ab illis elaſtris in corpus æquale transfuſas & ideo celeritates inde profectas eſſe prorſus æquales. Quo igitur cumque modo elaſtra diſponantur, & quocumque tem-

pore in corpus incurrant, vires elaſtrorum numero proportione reſpondent; eoque numero cognito ſupervacaneum eſt aliorum habere rationem.

§. 148. Propoſitio

Verum id, quo maxime innititur Bernullius, quove ſe putat vel pertinaciſſimum Adverſarium poſſe revincere, ab homine explicatum eſt §. 21. itaque ſe habet. Sint duo corpora inæqualium maſſarum A = 4, B = 2 (*Fig.* 33.) & quod Schema non exhibet, in C poſita intelligantur ita ut ſex elaſtra omnino compreſſa æqualis magnitudinis atque virtutis inter illa intercipi percipiamus. Quæ elaſtra cum diducentur, corpora repellent A & B, alterum dextrorſum, alterum ſiniſtrorſum, quoad omnino diducta fuerint; cumque preſſiones ſint æquales utrinque, & maſſæ inæquales, erunt celeritates in ſingulis momentis acquiſitæ in ratione inverſa maſſarum, atque ideo aggregatum omnium celeritatum diductione completa, ideſt celeritas corporis A erit ad aggregatum omnium celeritatum, ideſt ad celeritatem corporis B, ut B ad A, ideſt ut 1 ad 2, & ſi celeritas corporis A dicatur a, & celeritas corporis B dicatur b, erit $A : B = b : a = 2 : 1$. Unde $Aa = Bb$. Quia vero celeritas corporis minoris B eſt major celeritate majoris A, & quidem in ratione inverſa maſſarum, erit ſpatium CB confectum a corpore B ad ſpatium CA eodem tempore percurſum ab A in ratione directa celeritatum b & a, ideoque in inverſa maſſarum, ſive $CB : CA = A : B$. Quo conſequens fit ſpatium BC duplum eſſe ſpatii AC; cumque elaſtra æqualis virtutis & æqualia æqualiter dilatentur, & ſingula idem ſpatium occupent, numerus elaſtrorum in ſpatio CB erit duplus numeri elaſtrorum in parte CA. Quare corpus B vim accepit a quatuor elateribus, corpus A a duobus tantum, ideoque vis A erit ad vim B ut 1 ad 2, ideſt ut a ad b; unde ſi vires A & B dicantur v & V, erit $v : V = a : b$, & multiplicando ultimos terminos per $Aa = Bb$, erit

$$v : V = Aa^2 : Bb^2.$$

Vires igitur ſunt in ratione compoſita ex ſimplici maſſarum A & B & ex duplicata celeritatum a & b.

§. 149. Scholion

Quid hic Carteſiani dicere poſſint, Bernullius non videt, quia confugere ad tempus non poſſunt, quod eodem omnino tempore vires illæ in corporibus generatæ fuerunt.

§. 150.

§. 150. Scholion

Atque hæc ſunt quæ potiſſimum urget Bernullius. Quoniam vero cum his neceſſitudinem habet una ex Muſſchembroechii rationibus tom. 1. *Eſſai de Phyſ.* pag. 181. propoſita, hic eam ſubjici non foret abs re. Sed quia §. 128. num. 4. eamdem late explicavimus, inde ad confirmandas Bernullii rationes peti poteſt, quin opus ſit in eadem nunc immorari diutius.

ARTICULUS VII.

De actione elaſtrorum in corpora. Bernullii & Muſſchembroechii rationibus quid contradici poſſit a Carteſianis.

§. 151. Scholion

QUæ Bernullii & Muſſchembroechii rationes magnam præſeferunt vim; re tamen vera nullam habere Carteſiani arbitrantur, quorum partes hoc loco ſuſcipiens, primum adverto hic eſſe memoria recolenda, quæ §. 128. num. 5. diſſerui de diſcrimine inter corpora, quæ habent quidem vim vivam, ſed quæ a propria cauſſa non reſtauratur, interque illa, quorum vis indeſinenter reficitur, deque exemplo corporis non gravis, quod cum gravi decidente conjungatur.

§. 152. Propoſitio

Quo poſito, aliud nunc etiam noto diſcrimen, quod inter commemoratorum corporum actiones intercedit. Nam cum pila projecta in aliam quieſcentem incurrit, ſolum aliquam partem tribuit ſuæ celeritatis; ſi vero in aliam tardius motam verſus eamdem plagam, per gradus celeritatis eos, qui ſunt ultro citroque æquales, nihil illam urget, ſed per eos tantum, qui ſuperant. At ſi cum corpus grave deſcendere incipit, corpus non grave infra poſitum indeſinenter premat, res ita ſe habet. Quælibet minima preſſio prima, ſecunda, tertia &c. ſe per corpus qua grave, qua non grave ſubjectum æqualiter fundit, & in ſuppoſito non gravi celeritatem efficit eam, quam vis in gravi reſtans ex pluribus preſſionibus genita exigit, quamque eadem reliqua vis in dicto gravi efficeret; ſi non grave e medio auferretur, adeo ut ſi in aliquo puncto ſpatii deſcenſus corpus ſuperius urgere gravitas deſineret, grave cum non gravi nullum amplius celeritatis vel minimum gradum communicaret. Quamobrem ſi ab illo ſpatii puncto

uſque ad finem a gravi corpus gravitatis expers premitur & novam velocitatem acquirit, id non fit propter vires jam acceptas a gravi, propterea quod hæ per maſſam utramque pro ratione earumdem fuſæ inveniuntur, ſed propter novam æqualem preſſionem, qua grave pellitur a gravitate, quacumque celeritate feratur, perinde ac ſi nulla percitum foret.

§. 153. Corollarium

Quare celeritatis incrementum recte ponitur $= p\,dt$, dt tempuſculum & p exprimente preſſionem, ſive gravitatem, ſi maſſa ſit eadem, atque ideo ratio illius, tamquam unitatis ratio, negligi poſſit. Sin autem ſint maſſæ diverſæ, erit $= \frac{p\,dt}{m}$, quia celeritates a preſſionibus genitæ ſunt in ratione inverſa maſſarum.

§. 154. Propoſitio

Sed ne hiſce formulis in errorem trahamur, advertendum eſt pluribus modis accidere poſſe, ut corpora gravitatis expertia a gravibus deorſum trudantur. Primo ſi gravia ſint æqualia & maſſæ inertes pellendæ inæquales; ſecundo ſi gravia ſint inæqualia, & maſſæ gravitatis expertes æquales; 3° ſi tum gravia tum inertia ſint maſſæ æqualis. Atque his omnibus modis illud contingere videbimus, non penitus omnem vim a gravi in non grave tranſire, propterea quod grave retinet eam vim omnem, qua fertur eadem celeritate, atque ab eo pulſum non grave. Quæ omnia ut uberius explicentur ſint in Q & P duo gravia $G = 4$ (*Fig.* 46.) & $g = 1$; maſſæ inertes M & m a gravibus deſcendentibus per rectas QH, PC pellendæ æquales, & ſingulæ $= 1$; ita ut g ſive maſſa gravis g ſit cuilibet illarum æqualis, & G, ſive ejus maſſa ſit quadrupla M & m. Quamobrem a preſſione gravitatis G ut 4 gignenda eſt celeritas in maſſa ut 5, conflata nimirum ex gravi $G = 4$ & inerti $m = 1$; ſive preſſio $=$ G, & maſſa $= G + M$; a preſſione vero gravitatis g ut 1 efficienda eſt celeritas in maſſa $g + m = 2$. Quare ſi ex gravitate G ſumatur tantum $\frac{1}{4}$ G, quæ eſt $= g$, erunt velocitates ab iis preſſionibus æqualibus genitæ ſingulis quoque tempuſculis æqualibus

bus in ratione reciproca maſſarum, ideſt $\frac{1}{4}dV : dv = g + m : G + M$.

Cum vero ſingulæ reliquæ $\frac{3}{4}$ G eamdem celeritatem gignant, erunt quidem velocitates integræ in ratione inverſa maſſarum; ſed maſſa minori per 4 multiplicata, quemadmodum celeritas $\frac{1}{4}dV$ multiplicanda eſt per 4, ut fiat integra celeritas, quæ a G producitur. Unde $dV : dv = (g+m)4 : G + M = 8 : 5$.

Quare cum ſingulis momentis ſit eadem vis gravitatis eademque maſſa, erunt omnia velocitatum incrementa in eadem ratione, atque idcirco etiam aggregata æqualibus finitis temporibus genita eamdem rationem ſequentur. Quare

$$V : v = (g+m)4 : G + M = 8 : 5.$$

Quia vero in ſententia Carteſii vis eſt = producto ex maſſa in celeritatem, erit vis a gravitate G genita $= 4\,(g+m)\,(G+M)$, & vis a gravitate g erit $= (G+M)\,(g+m)$. Si hæ vires dicantur F & f, erit $F : f = 4\,(g+m)\,(G+M) : (G+M)\,(g+m) = 4 : 1$. Quod optime congruit cum ſyſtemate Carteſiano, in quo preſſio G quadrupla preſſionis g, & conſtanter eadem perſeverans tempore æquali vim ſolum quadruplam efficere debet. At in hypotheſi Leibnitii erit $F : f = 16\,(g+m)^2(G+M) : (G+M)^2(g+m) = 16\,(g+m) : G+M = 16.2 : 5 = 32 : 5$. Porro illud conſtat in utroque ſyſtemate bonam partem vis in gravi reſtare, & eo quidem majorem, quo major eſt maſſa gravis.

§. 155. Propoſitio

Sin autem gravia G & g ſint æqualia & maſſæ inertes inæquales, ideſt $M = 4$, & $m = 1 = g = G$, erit

$$dV : dv = m + g : M + G$$

ideſt ſingula incrementa celeritatum æqualibus tempuſculis acquiſita ſunt in ratione inverſa maſſarum, ideoque velocitates V & v finitis temporibus æqualibus acquiſitæ ſunt in eadem ratione. Erit igitur in ſententia Carteſii

$$F : f = (m+g)\,(M+G) : (M+G)\,(m+g) = 1 : 1$$

unde vis F = vi f. At in ſententia Leibnitii

$$F : f = (m+g)^2\,(M+G) : (M+G)^2\,(m+g) = m+g : M+G = 2 : 5.$$

2 Ex

2 Ex quo iterum patet celeritates in maſſis inertibus genitas non eſſe in ratione inverſa tantummodo maſſarum inertium, ſed etiam gravium. Quamobrem incrementum celeritatis non foret $p\frac{dt}{m}$, ſive $g\frac{dt}{m}$, ſed $g\frac{dt}{m+g}$. Quo igitur uti poſſimus formulis $p\frac{dt}{m}$, aut $g\frac{dt}{m}$ neglecta maſſa gravis g, neceſſe foret hanc eſſe adeo parvam ratione inertis m, ut fere omnem celeritatem cum illa communicaret, & tuto negligi poſſet; nam ſi g ſit $= \frac{1}{1000000}m$, erit $g\frac{dt}{m+g} = g\frac{dt}{m}$, non quidem ad mathematicam ſubtilitatem, ſed ad phyſicam veritatem, qua res parum diſcrepantes pro æqualibus habentur.

§. 156. Propoſitio

Hæc de gravibus ſe in maſſas exerentibus, quæ finguntur non graves, ſint dicta in anteceſſum, ut quæ de elaſtris corpora, quæ illa vi carent, prementibus deinceps dicturi ſumus, illuſtrentur; nam cum ita ſe habeat grave ad non grave, uti elaſtrum compreſſum vi ſe expandendi percitum ad aliud corpus minime compreſſum, & nulla ſaltem præſenti donatum vi ſe dilatandi ſe habet, res eodem modo contingat neceſſe eſt, niſi quod gravitas eſt preſſio conſtans gravique maſſæ reſpondens; vis autem elateris in expanſione jugiter minuitur. Quamquam ſi cum Bernullio ſeriem infinitorum elaſtrorum fingamus, hoc ipſum quoque diſcrimen evaneſcit §. 144. 145. Sed ut preſſius agamus, ſint AQ & EP elaſtra penitus æqualia & æqualiter compreſſa (*Fig.* 46.) quæ obice amoto per æqualia ſpatia QH & PC vi elaſtica dilatentur, & in Q & P pellant maſſas inæquales $M = 1$ & $m = 4$. Abſciſſæ æquales QH, PC ponantur $= x$, $Hh = dx$, & $Cc = dx$; ſemiordinatæ HN, hn exhibeant celeritates V maſſæ M, & CM, cm celeritates v maſſæ m. Rn incrementum celeritatis $= dV$, & celeritatis v incrementum T$m = dv$. Preſſio in H & C utpote æqualis ſit $= p$: ſi maſſæ pellendæ forent æquales, eſſet $dV = p\,dT = p\,dx : V$, & $dv = p\,dt = p\,dx : v$. Sed quia maſſæ non ſunt æquales, & vires æquales, incrementa celeritatum debent eſſe in ratione inverſa obſtaculorum ſive maſſarum §. 154. Eſſai de Phyſiq. Muſſ-

Muſſchemb. ſcilicet $dV = mpdx : V$, & $dv = Mpdx : v$; & $VdV = mpdx$, & $vdv = Mpdx$, atque integrando

$$V^2 : v^2 = mSpdx : MSpdx = m : M = 4 : 1$$

$$V : v = \sqrt{m} : \sqrt{M} = 2 : 1.$$

Quod igitur experientia Muſſchembroechius oſtendit §. 128. ratione nunc conſtat celeritates V & v ab eodem elaſtro in maſſis inæqualibus M & m genitas rationem habere maſſarum reciprocam atque ſubduplicatam.

§. 157. Propoſitio

Jam vero videamus quam rationem tempora ſequantur. dT, dt ſint tempuſcula in percurrendis æqualibus ſpatiolis Hh, Cc (*Fig.* 46.) erit $dT = dx : V$, & $dt = dx : v$; unde $VdT = dx$, & $vdt = dx$. Quare $VdT = vdt$. Ex quo efficitur $V : v = dt : dT$. Scilicet tempuſcula in percurrendis ſpatiolis æqualibus Hh, $Cc = dx$ eſſe in ratione inverſa celeritatum. Quod idem oſtendi poteſt de omnibus aliis tempuſculis, quibus alia ſpatiola æqualia perficiuntur. Eſt autem in æqualibus ſpatiis QH, PC æqualis ſpatiorum æqualium & infinite parvorum numerus. Igitur neceſſe eſt aggregatum omnium tempuſculorum dT ſive tempus finitum T, quo percurritur ſpatium QH, eſſe ad aggregatum omnium tempuſculorum dt, ſive ad tempus t, quo ſpatium æquale PC, in ratione inverſa celeritatum, ideſt $T : t = v : V$. Eſt autem $v : V = \sqrt{M} : \sqrt{m}$ §. 156. Igitur $T : t = \sqrt{M} : \sqrt{m} = 1 : 2$, ſive tempora ſunt in ratione directa ſubduplicata maſſarum. Quamobrem verum quidem eſt celeritatem acquiſitam ab M eſſe duplam celeritatis acquiſitæ ab m; ſed tempus, quo elater maſſam quadruplo majorem m pulſat, eſt duplum temporis, quo idem elater maſſam M pellit quatuor partibus minorem. Quis autem non videt eamdem vim vivam elateris, quæ a ſua cauſſa jugiter regeneratur, duplo plures ictus maſſæ m in ſpatio PC, quam maſſæ M in ſpatio QH, duplo majori tempore impingere? Nam in ſingularum expanſionum ſpatiolis plus duplo tempore manet in eodem ſtatu compreſſionis elater EP, quam idem elater AQ, atque idcirco ex ſingulis ictibus, quibus AQ urget maſſam M, duplo majorem numerum elater EP maſſæ majori m imprimit. Mirum igitur eſſe non debet, ſi etiam duplo majorem vim in eadem generat maſſa m, contra quam ſentit Muſſchembroechius, & ex Leibnitiano ſyſtemate conſequens fit

§. 139.

§. 139. Quod autem ab homine objectum eſt de vi definita 100 graduum, quam quis haberet, aut de vi, quam corpus deſcendens acquiſivit, id valet in eas vires, quæ ſemel genitæ jugiter a ſua cauſſa non regenerantur. Sive enim parvo, ſive longo tempore cum alio corpore communicentur, perinde eſt, quod eædem manent, nec aliunde quidpiam acquirunt: non autem valet in illas, quæ incrementa continua a cauſſa motrice recipiunt, & eo quidem plurima, quo diutiſſime manent in eo ſtatu motus ab aliquo non impediti, qui viribus generandis accommodatus eſt.

§. 158.

Quæ omnia conveniunt etiam in ea, quæ preſſit Bernullius §. 143. & ſequentibus. Nam oſtendi poteſt (*Fig.* 45.) tempus T, quo ſe exerunt 12. elaſtra A Q ad tempus t, quo 3 elaſtra E P ſe explicant, eſſe in ratione celeritatum & in ſubduplicata maſſarum. Siquidem iiſdem poſitis, quæ in dicto §. ſtatuta fuerunt, erit $dT = dx : V$, & $dt = ndx : v$, itemque $VdT = dx$, & $vdt = ndx$: Quare $VdT : vdt = dx : ndx$; eſt autem ob cognitum valorem $n = \frac{1}{4}$, dx quadruplum ndx. Igitur VdT erit quadruplum elementi vdt. Celeritas vero V eſt dupla celeritatis v §. 143. Ergo ut proportio quadrupla exſiſtat, tempuſculum dT tempuſculo dt duplo majus ſit oportet. Quod monſtrari poteſt de omnibus aliis tempuſculis, quibus in recta QH (*Fig.* 46.) ſpatiola ut 4, & in recta PC ſpatiola ut 1 percurruntur. Cum vero QH ſit quadrupla rectæ PC, ſpatiolorum in QH ut 4, & in PC ut 1 æqualis numerus continebitur. Jam vero ſingula ſpatiola ut 4 rectæ QH percurruntur tempore duplo majori, quam ſingula ut 1 rectæ PC. Efficitur ergo ſummam omnium tempuſculorum dT, ſive tempus T per QH eſſe duplam ſummæ omnium dt, ſive temporis t per PC. Q. E. O. Jam vero duplo tempore exſiſtit dupla vis, & ſimplo ſimpla, ſi quæ ſingulæ preſſiones illam generant, preſſiones ſingulas alterius exæquant; ut res hic uſuvenit, quod explicata elaſtra A Q ad quodcumque quadruplo majus ſpatium eadem vi prementе pollent, ac expanſa E P ad quodcumque quadruplo minus §. 143. Vis igitur effecta ab elaſtris A Q eſt ad vim generatam ab elaſtris E P ſolum in ratione dupla, quæ eſt

ratio

Digitized by Google

ratio celeritatum, & ſubduplicata maſſarum.

§. 159. Objectio & Reſponſio

At enim ſi elaſtra non agerent ſecundum numerum laminarum, ſed ſecundum tempus, vis in aliquo elaſtro determinata non foret, cum poſſet in infinitum augeri: nam ut maximum corpus eidem applicaretur, ita longiſſimo tempore ſe expanderet, & maximam cum eo vim communicaret. Sed quid in hoc abſurdi eſt? Si corpus infinito tempore deſcenderet, nonne infinitam acciperet vim a gravitate, qua indeſinenter pelleretur? Jam vero elaſtrum, quamdiu manet compreſſum, tamdiu novis ictibus a cauſſa vis elaſticæ indeſinenter urgente pulſatur. Quid igitur mirum, ſi quo corpus diutius manet compreſſum, eo majorem vim accipiat a cauſſa elateris, & ideo majorem tribuere poſſit?

§. 160. Corollarium

Quo etiam refellitur id, quod de aqua in cratere contenta a Bernullio dictum eſt; nam cum aqua crateris definita ſit, comparari poteſt cum vi jam generata, quæque novas a ſua cauſſa acceſſiones non habet. De qua vi diximus nihil referre, utrum majori aut breviori tempore inſumatur: at vis, quæ preſſionibus generatur, definita non eſt, ſed eo major vel minor eſt, quo plures aut pauciores preſſiones accipit, & eo plures aut pauciores accipit, quo longiori vel minori tempore generatur: atque conferri poteſt, ſi placet, cum aqua ex epiſtomio erumpente, ad cujus quantitatem noſcendam neceſſe eſt rationem habere temporis, quo pergit effluere.

§. 161. Corollarium

Quamobrem ut poſitis iiſdem epiſtomiis & eodem tempore, quantitates aquæ fluentes ſunt æquales; ita in illo experimento ſex elaſtrorum, quæ ſingulis momentis eadem vi corpora in utramque partem pellunt, iiſdemque inſtantibus urgere incipiunt & deſinunt, in corporibus, quorum alterum altero duplo majus eſt, vires omnino eædem generantur. Quod vero tota vis quatuor elaſtrorum CB (*Fig.* 33.) in corpus B duplo minus, & tota vis duorum elaſtrorum CA in corpus A duplo majus transferatur, ex quo efficit Bernullius vim genitam in B vi genita in A duabus partibus eſſe majorem, id hac ratione diſtingui poteſt. Conceditur enim de vi tota, quatenus tempori reſpondet, non autem, quatenus

numero

Digitized by Google

numero elaſtrorum. Siquidem jam oſtenſum eſt vim totam, quæ agit, non eſſe ipſam per ſe determinatam, ſed a temporibus, quorum rationem ſequitur, determinari.

§. 162. Propoſitio

Ad illud autem de viribus vivis, quæ diverſæ ponuntur a mortuis §. 142. reſpondere facile eſt. Nam cardo quæſtionis non verſatur in eo, utrum vires vivæ a mortuis diſcrepent, necne. Quidquid enim quidam Carteſiani dixerint, id pro certo & explorato ab omnibus ponendum eſt, inter vires vivas & mortuas tantum eſſe diſcriminis, quantum inter lineam & ſuperficiem, aut ſuperficiem inter & ſolidum. Quod ſuo loco iis rationibus docui, quæ rem omnino conficiant §. 124. 125. Summa igitur quæſtionis in eo poſita eſt, utrum *vis* viva ad vim vivam eſſe poſſit, uti preſſio ad preſſionem, vel uti celeritas ad celeritatem, an vero uti quadratum preſſionis & celeritatis ad quadratum preſſionis atque celeritatis. Nam etſi a preſſionibus differant, preſſionum tamen rationem ſequi poſſunt; quemadmodum etſi rectangula ejuſdem altitudinis a baſibus diſcrepent, tamen baſium rationem ſequuntur. Hoc poſito ſi preſſiones ſint conſtantes & tempora æqualia, in ſententia Carteſii oriuntur rectangula æqualium baſium, quæ exhibent vires a preſſionibus genitas, quæque ſunt in ratione baſium, quæ primas preſſiones & celeritates repræſentant. At ſi preſſiones variabiles ſint, tunc quia ſumma preſſionum & celeritatum omnium non eſt in ratione primarum preſſionum, idcirco nec vires genitæ iiſdem primis preſſionibus atque celeritatibus reſpondent, ut accidit in elaſtro A Q duodecim (*Fig.46.*) ſi cum elaſtro E P trium comparetur. Ex hoc igitur nihil concludi poteſt, quod Carteſianum ſyſtema labefactet.

§. 163. Propoſitio

Denique illud ipſum, quod de quatuor elaſtris, quæ tribus modis diſpoſita eamdem vim generant, §. 147. Bernullius adjicit, ut nullam in hoc negotio haberi oportere rationem temporis efficiat, id maxime evincit tempus eſſe attendendum; nam quia preſſio elaſtri L A (*Fig.* 47. n. 1.) eſt preſſionis M B ſubdupla (n. 2.), atque preſſionis elaſtri N C ſubquadrupla (n.3.); tempus autem, quo ſe exerit L A, eſt duplum temporis, quo M B, & quadruplum temporis, quo N C, idcirco vires genitæ ſunt æquales. Quo confirmatur id, quod alibi advertimus, vires æquari productis ex preſſioni-

ſionibus in tempus, quo durant, quæ hic ſunt æqualia.

ARTICULUS VIII.

Continuatio argumenti de actione elaſtrorum in corpora. Stabilitur ſententia Leibnitii.

§. 164. Scholion

HÆc ſunt, quæ ad infirmandas Bernullii & Muſchenbroechii rationes adverſus Carteſianos dici poſſe ſum arbitratus. Nam quod aliqui Carteſio faventes abſolute ajunt non omnem vim elaſtrorum ab elaſtris in corpora inertia tranſire, nullo modo mihi probari poteſt. Nam ſi ponamus elaſtri materiam eſſe admodum parvam, ſi cum materia corporis pulſi conferatur, leges motuum ſatis evincunt omnem fere vim a maſſa elateris in corpus migrare §. 155. Ad quamcumque tamen reſpondendi rationem Carteſianus confugiat, puto hominem ſe ab his anguſtiis expedire non poſſe, & hiſce rationibus, quæ ab elaſtris ducuntur, vehementius preſſis aliterque contortis Leibnitii ſententiam effici reor. Sed antequam id doceam, ſatius eſſe arbitror quædam alia de actionibus elaſtrorum, quæ ſunt in confeſſo apud omnes, diſſerere. Hæc autem partim ex Cl. Camuſio *Mem. de l' Acad. an.* 1728. *pag.* 170, partim ex Diſſertatione Bernullii ſumemus, partim de novo adjiciemus.

§. 165. Propoſitio

Quoniam vero primum & ſecundum Camuſii Theorema ſuperiori capite jam ſolutum eſt, ad tertium veniemus, cujus ſolutionem calculo Algebræ communis datam ſi quis deſiderat, Auctorem adire poterit. Nobis enim calculi differentialis & integralis facilior & expeditior via videtur. Sint itaque duo ordines elaſtrorum, quorum ſingula æqualia ſint, æqualem virtutem habeant, & ad eumdem angulum ſint compreſſa, eorumque longitudines L & $\frac{L}{n}$ rectis AQ, EP (*Fig.* 46.) expoſitæ ſint reciproce ut maſſæ M pellenda ab L, & nM pellenda ab L:n; ideſt L: $\frac{L}{n}$ = nM:M. Fac maſſæ M

cele-

celeritatem $= V$, & primum pone a ſolo elaſtro L pelli tum maſſam M, tum nM, quæ ab elaſtro L acquirat velocitatem Z; eritque ex dictis §. 156.

$$\sqrt{(nM)} : \sqrt{M} = V : Z. \text{ Quare } Z = V\sqrt{M} : \sqrt{(nM)}$$

Jam vero celeritatem Z, quam acquirit maſſa nM cum pellitur ab L, compara cum celeritate v, quam eadem maſſa nM lucratur, cum pulſatur ab $L:n$; eritque ex dictis §. 156.

$$\sqrt{L} : \sqrt{\frac{L}{n}} = \sqrt{(nM)} : \sqrt{M} = \frac{V\sqrt{M}}{\sqrt{(nM)}} : v. \text{ Quare } v = \frac{VM}{nM}$$

Igitur V eſt celeritas, quam acquirit corpus M ab elaſtro L, & $\frac{VM}{nM}$ eſt celeritas, quam corpori nM elaſtrum $\frac{L}{n}$ tribuit.

Quæ celeritates ſi in ſuas maſſas ducantur, erit quantitas motus maſſæ $M = MV$, & quantitas motus maſſæ nM erit

$$= \frac{VMnM}{nM} = VM$$

Unde quantitates motus erunt æquales, & celeritates V & $VM:nM$ in ratione reciproca maſſarum M & nM; ſcilicet ſi maſſa $M = 1$, & $nM = 4$, elaſtrum vero $L = 4$, & elaſtrum $L : n = 1$, erit celeritas V maſſæ M quadrupla celeritatis $VM:nM$ maſſæ nM.

Itemque tempora T maſſæ M & t maſſæ nM erunt æqualia; fac enim ab eodem elaſtro L pelli tum maſſam M, tum nM, & tempus impenſum ab nM cum pulſatur elaſtro L, eſſe $= \theta$, erit ex dictis §. 157.

$$\sqrt{M} : \sqrt{(nM)} = T : \theta. \text{ Quare } \theta = T\sqrt{(nM)} : \sqrt{M}$$

Jam vero tempus θ, quo pellitur maſſa nM ab elaſtro L, confer cum tempore t, quo eadem maſſa nM urgetur ab $\frac{L}{n}$, eritque §. 157.

$$\sqrt{L} : \sqrt{\frac{L}{n}} = \sqrt{(nM)} : \sqrt{M} = \frac{T\sqrt{(nM)}}{\sqrt{M}} : t$$

Quare $t = T\sqrt{M}\sqrt{(nM)} : \sqrt{M}\sqrt{(nM)} = T$

Igitur tempora T & t ſunt æqualia. Q. E. O.

§. 166. Propoſitio

Sint vero nunc juxta Theorema V & VI Camuſii duæ ſeries

ries elaſtrorum $AQ = 12 = L$ (*Fig.* 46.) & $EP = 3 = L:n$, quæ habeant vires P & nP in ratione reciproca longitudinum L & $L:n$, ſive ſit

$$L:\frac{L}{n} = nP:P,$$ & pellant maſſas M & m.

Quod ita intelligendum eſt, ut ſingula elaſtra utrobique ad eumdem angulum ſint contracta, & æqualiter ſe dilatare poſſint, ut ita ſeries 12 elaſtrorum AQ ad quadruplo majus ſpatium ſe expandere poſſit, quam ſeries trium EP. Vis autem mortua EP quadruplo major intelligi poterit, ſi ſingula tria elaſtra non uno conſtent, ſed quatuor parallelis, ut in experimento Bernullii §. 147. (*Fig.* 47. num. 3.) Abſcindantur itaque QH, PC (*Fig.* 46.) in proportione quadrupla, eruntque elaſtrorum AQ, EP, quæ ſe uſque ad puncta H & C explicaverint, vires mortuæ in iiſdem punctis in ratione reciproca longitudinum, ideſt

$$L:\frac{L}{n} = nP:P$$

Fiat $QH = x$, $Hh = dx$, erit $PC = \frac{x}{n}$, & $Cc = \frac{dx}{n}$.

Sit tandem velocitas $HN = V$ & velocitas $CM = v$, ideoque incrementa $Rn = dV$ & $Tm = dv$. Quibus poſitis erit $dV = PdT : M = Pdx : MV$ §. 156. & $VdV = Pdx : M$

& integrando $\frac{1}{2} V^2 = \frac{1}{M} SPdx$.

Itemque $dv = \frac{nPdx}{mnv}$, & $vdv = \frac{Pdx}{m}$, ideoque $\frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{m} SPdx$

Igitur $V^2 : v^2 = \frac{1}{M} SPdx : \frac{1}{m} SPdx = mSPdx : MSPdx = m:M$, & $V:v = \sqrt{m} : \sqrt{M}$; ideſt celeritates ſunt in ratione inverſa ſubduplicata maſſarum.

§. 167. Corollarium.

Quamobrem ſi maſſæ ſint æquales, erunt quoque æquales celeritates V & v. Sin autem maſſa M pulſa ab L ſit quadrupla, ex. g. maſſæ m pulſæ ab $\frac{L}{n}$, erit celeritas V maſſæ M ſubdupla celeritatis v maſſæ m.

Tandem ſi maſſa M ſit $\frac{1}{4}$ maſſæ *m*, erit celeritas V dupla celeritatis *v*.

§. 168. Propoſitio

Quod attinet ad tempora T & *t*, tempuſculum dT in percurrendo ſpatiolo $Hh = dx$, erit $= dx; V$, & $dt = dx: nv$. Quare $dT:dt = nvdx: Vdx$; ſed $v: V = \surd M: \surd m$ §. 166. Igitur $dT:dt = n\surd Mdx: \surd mdx = n\surd M: \surd m$. Eſt autem ratio $n\surd M$ ad $\surd m$ compoſita ex ratione *n* ad 1, ſive nP ad P, & ex ratione $\surd M$ ad $\surd m$. Eſt igitur tempuſculum dT ad tempuſculum dt in ratione compoſita ex inverſa virium mortuarum P & nP, & ex directa ſubduplicata maſſarum M & *m*. Tempora vero finita T & *t* ſunt in ratione tempuſculorum §. 157. Ergo integra tempora dictam rationem ſequuntur, ſive $T:t = n\surd M: \surd m = nP\surd M: P\surd m$

§. 169. Corollarium

Quod ſi maſſæ ſint æquales erit $T:t = nP:P = L: \frac{L}{n} = 12:3 = 4:1$ in hac hypotheſi. Si vero M ſit quadrupla maſſæ *m*, erit $T:t = 4\surd 4:1\surd 1 = 8:1$: ſin autem ſit ſubquadrupla, erit $T:t = 4\surd 1:1\surd 4 = 4:2$

§. 170. Propoſitio

Atque ſimili fere ratione cetera Camuſii Theoremata facili negotio ſolvi poſſunt. Quare ſatius arbitror aliorum demonſtrationem ſuſcipere. Unde ſint duo elaſtra ABQ, Abq (*Fig.* 48.) omnino æqualia, vel potius idem ad angulos ABQ, Abq diverſos apertum; ponanturque, ut accidit in aere, vires mortuæ in Q & *q* proportionales directe denſitatibus, ſeu inverſe expanſionibus & longitudinibus $AQ = L$ & $Aq = L:n$. Igitur ſi vis in Q ſit $= P$, erit vis in $q = nP$: erit enim $L: \frac{L}{n} = nP:P$: Hæc autem elaſtra ita dilatentur, dum maſſas M & *m* pellunt, ABQ in H, & Abq in *h*, ut ſemper ſit

$$QH:Qh = AQ:Aq = L: \frac{L}{n} = nP:P$$

Quamobrem vires mortuæ elaſtrorum, quocumque modo in expanſione decreſcant, in punctis H & *h* erunt in ratione pri-

primarum P & nP; nam vires in H & h ſunt in ratione inverſa expanſionum AH ad Ah; ſive hæ vires dicantur H & h, erit H:h=Ah:AH; eſt autem ex hypotheſi Ah: AH=Aq:AQ $=\frac{L}{n}:L=P:nP$; ergo H : h=P : nP; ideoque vires ſemper eamdem rationem tenent, & exprimi poſſunt per rationem P ad nP. Jam vero ſit QH=x, HM=V, & ideo Hh=dx, SN =dV, & $bm=v$, $sn=dv$. Quia vero ex hypotheſi eſt

$$AQ : Aq = QH : qh \quad \text{ideſt}$$

$$L : \frac{L}{n} = x : \frac{x.L}{Ln}, \quad \text{erit}$$

$qh=\frac{xL}{Ln}=\frac{x}{n}$ & $hz=\frac{dx}{n}$. Unde incrementum velocitatis $SN=dV=\frac{Pdx}{MV}$, & $VdV=\frac{Pdx}{M}$; unde $\frac{1}{2}V^2=\frac{1}{M}SPdx$: item $sn=dv=\frac{nPdt}{m}=\frac{nPdx}{mnv}=\frac{Pdx}{mv}$, & $vdv=\frac{Pdx}{m}$, & $\frac{1}{2}v^2=\frac{1}{m}SPdx$. Quamobrem $\frac{1}{2}V^2:\frac{1}{2}v^2=V^2:v^2=\frac{1}{M}SPdx:\frac{1}{m}SPdx=mSPdx:MSPdx$, ſive $V:v=\sqrt{m}:\sqrt{M}$

Ex quo liquet celeritates eſſe ut in theoremate antegreſſo in ratione inverſa ſubduplicata maſſarum

§. 171. Propoſitio

Quod ad tempora attinet, erit $dT=\frac{dx}{V}$ & $dt=\frac{dx}{nv}$, & $VdT=dx$, atque $nvdt=dx$. Quare $VdT=nvdt$, & $dT:dt=nv:V$; & pro celeritatibus v & V ſubſtituendo $\sqrt{M}$, $\sqrt{m}$ utpote in eadem proportione, erit $dT.dt=n\sqrt{M}:\sqrt{m}$, & multip. per P, erit $dT:dt=nP.\sqrt{M}:P\sqrt{m}$. Quare tempuſcula dT, dt, atque idcirco tempora finita T & t ſunt in ratione compoſita ex ſimplici inverſa virium mortuarum P & nP, & ex ſubduplicata directa maſſarum M & m, prorſus ut in §. antecedenti .

§. 172. Scholion

Quod ſi elaſtrum Aq (*Fig.* 48.) quammaxime fieri poteſt expandatur, videndum eſt, quam celeritatem maſſæ tribuat, ſive,

 quod

quod eodem recidit, ſi tum elaſtrum minus compreſſum A BQ, tum idem ſed magis compreſſum Abq ad idem punctum H in dilatatione pervenire intelligantur, definiendum eſt quot partibus celeritas communicata ab Abq ſit major celeritate, quam A BQ elaſtrum minus compreſſum impertit ſeu quam rationem altera ad alteram habeat. Quæ res cum explicatu ſit difficilior, viam ad eamdem muniemus iis, quæ Bernullius in citato *Diſcours ſur le mouvem. chap.* 13. *num.* 6. habet.

§. 173. Propoſitio

Sit punctum fixum A (*Fig.* 49.) e quo originem ducant abſciſſæ AB, AC &c. curvæ DEH, cujus ordinatæ AD, BE, be &c. exprimant celeritates in ſpatio ABC aut decreſcentes ut ſchema exhibet, quod accidit cum corpora quas velocitates ab elaſtris ſe relaxantibus acceperunt, iis in eadem elaſtra recurrunt, aut creſcentes, quando corpora ab elaſtris pelluntur. Sit itaque $AB = x$, $Bb = dx$, $BE = v$, & $GE = dv$. Sitque alia curva AMO, cujus applicatæ BM exponant tempora t, quæ in percurrendis ſpatiis AB impenduntur, atque ideo $BM = t$, & $Nm = dt$. Item $AC = nx$, $Cc = ndx$, $CH = V$, $RH = dV$, $Cs = T$, & $Ds = dT$

His poſitis erit $dt = dx : v$, & $dT = ndx : V$. Quare $dt : \frac{dx}{v} = dT : \frac{ndx}{V}$, & mult. ſecundum & quartum per a, erit $dt : \frac{adx}{v} = dT : \frac{andx}{V}$. Jam vero quemadmodum incrementum celeritatis, ſi maſſæ ſunt æquales, eſt productum ex vi pellente in tempuſculum, ita decrementum celeritatis eſt = producto ex vi reſiſtente in tempus. Quare $-GE = -dv = rdt$, & $-RH = -dV = R\,dT$ poſitis r & R reſiſtentiis; ideoque $-dv : rdt = -dV : R\,dT$ & ſubſtitutis valoribus dt, dT erit $-dv : \frac{radx}{v} = -dV : \frac{Randx}{V}$

Quare ſi ponamus reſiſtentias r & R, ſeu vires elaſticas globo reſiſtentes eſſe ut quadrata celeritatum v & V, erit $-dv : v^2 \frac{adx}{v} = -dV : V^2 \frac{andx}{V}$ & divid. ſecundum & quartum per a^2 erit $-dv : \frac{vdx}{a}$

$= -$

$= - dV : \frac{Vndx}{a}$, quæ eſt æquatio ad logarithmicam communem, in qua a ponitur conſtans, ideſt æqualis ſubtangenti logiſticæ. Vide Wolphium Anal. Inf. §. 242. Nam ſi ſit

$$-dv : \frac{vdx}{a} = -dV : \frac{Vndx}{a}, \quad \text{erit etiam}$$
$$-\frac{adv}{v} : dx = -\frac{adV}{V} : ndx$$

quæ eſt æquatio Wolphii. Igitur curva DEH eſt logarithmica communis. Quod ſi AD prima celeritas ponatur $= a = 1$, ideoque logarithmorum initium, erunt ſpatia AB, Ab logarithmi celeritatum, quæ reſiduæ ſunt. Cum igitur reſiſtentiæ ſunt quadratis celeritatum proportionales, ſpatia percurſa ſunt ut logarithmi celeritatum, quæ in fine ſpatiorum reſiduæ ſunt.

§. 174. Corollarium

Ex quo conficitur in loco aere pleno, ſi reſiſtentiæ dictam rationem ſequerentur, vim & celeritatem omnino perimi non poſſe, niſi poſt tempus infinitum & poſt emenſum ſpatium pariter infinitum, propterea quod applicatæ ad logarithmicam, quibus exprimuntur celeritates, non evaneſcunt & fiunt infinite parvæ niſi ad diſtantiam a puncto originis A infinitam. Unde Succi in Diſſertatione de Reſiſtentia medii, quam tom. 45. Opuſculorum edidit P. Calogerà, concluſit talem non eſſe legem naturæ, ut Leibnitius putavit, quia motus in infinitum minime continuatur, tametſi quid ad hanc rationem reſponderi poſſit, jam animadverterim §. 125. num. 13. Cum vero elaſtrum Abq (*Fig.* 48.) ſe expandens uſque in Q cum globo communicet celeritatem eam, qua ſi globus in elaſtrum regrederetur, oſtendente Bernullio non penitus uſque in A, ſed ſolum uſque ad priſtinum locum q comprimeret; hinc ſequitur in compreſſione elaſtrorum vires reſiſtentes non eſſe in ratione duplicata celeritatum, quæ reſtant.

§. 175. Propoſitio

Videndum eſt igitur, quam rationem ſequantur. Sed antequam id aggrediar, inveſtigare juvat cum Bernullio naturam curvæ temporum AMS (*Fig.* 49.) in dicta hypotheſi. Eſt itaque $dt = \frac{adx}{v}$ §. 173. itemque $dx = -adv : v$.

Ergo ſubſtituto hoc valore erit $dt = -a^2 dv : v^2 = -a^2 v^{-2} dv$, & integrando per unitatis additionem in exponente variabilis, erit $t = a^2 : v - a$, ideoque $t + a = a^2 : v$. Additionis termini $-a$ rationem in gratiam tyronum hic adjicio. Nam Bernullius magnorum more Geometrarum hujus ætatis ſcribens doctis eam ſupprimit. Ergo fiat AZ = AB, & ducatur ZL, eritque ex natura Logiſticæ

BE : AD = AD : ZL

$v : a = a : \frac{a^2}{v}$, qui terminus eſt æqualis valori temporis integrati ſine ulla detractione; nam $S dt = t = S - a^2 v^{-2} dv = a^2 : v$. Sed ut cognoſcamus utrum hæc integratio perfecta ſit, necne, regula illa, quam explicavimus §. 81. num. 3. tentandum eſt an evaneſcente abſciſſa AB, ſive AZ, valor omnis diſpareat. Si enim reſtat aliquod poſitivum, ex formulæ integratione detrahendum eſt; ſiquid negativum, addendum. Re autem vera, ſi abſciſſa ZA nulla fiat, non continuo diſparent applicatæ, quibus celeritates exprimuntur; ſed reſtat poſitiva quantitas AD $= a$, quæ idcirco ex valore $a^2 : v$, qui exſiſtit ex integratione $dt = -a^2 v^{-2} dv$, ſubducenda eſt, ut verum temporis valorem habeamus. Quare ſi fiat BM $= t = a^2 : v - a =$ ZL — AD = ZL — ZP = PL, exſiſtet curva temporum AMS ſimilis omnino curvæ DLV. Eſt autem hæc logarithmica HED continuata verſus V. Igitur curva temporum eſt logarithmica eam verſus partem protenſa, quorſum ab axe elongatur. Quo etiam compertum ſit, quod ſupra advertimus, tempus infinitum evadere.

§. 176. Propoſitio

Quoniam igitur vires reſiſtentes eſſe in ratione duplicata celeritatum cum experimentis non convenit, ponamus id, quod in multis elaſticis corporibus experientia confirmat, has vires eſſe ut denſitates (*Fig.* 50.) directe, ſive ut expanſiones reciproce. Sit itaque elaſtrum ABD omnino expanſum, quod a corpore Z incurrente comprimi debeat, quæraturque celeritas reſidua corporis Z in punctis d & δ. Quem in finem fiat AD $= a$, A$d = x$, A$\delta = z$. Vis mortua reſiſtens in $d = p$, & vis in δ = P; eritque ex hypotheſi

$p : P = A\delta : Ad = z : x$

Dicantur v & V celeritates in d & δ, atque t & T tempora per Dd,

& Dδ

& Dδ. Elementum celeritatis v, quod detrahitur in d, erit $-dv = p\,dt$, & elementum celeritatis V, quod perimitur in δ, erit $-dV = P\,dT$. Igitur

$$dv : p\,dt = dV : P\,dT$$

Sed pro p & P ſubſtitui poſſunt z & x, utpote quæ ſunt in eadem ratione. Igitur

$dv : z\,dt = dV : x\,dT$, & div. ſecundum, & quartum per z & x

erit $dv : \frac{dt}{x} = dV : \frac{dT}{z}$. Eſt autem $dt = dx : v$ & $dT = dz : V$

Ergo $dv : \frac{dx}{vx} = dV : \frac{dz}{Vz}$, atque $v\,dv : \frac{dx}{x} = V\,dV : \frac{dz}{z}$, atque integ.

$\frac{1}{2} v^2 : S\frac{dx}{x} = \frac{1}{2} V^2 : S\frac{dz}{z}$, & multiplicando primum, & tertium per 2 & ſecundum & quartum per a

erit $v^2 : S\frac{a\,dx}{x} = V^2 : S\frac{a\,dz}{z}$. Eſt autem oſtendente Wolphio §. 243. Anal. Infin. $S\frac{a\,dx}{x}$ logarithmus x, ſive $= lx$, & pariter $S\frac{a\,dz}{z} = lz$. Igitur $v^2 : V^2 = lx : lz$

Unde quadratum celeritatis v in d eſt ad quadratum celeritatis V in δ, uti logarithmus ſpatii $Ad = x$ intercepti inter A locum maximæ compreſſionis, & d punctum, ad quod corpus compreſſit elaſtrum, ad logarithmum ſpatii $A\delta = z$ interpoſiti inter puncta A & δ.

§. 177. Propoſitio

Ex his autem peti poteſt ſolutio problematis, quod §. 172. propoſuimus. Nam ex dictis conſequitur celeritatem v, quam (*Fig.* 48.) acquirit corpus in h ab elaſtro A B Q, quod a puncto Q ſe expandere incipiat, ad velocitatem maximam V in H puncto maximæ expanſionis, quam idem corpus ab eodem elaſtro accipit, eſſe ut $\sqrt{}$ log. Ah ad $\sqrt{}$ log. A H, ſed cum ſit §. 170.

$AQ : QH = Aq : qh$	& componendo
$AH : QH = Ah : qh$	& alternando, & convert.
$Ah : AH = qh : QH$	& ex hypotheſi §. 170.
$qh : QH = Aq : AQ$	erit
$Ah : AH = Aq : AQ$.	Quare

Digitized by Google

$v : V = \sqrt{\log. Ah} : \sqrt{\log. AH} = \sqrt{\log. Aq} : \sqrt{\log. AQ}$
Velocitas autem c in h, quam corpus acquirit ab elaſtro magis compreſſo Abq, eſt $=$ velocitati V §. 169. 170. quam idem corpus acquirit ab elaſtro eodem minus compreſſo ABQ in puncto remotiori H. Igitur pro celeritate V ſubſtituta æquali c erit.

$v : c = \sqrt{\log. Aq} : \sqrt{\log. AQ}$

Ideſt ſi ſumatur punctum aliquod h, celeritas uſque ad illud genita ab elaſtro minus compreſſo ABQ ſe habet ad celeritatem genitam in æquali maſſa ab elaſtro magis compreſſo Abq in ratione ſupduplicata logarit. minoris expanſionis Aq ad logarithmum majoris AQ.

2 Quod ſi velocitas c, quam corpus accipit ab elaſtro magis compreſſo Abq in puncto h, conferatur cum velocitate C, quam idem corpus accipit ab eodem elaſtro in maxima expanſione H, erit

$c : C = \sqrt{\log. Qh} : \sqrt{\log. QH} = \sqrt{\log. Aq} : \sqrt{\log. AQ}$ num. 1

Eſt autem $v : V = \sqrt{\log. Aq} : \sqrt{\log. AQ}$
Igitur $c : v = C : V$
Sed $c : v = \sqrt{\log. AQ} : \sqrt{\log. Aq}$ num. 1
Igitur $C : V = \sqrt{\log. AQ} : \sqrt{\log. Aq}$

§. 178. Corollarium

Quare maxima velocitas C, quam corpus acquirit ab elaſtro magis compreſſo Abq ad maximam velocitatem V, quam idem corpus lucratur ab eodem elaſtro, ſed minus compreſſo ABQ eſt in ratione ſubduplicata logarithmi majoris expanſionis AQ ad logarithmum minoris Aq.

CAPUT QUARTUM.

Vires corporis ſunt ut quadrata celeritatum.

§. 179. Scholion

His conſtitutis quod attinet ad elaſtrorum vires, venio ad id oſtendendum, quo hæc omnia ſpectant. Qua in re illa tamquam principii loco conſtituta pono, quæ §. 128. late differui; tria ſcilicet eſſe elementa, ex quorum ductu conficitur vis, magnitudinem preſſionis, velocitatem, qua fluit, & tempus, quo fluxus durat.

§. 180.

§. 180. Propoſitio

Quo poſito ea, quæ in elaſtris ſe expandentibus contingere vidimus, ſingillatim explicemus, & quantum cum Leibnitiana virium æſtimatione conveniant, patefaciamus, tametſi in aliquibus jam id præſtiterimus citato §. 128. Verum ob ea, quæ demonſtrata ſunt, id nunc luculentius fieri poterit. Ac primo examinemus illud Bernullii experimentum, in quo duo corpora A = 2 & B = 1 a ſex elaſtris ſe expandentibus in utramque partem pelluntur. In eo (*Fig.* 33.) ſingulæ preſſiones ſunt quidem utrinque æquales, ſed quia B ſingulis momentis duplo majorem acquirit velocitatem, quam A, preſſiones æquales in B duplo majori celeritate fluunt, quam in A; ergo in B ſint duplæ, & vim duplam efficiant neceſſe eſt. Atque hinc intelligitur quomodo eodem tempore vis quatuor elaſtrorum CB ſe exerat in corpus B, & vis duorum CA in corpus A; neque difficultatem facere debet, quod quatuor elaſtra CB cum duobus CA cohæreant; nam elaſtra CB ſolum verſus B, & CA ſolum verſus A expanduntur. Quod ſi quis nihilominus dilucide non videt vim quatuor elaſtrorum in ſolum corpus B tranſmigrare, is cogitet quatuor elaſtra AQ (*Fig.* 46.) pellere maſſam M = 1, & duo EP maſſam 2 M = 2, & tempora, quibus preſſiones fluunt æqualia fore, ſingulas celeritates in M genitas eſſe duplas ſingulis celeritatibus genitis in 2 M, & preſſiones æquales, ex §. 165. colliget. Vires autem omnes tum quatuor tum duorum elaſtrorum in maſſas tranſeunt, nec aliquam compenſationem a tempore utpote æquali peti poſſe perſpicuum eſt. Igitur cum ex eo, quod duplo majori celeritate in maſſa M preſſiones fluunt, tum ex eo, quod a duplo pluribus elaſtris eodem tempore egrediuntur, cogitur & efficitur vim communicatam cum maſſa M eſſe duplo majorem vi communicata cum maſſa 2 M. Quare ſi maſſæ 2 M ſumatur $\frac{1}{2}$, quæ tamen eadem, ac tota maſſa 2 M celeritate feratur, vis maſſæ M erit quadruplo major vi maſſæ $\frac{1}{2}$ 2 M, tametſi celeritas M ſolum duabus partibus celeritatem $\frac{1}{2}$ 2 M ſuperet. Poſitis ergo maſſis

æqua-

æqualibus vires ſunt in ratione duplicata celeritatum.

§. 181. Propoſitio

Ex quibus illud etiam compertum ſit, cur idem elaſtrum ex ſerie 4 laminarum conſtans cuicumque maſſæ vim eamdem communicet. Nam ſi altera maſſa ſit M, altera vero 4 M, in maſſa M preſſiones duplo majori celeritate fluunt, quam in 4 M §. 156. ſed duplo minori tempore. Sed cum celeritas eſt duplo major, eadem ſumma preſſionum uno minuto ex quatuor laminis egreditur, & in maſſam M traſmigrat, ac duobus minutis, cum illæmet quatuor laminarum preſſiones duplo minori velocitate feruntur. Ut ſi recta ſuper rectam ad angulos rectos inſiſtens tempore unius minuti celeritate duorum graduum fluat, idem rectangulum ex ſumma rectarum conſtans facit, ac ſi duobus minutis celeritate unius gradus ferretur.

§. 182. Propoſitio

Ex his quoque fit, ut omnium paradoxorum, quæ ex ſententia Leibnitii a Bulfingero illata ſunt *Diſſert. de viribus corpori moto inſitis* tom. 1. Com. Acad. Petrop. ſpecies evaneſcat, & clara atque evidens illorum ratio ſuppetat. Ex. gr. theoremate 8 ſect. 1 ait & probat duas vires æquales inſitas, & in eodem corpore M congruentes facere vim ut 4, tametſi earum ſingulæ impreſſæ æquali maſſæ M ſolum faciant vim ut 1, & duabus ſejunctis maſſis æqualibus M & M ſolum ut 2; propterea quod vires duæ æquales in eadem maſſa M conſpirantes generant celeritatem ut 2, in diverſis maſſis M & M diſſipatæ celeritatem ut 1. Ego rem ita expedio. Pellatur maſſa M ab elaſtro AQ 12, & æqualis maſſa M ab elaſtro EP trium §. 143. (*Fig.* 46.) celeritates maſſæ propulſæ ab AQ non ſolum finales, verum etiam ſingulæ ſed ſemper in quadruplo majori diſtantia a Q ſunt duplo majores ſingulis, quas habet maſſa pulſa ab EP in ſingulis quadruplo minus diſſitis locis a P. Item ſingula tempora impenſa ab elaſtro AQ in pellenda maſſa M per quadrupla ſpatia ſunt dupla ſingulorum temporum, quæ impendit EP in propulſanda eadem maſſa per quadruplo minus ſpatium. Sed preſſiones duplo majori celeritate latæ, & duplo majori tempore quadruplo majorem ſummam atque ideo vim conficiunt, quam aliæ preſſiones æquales, quæ duplo tardiores ſunt, & duplo minori tempore durant; propterea quod duplam faciunt, ſi duplæ celeritatis ratio habeatur, & inſuper duplam, ſi temporis. Et ſane vires omnes

omnes 12 elaſtrorum , quæ in maſſam M commeant vim 3 elaſtrorum quatuor partibus ſuperant . Ex quo apparet , quænam ſit vis, unde maſſa M duplo majori celeritate fertur , ſcilicet non dupla ſed quadrupla . Quamobrem quod affirmat Bulfingerus de viribus , ita efferendum eſt : preſſiones duplo velociores & duplo majori tempore durantes , quam aliæ æquales , quadruplo majorem ſummam atque ideo vim faciunt . In quo nihil paradoxi eſt , & quod abhorreat a communibus notionibus . Quod ſi alio elaſtro trium alia maſſa æqualis M pellatur , in duabus maſſis M & M pulſis ab elaſtris 3 ſimul vires exſiſtent duplo minores vi ſolius maſſæ M, quæ ab elaſtro duodecim pulſa fuerit ; quia preſſionum ſolius M ſumma ob tempus duplo majus adhuc manet duplo major ſumma preſſionum utriuſque ; tametſi duplo major illarum celeritas duplicato numero iſtarum compenſetur .

§. 183. Corollarium

Quo loco adverte ad eum finem , ut preſſiones duplo majori tempore durantes quadruplo majorem vim faciant , opus eſſe , ut etiam duplo majori celeritate fluant . Quod cum non accidat , quando ab eodem elaſtro majores & minores maſſæ pelluntur , diverſis temporibus vires eædem generantur §. 181.

§. 184. Propoſitio

Rebus ita explicatis facile eſt etiam pervidere rationem , cur dum grave ex quadruplo ſpatio deſcendit, quadruplo majorem vim acquirat , tametſi ſolum duplo majus tempus impendit . Fac enim cum Bernullio cauſſam gravitatis eſſe infinitam elaſtrorum ſeriem §. 145. aut aliud ſimile , quod corpori perpetuos ictus æquales infligat . Nam uti factum eſt in elaſtris 12 & 3 , in ſpatiis $GN = 4$ & $AE = 16$ (*Fig.* 40.) ſumantur puncta H & C ea tamen lege , ut C a primo deſcenſus puncto A quadruplo majori intervallo abſit , quam quodlibet H ab initio deſcenſus G . Gravitas ſive preſſio æquabilis elaſtri infiniti ponatur $= p$, V velocitas in C , & v velocitas in H, tempus per $AC = T$, & tempus per $GH = t$, $AC = x$, & $GH = x:n$, & maſſæ M & m æquales ; eritque $dV = p\,dT = p\,dx:V$, & $V\,dV = p\,dx$, atque integrando $\frac{V^2}{2} = px$. Item $dv = p\,dt = p\,dx:nv$, & $v\,dv = p\,dx:n$,

&

& integrando $v^2 : 2 = px : n$. Unde $V^2 : v^2 = px : \frac{px}{n} = x : \frac{x}{n} = nx : x = n : 1$ & $V : v = \sqrt{x} : \sqrt{\frac{x}{n}}$. Ideſt celeritates ſunt in ratione ſubduplicata ſpatiorum. Atque idcirco celeritas V in puncto C eſt duplo major celeritate v in puncto H: Quare ad conficiendum velocitate V ſpatiolum dx quadruplo majus ſpatiolo $dx:n$ tempuſculum dT duplo majus tempuſculo dt deſideratur. Igitur incrementum vis per dx erit quadruplo majus incremento vis per $dx:n$; quia propter motum maſſæ M duplo velociorem per dx preſſiones continuæ a gravitate p in eadem maſſa genitæ duplo velocius ferentur, quam preſſiones æquales in maſſa m per $dx:n$. Quamobrem ſi preſſiones ultro citroque per idem tempuſculum durarent, ſpatiolum confectum ab M foret duplo majus ſpatiolo confecto ab m ob ſolam duplo majorem velocitatem, & preſſiones in M duplo plures forent, atque ideo vim vivam duplo majorem generarent. Quia vero duplo majori tempore permanere ponuntur, neceſſe eſt ut interea corpus quadruplo majus ſpatium conficiat, preſſiones quadruplo plures fiant & vis viva tempuſculo dT genita quadruplo major exſiſtat. Quare ſi vires ponantur W & vv, erunt $dW = pVdT$, & $dvv = pvdt$, ſive quia p ſunt ſemper æquales $dW : VdT = dvv : vdt$. Ideoque incrementa virium ſunt in ratione quadrupla. Et revera ſi gravitatem conſideremus ut profectam ab infinita elaſtrorum ſerie, nonne per quadruplum ſpatium, ut paulo ante monſtravimus, quadruplo major vis elaſtrorum ſe exerit? Quod vero oſtenſum eſt de incremento virium in punctis C & H, quorum punctorum unum C quadruplo magis abſit ab origine A, quam H ab initio G, id valet in incrementa omnium aliorum punctorum, quæ in dicta ratione in rectis AE, GN ſumantur. Sed punctorum ſive ſpatiolorum rectæ AE, quæ ſint quadruplo majora ſpatiolis rectæ GN, numerus eſt æqualis numero ſpatiolorum, quæ ſint ſubquadruplo minora in GN. Igitur ſumma omnium incrementorum dW vis per AE, ſcilicet vis viva genita per AE eſt quadruplo major ſumma omnium incrementorum dvv, ſcilicet vi viva, quæ per ſpatium GN a gravitate generatur. Atque hinc intelligitur veram eſſe illam Hermanni formulam $gMVdT$, ad

quam

quam incrementum vivæ vis ab homine exigi §. 135. num. *6.* vidimus. Eatenus enim velocitas confert, quatenus corpus quo velocius fertur, eo velociores & plures a gravitate *g*, quæ conſtanter agit, preſſiones etiam æquali tempore, ac aliud corpus minus velox, accipit. Atque hoc pacto ſatisfit omnibus iis rationibus, quibus §. 135. Leibnitianum ſyſtema labefactari, & Carteſianum fulciri poſſe monſtravimus. Illa enim hoc uno nituntur, vim vivam preſſionibus conſtantibus generatam tempori, quo gignitur, proportione reſpondere, nulla facta mentione celeritatis, qua fluunt, quæ quantum in hoc negotio ſit attendenda, pluribus locis & præſertim §. 128. monſtratum eſt.

§. 185. Propoſitio

Sed ut revertamur ad elaſtrorum actiones, examinemus pauliſper Theorema V & VI Camuſii, quæ §. *166.* expoſita fuerunt. Si maſſæ ſint æquales, celeritates in iiſdem genitæ ab elaſtris $AQ = 12$ & $EP = 3$ (*Fig. 46.*), quorum tamen vires mortuæ P & *n*P ſint in ratione reciproca numeri elaſtrorum, ideſt $nP = 4P$, ſunt æquales, quæ ideo in omni hypotheſi vires æquales fuiſſe communicatas evincunt. Tempus autem, quo elaſtrum AQ pellit maſſam M, eſt quadruplo majus tempore, quo elaſtrum EP maſſam *m* urget §. *169.* Ut igitur preſſiones P quadruplo minores preſſionibus 4P atque idcirco quadruplo tardiores eamdem vim generent, tempus quadruplo majus deſiderant.

2 Quod ſi maſſa $M = 4$ pulſa ab AQ ſit quadrupla maſſæ $m = 1$, erit celeritas $V = 1$ maſſæ M ſubdupla celeritatis $v = 2$ maſſæ *m* §. *167.* & tempus $T = 8$ octuplum temporis $t = 1$ §. *169.* Cum itaque tempus, quo fluunt preſſiones, ſit octuplum, erunt eædem octuplo tardiores. Sed preſſiones P quadruplo minores preſſionibus 4P, duplo quidem minori celeritate, ſed etiam octuplo majori tempore latæ eamdem ſummam ideoque vim vivam conficiunt, ac preſſiones 4P octuplo minori temporis intervallo, ſed celeritate dupla. Sumantur enim quælibet puncta H & C, ea tamen lege ut ſemper H quadruplo magis diſtet a Q, quam C a P, & iiſdem poſitis, ac paulo ante, incrementum vis in H erit $= dW = PVdT$, & incrementum vis in $C = dvv = 4\,Pvdt$; dT & dt ſignificant tempuſcula in percurrendis ſpatiolis $Hh = 4$ & $Cc = 1$. Igitur $dW : dvv = VdT : 4vdt$; eſt autem $VdT =$

4vdt,

$4vdt$, quod celeritates V & v ſunt ut 1 & 2; tempuſculum $dT = 8$, & $dt = 1$, quia cum V ſit $\frac{1}{2}v$, maſſa percita velocitate V non poteſt conficere ſpatium infinite parvum Hh quadruplum ſpatioli Cc, niſi tempuſculo dT octuplo majori. Quare ſubſtitutis valoribus erit $VdT = 1.8 = 8$, & $4vdt = 4.2.1 = 8$. Manet ergo $dW = dvv$. Incrementorum autem dW & $d$vv æqualis eſt numerus utrimque, ut paulo ante §. 184. oſtendi. Igitur vis viva genita ab elaſtro AQ eſt æqualis vi vivæ, quæ ab elaſtro EP generatur. Res melius ita confici poteſt. Preſſiones P & 4P infinite parvo tempore manent eædem, & idcirco illarum fluxus rectangulo repræſentari poſſunt. Sit AZ = P (*Fig.* 41.) & Aa = 4P. Quoniam Aa = 4P duplo majori celeritate fertur, quam AZ = P, æquali tempuſculo duplum conficit ſpatium ſuper AH, quam AZ; quare ſi Aa percurrit AC, & rectangulum ACca generat, AZ medietatem AB emetitur, & rectangulum facit ABZ, quod rectangulo ACca octuplo minus eſt. Cum vero hæc rectangula vires vivas exhibeant, vis viva genita a preſſione Aa = 4P eſt octupla vis vivæ, quæ eodem tempore ab AZ = P generatur. Quamobrem ſi preſſio AZ tempuſculo octuplo majori fluat, ſpatium AH erit octuplo majus ſpatio AB, & rectangulum AHRZ pariter rectangulo AZB octo partibus majus conficiet; quod idcirco erit æquale rectangulo ACca. Sed rectangulum AHRZ exprimit vim genitam preſſione AZ tempuſculo dT octuplo majori, quam tempuſculum dt, quo vis viva expreſſa rectangulo ACcA preſſione Aa generatur ergo minimæ vires ſeu incrementa virium ſunt æqualia. Tempuſculo autem dT octuplo majori a maſſa M percurritur ſpatiolum Hh (*Fig.* 46.) quadruplo majus ſpatiolo Cc; cumque 12 elaſtra AQ ad quadruplo majus ſpatium QH ſe expandant, quam tria EP, ſpatiolorum Hh, Cc quæ in dicta ratione ſint, æqualis numerus reperitur. Igitur etiam æqualis numerus tempuſculorum dT, dt in proportione octupla habebitur. Ex quo fit virium quoque minimarum & æqualium in ſpatiis QH & PC æqualem numerum ſimiliter deprehendi. Igitur ſumma omnium virium, quæ generatur ab elaſtris AQ in maſſa M = 4, eſt æqualis ſummæ omnium virium, quæ ab elaſtro EP cum maſſa = 1 communicantur.

§. 186.

§. 186. Propoſitio

Quod ſi tandem maſſa M pulſa ab elaſtro AQ (*Fig.* 46.) ſit $=1$, & *m* pulſa ab EP ſit $=4$, erit $V=2$, & $v=1$ §. 167. & $T=2$, & $t=1$ §. 169. Quamobrem ſpatiolum H*h* quadruplo majus ſpatiolo C*c* duplo majori tempore *d*T percurretur velocitate V, quæ eſt tantum duplo major velocitate *v*, qua ſpatiolum C*c* peragratur. Atque in ſententia eorum, qui volunt elaſtra pro ſola ratione temporum ſuas vires exerere, vis *d*W genita per ſpatium H*h* erit $=P\,dT$, & vis *d*vv generata in ſpatio $Cc=4\,P\,dt$; ideoque

$$dW : dvv = dT : 4\,dt = 1 : 2$$

uti eſt productum ex maſſa $M=1$ in velocitatem 2 ad productum ex maſſa $m=4$ in velocitatem 1. Verum aliter eſſe debet; nam preſſio P quadruplo minor preſſione 4P duplo majori velocitate, & duplo majori tempore fluens rectangulum & ſummam virium facit æqualem, ac preſſio 4P duplo minori tum velocitate tum tempore.

§. 187. Propoſitio

Quibus ratio quædam Muſſchenbroechii illuſtratur confirmaturque. Sit triangulum ABC, cujus latus AB (*Fig.*51.) in infinitas ſecetur æquales particulas AD, DF, FH, &c. quæ particulæ æquales exprimenr æquales minimas celeritates æqualibus temporis in infinitum diviſi particulis cum aliquo corpore ab A profecto communicatas. A puncto D ducatur recta perpendicularis DE, quæ vim ſignificet, qua primus celeritatis gradus AD corpori tribuitur. A puncto F ducatur FG, quæ vim exponet neceſſariam, ut corpori jam habenti celeritatem AD ſecundus gradus DF primo æqualis imprimatur. Nam in triangulo eſt FA : AD = GF : DE. Quare quemadmodum FA eſt dupla AD, ita GF erit dupla DE. Sed quo corpus jam uno percitum gradu celeritatis ſecundum æqualem recipiat, vis, qua urgeatur, duplo major prima requiritur. Si enim primæ foret æqualis, nullam corpori celeritatem tribuere poſſet, propreteaquod corpus ea celeritate ferretur, quam vis poſtularet. Qua eadem ratione probari poteſt vim HI eſſe debere triplo majorem, ut tertium gradum FG celeritatis impertiat; KM quadruplo & ita porro. Quare ſi puncta A, D, F &c. infinite proxima fiant, lineæ DE, FG, HI &c. ſignificantes aggregatum potentiarum, quæ ad gradus æquales celeritatis impertiendos neceſſariæ ſunt,

trian-

triangulum ABC implebunt, eritque aggregatum omnium virium, quibus celeritas AH generatur, ad aggregatum omnium, quibus celeritas AB, ut triangulum AHI ad triangulum ABC, ſive ut quadratum celeritatis AH ad quadratum celeritatis AB. Ita Muſſchenbroechius *Eſſai de Phyſ.* tom. 1. §. 177.

2. Verum niſi revolvamur ad ea, quæ ſupra diſſeruimus, mihi hæc ratio non bene concludi videtur; nam ſi quis aſſentiatur deſiderari quidem in corpore maſſam per AF pellente duplam vim FG (*Fig.* 51.) ut ſecundum gradum DF celeritatis impertiat, ſed illius vis ſolam mediam partem juxta regulas motus in maſſam tranſire ajat, eo quod hæc jam æquali vi percita ſit, ita ut maſſa in F non habeat vim, quam exhibet triangulum AFG, ſed ſolum illam, quam repreſentat recta FG, quæ ex vi DE permanente & ex alia vi æquali denuo communicata coaleſcit, ſi quis, inquam, id ajat, non alio modo mihi convinci poſſe videtur, quam ſi confugiamus ad preſſiones in maſſa jam habente primam celeritatem AD duplo celerius fluentes, ex quibus eodem tempore duplo major vis viva exſiſtit.

§. 188. Scholion

Quæ hactenus de generatione virium ex preſſionibus conſpirantibus dicta fuerunt, ea fere conveniunt in vires, quæ a preſſionibus contrariis corrumpuntur. Nam quo majori celeritate corpus in elaſtrum expanſum recurrit, eo preſſiones ab ipſo in elaſtrum migrantes celerius fluunt, & ideo majorem cum elaſtro communicant vim. Quo una cum iis, quæ ſupra diſſeruimus §. 184. & compertum ſit, dum in aſcenſu corporis dimidia velocitatis pars a gravitate perimitur, ex quatuor gradibus vis tres extingui, & ſimul ſit ſatis omnibus iis, quæ §. 151. & ſequen. uſque ad 63. adverſus Leibnitium diſputavimus.

2. Nam inficias non eo diſtinguendum eſſe inter vires, quæ ſemel impreſſæ a ſua cauſſa non reſtaurantur, interquæ illas, quæ a ſua cauſſa reſtaurantur, & in his haberi oportere rationem etiam temporis, quo corpus ciere pergunt. Sed ajo ad habendam menſuram virium, quæ ab alio corpore tranſmittunt ad aliud, adſciſci quoque debere velocitatem, qua preſſiones, ex quibus vis generatur, fluunt & progrediuntur. Nam præter ea, quæ ad id ſuadendum §. 128. allata ſunt, hic addo ex altera parte quodlibet continuum ſive ſimultaneum ſit, ſive ſucceſſivum, eſſe poſſe aliud alio denſius in infinitum §. 51. ex altera vero in preſſionum communicatione, quæ in tempore fit, continuum ali-

quod

Digitized by Google

quod ſucceſſivum exſiſtere. Ergo fieri poteſt, ut aliæ præ aliis preſſiones citius ab altero in alterum corpus migrent. Quod vero ita fiat, negari non poſſe videtur. Siquidem ab effectu cognoſcitur cauſſa. Effectus autem preſſionum eſt velocitas corporis, quod iiſdem urgetur. Ex his autem, quæ in actione elaſtrorum modo obſervavimus, liquet corpora ab elaſtris pulſa ſingulis momentis & eodem tempore diverſa velocitate cieri. Nam ab eodem elaſtro A B (*Fig.* 33.) ſe utrimque expandente corpus B ſubduplum A ſingulis momentis & eodem tempore duplo majori velocitate cietur. Jam vero optionem do Carteſianis eligendi utrum velint, an illæ preſſiones, quatenus in minori maſſa B recipiuntur, ſint in ſingulis momentis æquales preſſionibus, quæ in maſſam commigrant duplo majorem A, an vero inæquales, ſive minores. Si primum, & nihilominus eadem velocitate aliæ aliis in utraque maſſa ſuccedunt, conſequeretur corpus B, quod majori fertur, quam A, non perpetuo ſed ſolum identidem urgeri ab elaſtro A B, contraquam clara & evidenti ratione probatum fuit §. 44. ſaltem quod attinet ad minimas partes motus, quas eſſe debere omnino continuas ibidem docuimus. Neque recurras ad majorem elaſtri A B verſus B velocitatem, qua fit, ut corpus velocius B numquam deſerat. Nam ipſamet major elaſtri velocitas a preſſionibus oritur vis elaſticæ, in quas eadem ratio valeret. Quare ſi preſſiones in utroque corpore ſingulis receptæ momentis ſunt æquales, uti eſſe debere rationes §. 128. allatæ demonſtrant, in corpore duplo velociori B duplo majori celeritate ſibi invicem ſuccedant oportet. Sin autem preſſiones in B tranſmiſſæ ſint tanto minores, quanto maſſa B eſt minor A, in ipſamet Carteſiana virium æſtimatione neceſſarium eſt, ut in B majori velocitate fluant atque ferantur. Si enim ſunt minores quam in A, & eadem velocitate fluunt, & eodem tempore fluxus durat, æqualem in B ac in A vis quantitatem, ut Carteſianis placet, generare non poſſunt. Manet ergo alias preſſiones aliis majori velocitate fluere & ſibimetipſis ſuccedere.

3. Quod ſi ita eſt, quis non videt etiam fluxus preſſionum celeritatem eſſe attendendam in menſura vis, quæ preſſionibus generatur? Qua enim de cauſſa ratio eſt habenda tum magnitudinis preſſionum, tum temporis, adeo ut etiam in Carteſiana ſententia vis ſit = producto ex magnitudine preſſionis in tempus quo durat & fluere pergit, §. 163. non vero celeritatis, qua dato tempore fluunt, aliæque aliis ſuccedunt, cum & major velo-

citas majorem illarum numerum dato tempore colligat; & eadem ſubducenda ſit in omnium aliarum quantitatum menſura, quæ fluxu & ſucceſſione elementorum gignuntur? §. 128. num. 12. Nonne in ſcholio §. 82. ad evidentiam oſtendimus in colligenda ſumma quantitatum, quæ fluxu generantur elementorum, non tantum ad ipſam ipſorum magnitudinem, quantum ad legem, qua fluunt, animum eſſe advertendum? Lex autem fluxus nonne ipſam quoque celeritatem, qua elementa ſibi mutuo ſuccedunt, includit? Ergo hujus quoque ratio habeatur oportet in viribus æſtimandis.

4. Quo conſtituto facile eſt ſatisfacere omnibus, quæ ex Carteſiana virium æſtimatione in ſuperioribus objecta fuere. Quod adeo per ſe clarum eſt, ut in iis refutandis opus non ſit diutius in hoc loco verſari. Id unum, quod attinet ad caſum gravium, operæ pretium arbitror addere, ſpatium emenſum a corpore decidente tempore duorum minutorum quadruplo majus illo, quod a gravi uno minuto perficitur, non eſſe quidem ipſum per ſe indicium quadruplo majoris vis, quia ſecundo minuto per vim acceptam in primo & adhuc perſeverantem ſpatium conficitur duplum ejus, quod primo confectum eſt, ſed velocitatem, qua initio ſecundi minuti cietur, eſſe cauſſam, cur novæ, quæ a gravitate profectæ corpori accedunt, preſſiones velocius fluant & ideo ſecundo minuto triplo majorem, quam in primo, colligant ſummam & triplo majorem generent vim.

§. 189. Scholion

Manet ergo vires eſſe ut quadrata velocitatum, ut putavit Leibnitius, cujus ſententia obſcuriſſimum compoſitionis virium locum maxime illuſtrat, & ſimul ab eo mirifice confirmatur. Quod nunc oſtendendum aggredimur.

ARTICULUS IX.

De virium compoſitione in ſententia virium vivarum; expenditur ſententia Fontenelli, Danielis Bernullii, & P. Riccati.

§. 190. Propoſitio.

JAmdiu eſt, cum in virium compoſitione jam a Galilæi & Carteſii temporibus magno Phyſicæ bono in ſcientiam naturalem inducta multa obſervata ſunt, quæ viris, qui ætatem contriverant in certis Matheſeos demonſtrationibus, non ſatisfaciebant.

ciebant. Daniel Bernullius Magni Joannis filius anno 1728. tom. 1. Comment. Acad. Petrop. in *Examine Principiorum Mechanicæ* pag. 127. edit. Petrop. 1728. ſectione 1. negat aliquid eſſe momenti in ea, quæ vulgo affertur, demonſtratione pro virium compoſitione, idque iis rationibus efficit, quæ rem probare cuicumque Philoſopho debeant; in altera vero propoſitionem alioquin certam, quæque in Phyſicis familiam ducit, alio modo conatur efficere. Verum mihi de hac Bernullii ratione integrum ſervo, cum ad leges motuum in altero tomo ex profeſſo tractandas devenero.

§. 191. Propoſitio

Mihi enim, cui ab eo, quod maxime propoſitum eſt, valde aberrare non licet, veniendum eſt ad quamdam Fontenelli difficultatem in Hiſt. Acad. an. 1728. circa virium reſolutionem, illudque monſtrandum eam facile ſolvi in ſententia æſtimationis virium ſecundum quadrata celeritatum, quo magis magiſque eadem confirmetur. Is itaque quærit, qui fieri poſſit, ut eadem vis expreſſa per diagonalem DS (*Fig.* 54.) reſolvi poſſit in infinita diverſarum potentiarum paria, iiſque ſingulis æquivaleat, eo quod perfectis parallelogrammis eadem eſt omnium diagonalis. Idemque reſpondet, quemadmodum in quolibet finito infinitum latet, ita in qualibet finita directione infinitas concludi, quæ in promtu ſunt, ut ſe exerant, a ſitu tamen objecti corporis pendere, quæ quoque tempore ſe exerere debeat. Quod non improbo; nam ſi corporis A celeritas exprimatur recta AC (*Fig.* 55.) deſcribanturque rectangula ABCD, AbCd, AβCδ &c. in infinitum, quorum omnium diagonalis ſit eadem recta AC, in planum BC ſe exeret vis AB, & in planum DC reliqua AD, in planum vero bC vis Ab, & in Cd vis Ad; in planum autem βC vis Aβ, & in planum δC vis Aδ &c. Sed illud abſurdi eſt, quod ſi vires ponantur in ratione celeritatum & rectarum, quibus celeritates exprimuntur, pro ratione ſitus planorum nunc majores, nunc minores vires cum iiſdem communicentur; tametſi ſemper ſit eadem vis per diagonalem AC expreſſa & in duas vires ad plana perpendiculares reſolvatur. Nam ſumma duarum rectarum Ab, bC major eſt ſumma duarum rectarum AB, BC. Immo ope methodi de maximis & minimis oſtendi poteſt maximam ſummam virium, ex quibus vis AC coaleſcit, tunc haberi, cum AB ſit æqualis BC, ideſt cum media vis diametro quadrati exhibetur. Sit enim data diameter AC$=a$, AB$=x$, BC$=z$.

Cumque rectangulum ABDC convertitur in $AbCd$, latus AB augetur, ideoque ejus elementum eſt poſitivum, BC vero minuitur, ideoque elementum eſt negans. Eſt vero $AB^2 + BC^2 = AC^2$, ideſt $x^2 + z^2 = a^2$. Quare $z^2 = a^2 - x^2$ & $z = \surd(a^2 - x^2) = (a^2 - x^2)^{1:2}$. Igitur ſumma virium cum in ſententia Carteſii ſit ut ſumma rectarum, erit in caſu maximi vis $= x + (a^2 - x^2)^{1:2}$. Sit itaque $y^2 = x + (a^2 - x^2)^{1:2} = bx + b(a^2 - x^2)^{1:2}$, ut lex omogeneorum ſervetur, & quantitates ad eamdem dimenſionem attollantur. Erit autem differentiando $2ydy$

$$= bdx - \frac{1}{2} 2bxdx(a^2 - x^2)^{1:2-1} = bdx - bxdx(a^2 - x^2)^{-1:2}$$

$$= bdx - \frac{bxdx}{\surd(a^2 - x^2)} = \frac{\surd(a^2 - x^2)bdx - bxdx}{\surd(a^2 - x^2)}.$$ Igitur juxta

methodum citatam erit

$\surd(a^2 - x^2)bdx - bxdx = 0$, & $\surd(a^2 - x^2)bdx = bxdx$,

ſive $\surd(a^2 - x^2) = x$

Eſt autem $\surd(a^2 - x^2) = z = BC$, & $x = AB$. Igitur in caſu ſummæ maximæ virium eſt $AB = BC$.

2. At ex Leibnitiana ſententia nihil hujuſmodi ſequitur, quod aggregatum quadratorum utriuſque lateris eſt ſemper æquale quadrato diagonalis; etſi enim vis per diagonalem infinitas directiones complectitur, ſingulæ tamen binæ directiones vi per diagonalem æquales ſunt. Igitur ob hoc etiam caput ſyſtema Leibnitii ſyſtemati Carteſiano præferendum eſt. Fateor tamen hanc rationem non multum diſtare ab ea, quam pro Leibnitiana virium æſtimatione primo loco attuli §. 127. atque adeo eſſe fere eamdem, niſi quod aliter hic contorquetur. Nihilominus aliquod etiam momentum inde illi accedit, eo quod planum fit, in quamcumque partem virium compoſitionem verſaveris, eamdem menſuram ſemper occurrere.

§. 192. Propoſitio

At enim ſententia quoque Leibnitii incurrit in eamdem aut ſimilem difficultatem; non quidem cum potentiæ componentes ad angulum rectum concurrunt, ſed cum aut ad angulum acutum, aut ad obtuſum inclinantur. Siquidem ubi angulus eſt recto major, potentia media compoſita eſt minor ſumma componentium, in quas etiam reſolvi poteſt; ubi vero angulus eſt recto minor, media major eſt ſumma earum, ex quibus exſiſtit. Quam difficultatem non levem eſſe viſam Bulfingero conſtat ex hiſce hominis verbis, quæ habet citat. Diſſert. de Viribus

Cor-

Corpori moto inſitis Sect. 1. Schol. 1. poſt Theor. 8. *Si minus tolerabile videatur ex duabus viribus coincidentibus exſurgere vim majorem aggregato earumdem ; explicent mihi contrariæ ſententiæ Patroni, cur in ipſorum hypotheſi per reſolutionem oriantur vires parentibus ſuis majores*. Ita Bulfingerus, de quo P. Riccatus e Societate Jeſu dignus filius celebris Geometræ Comitis Riccati hæc ſcribit in *Diſquiſitione Phyſico-Mathematica de Cauſſa Phyſica compoſitionis ac reſolutionis virium*, quam accepi, poſtquam omnia ſupra tractata litteris conſignaveram, P. inquam, Riccatus hæc ſcribit :

Non ſum neſcius, virum doctiſſimum in eo operam collocare, ut hanc, quæ mihi videtur maxima difficultas, de medio tollat. Nam ſi angulus directionum rectus ſit, tunc unius potentiæ actionem neque lædere neque juvare alterius actionem docet : quo fit ut ſimul junctæ perinde agant, ac ſi agerent ſeparatæ. At ſi angulus obtuſus ſit, propter potentiarum oppoſitionem alterius actio ab alterius actione debilitatur ; Si vero acutus ſit angulus, potentiarum actiones ſibi invicem opem ferunt. Quare actio potentiæ æquivalentis in primo caſu minor ſit oportet, in ſecundo major actionibus potentiarum lateralium ſeorſum agentium. Omitto caſum anguli obtuſi, in quo tametſi minus abſurdum videri poſſit potentiam genitam in compoſitione minorem eſſe ſumma producentium ; tamen in reſolutione potentiæ laterales genitæ multum excedunt genitricem : perpendo ſolum anguli acuti caſum, in quo ægre profecto percipio, qua ratione duæ vires licet ſeſe adjuvent quantum poſſunt, effectum gignere poſſint majorem eo, quem gignerent ſeparatim agentes.

Explicat autem vir celeberrimus, qua de cauſſa id accidat. Potentiæ, quarum directiones angulum efficiunt acutum, ſunt ex parte conſpirantes & conſentientes. Ex quo fit, ut potentia altera alteram ſimul cum corpore transferat ac viciſſim, & utraque in corpore moto inſit, atque in illud agat, tamquam reſpectu ſui quieſcens. Hinc illud incrementum oritur, quo actio potentiæ æquipollentis ſuperat actiones lateralium potentiarum. At ſi potentiæ ſeparatim corpus ſollicitarent, nonne agerent in corpus reſpectu ſui quieſcens? Nullum itaque diſcrimen intereſt inter potentias ſeparatim & conjunctim agentes. Unde igitur tanta inter effectus productos eſſe poteſt differentia ?

§. 193. Propoſitio

Hæc pauca Riccatus, quo propoſitam difficultatem in majori poneret luce, plura vero, quo ſatis eidem faceret, oſtenderetque

deretque cauſſam inter & effectum eam ſemper intereſſe æqualitatem, quam ratio requirit. Qua in re licet ingenioſe & luculenter mihi verſatus eſſe videatur, tamen alienum non judico, aliam exponere rationem, quam multo ante mecum ipſe commentatus fueram, dilucide explicandæ dictæ difficultatis, idque præſertim, quod hæc mea ratio rem a priori arceſſet, & a notionibus metaphyſicis majorem mutuabitur lucem. Jam clare explicavimus §. 182. & ſequentibus, qui fiat, ut elaſtra vires in ratione duplicata celeritatum corporibus impertiantur. Nunc illud tantum conſideramus, quod attinet ad duo corpora M & *m* æqualia, quorum alterum M uno elaſtro pellatur (*Fig.* 47. num. 4.), alterum *m* quatuor primo ſimilibus, æqualibus, & inter ſe paralellis elaſtris, quorum vires in maſſa *m* conſpirant. (*Fig.* 47. n. 3.) Qua in re illud convenit inter Philoſophos ab uno elaſtro celeritatem ut 1 tempore ut 2 communicari; a quatuor vero elaſtris celeritatem ut 2 tempore ut 1 §. 143. Quamobrem cum preſſio in *m* quadruplo major preſſione in M duplo majori celeritate fluat, quam eadem preſſio in M, æquali tempore vim octuplo majorem generare debet. Cum autem duret ſolum duplo minori, vim ſolum quadruplo majorem efficiat neceſſe eſt. Quod etiam ex eo colligitur, quia ſunt quatuor elaſtra, quorum quodlibet eamdem vim habere ponitur, quam illud, quo pellitur corpus M. Nec enim reſpondere juvat minorem a ſingulis, cum juncta ſunt, vim proficiſci, quam cum ſejunctim ſe exerunt, propterea quod duplo minori tempore quatuor conjuncta ſe expandant. Nam cum vis ex fluxu preſſionum exſiſtat, & ſubduplo tempore cum dupla celeritate eadem preſſionum quantitas fluat, quam duplo tempore cum ſubdupla celeritate, ſingula elaſtra viribus ſive conjunctis, ſive disjunctis in aliquod corpus ſe exerant, eamdem vim communicent oportet. Ita fit, ut quatuor ſimul juncta quadruplam generent.

§. 194. Propoſitio

Quamobrem cum a Leibnitianis affirmatur, duas preſſiones, aut celeritates ſimul copulatas vim quadruplam efficere, id paradoxum videri non debet, quod attinet ad celeritates, eo quod illa celeritas non a vi dupla duxit originem, ſed a quadrupla, qua vim pariter quadruplam cum alio corpore communicari mirum non eſt §. 182. Quod vero pertinet ad preſſiones,

ſiones, hic loquendi modus aliquantum eſt corrigendus, quia ſumma preſſionum, unde vis quadrupla exſiſtit, preſſionum, unde vis unius, ſummam quatuor partibus ſuperat.

2. Eſt etiam bene interpretanda alia formula, qua Leibnitiani utuntur, dum ajunt preſſiones & vires conſpirantes aliam aliam juvare; id enim in celeritates aliquatenus cadit, non autem in preſſiones, & multo minus in vires vivas in re præſenti. Nam quatuor elaſtra, non minorem neque majorem vim generant in una maſſa M, cum in ea colliguntur, quam cum in quatuor maſſas æquales M ſejunctim ſe exerunt; quippe quod in utroque eventu ſit vis ut 4 poſita maſſa $M = 1$. Pariter ſumma preſſionum eſt æqualis utrimque. Dixi in re præſenti; nam infra videbimus aliter poſſe contingere. Quia vero ſi corpori habenti unum celeritatis gradum alium addideris, vis antea gradus unius deinde fit quatuor, celeritates ſe viciſſim juvare verum eſt aliquatenus; id enim proprie dici non poteſt; cum celeritas nec celeritatem augeat, eo quod duo gradus celeritatis juncti non faciunt niſi duplam, nec vim, quod illa ab hac oritur, corporique percito uno gradu celeritatis alius addi non poteſt, niſi a vi & ſumma preſſionum triplo majori, quam vis & ſumma preſſionum, ex quibus exſiſtit primus gradus celeritatis. Quod in præſenti enucleate non tracto, quia ſatis arbitror dictum, cum de gravitate diſſererem §. 182. 184.

§. 195. Propoſitio

Hoc unum addo ſummam preſſionum æqualium, quales fluunt in gravi decidente, aut in corpore quod ab elaſtro infinito per ſpatium finitum pelleretur §. 144. non tempori ſoli, ut Carteſiani volunt, ſed ſpatio percurſo, ut Hermannus putat, ſive celeritati, qua ſpatium percurritur, & ſimul tempori proportione reſpondere. Quod etſi jam antea perſpicuum fecerim, liceat mihi hunc tanti momenti locum paucis retractare, præſertim cum iis, de quibus hic diſputamus, magnam lucem ſit allaturus. Certum eſt motus omnino continuos, quales ſunt corporum, quæ ſpatium vacuum percurrunt, alios aliis velociores eſſe poſſe, ita ut quo tempore corpus jugiter motum ſine ulla interpoſita morula ſpatium datum peragrat, eodem aliud nulla pariter interpoſita morula ſpatium duplo triplo &c. majus conficiat. Equidem ſcio contradicere quoſdam, qui claram hujus majoris & minoris ce-

leritatis ſine interjectis moris notionem formare ſe poſſe negant. Sed qui hoc ſentit nuncium remittat oportet tum evidentibus rationibus, quibus illud conficitur, tum certis legibus motuum in occurſu corporum, quæ hoc principio labefactato ſalvæ eſſe non poſſunt. Id planum feci alio loco, ad quem lectorem remitto §. 51. & ſeq. ne in tractanda quæſtione incidenti a propoſita materie longius abſcedam, præſertim cum in præſenti diſputatione id mihi neceſſe non ſit, cui res eſt cum iis Philoſophis, qui hac in parte idem ſentiunt. Hoc igitur poſito conſequens eſt celeritatem æquabilem eſſe in ratione non temporis, ſed ſpatii peragrati. Cum ergo preſſionum fluxus, ex quibus vis viva generatur, ſit ex genere quantitatis continuæ ſucceſſivæ, qualis eſt motus, quis non videt eodem omnino tempore alium alio majorem & velociorem eſſe poſſe; idque contingere, cum corpus, quod jugiter æqualibus urgetur preſſionibus celerius fertur, quam aliud, quod pariter alias atque alias preſſiones accipit? Si enim ſint in AQ (*Fig.* 46.) quatuor ſeries infinitæ elaſtrorum æqualis virtutis, & in EP una tantum elaſtrorum virtutis ejuſdem ac quælibet ex quatuor ſeriebus, & maſſas æquales per abſciſſas QH, PC curvarum QN, PM, quarum ſemiordinatæ HN, CM celeritates in ſingulis punctis ſignificent; quo tempore corpus ab elaſtris EP vim & celeritatem accipit, qua percurrat PC, eodem corpus ab elaſtris AQ ita pellitur, ut ſpatium QH quadruplo majus conficiat. Nam cum maſſæ pulſæ ſunt æquales, celeritates & ideo ſpatia percurſa eorumque elementa Hh, Cc ſunt eodem tempore in ratione preſſionum conſtantium, quæ ratio hic eſt $4p$ ad p, ideſt 4 ad 1. Quare poſita $PC = x$, $Cc = dx$, $CM = v$, $TM = dv$, erit $QH = 4x$, $Hh = 4dx$, $HN = V = 4v$, $RN = dV = 4dv$. Igitur $dv = pdt = \frac{pdx}{v}$, & $vdv = pdx$, atque integrando $\frac{1}{2}v^2 = px$. Jam vero $dV = 4pdT = \frac{4p4dx}{V}$, & integrando $\frac{1}{2}V^2 = 16px$. Quare

$$\frac{1}{2}V^2 : \frac{1}{2}v^2 = V^2 : v^2 = 16px : px = 16 : 1$$

Eſt autem vis impreſſa ab elaſtris AQ ſexduplo major vi impreſſa

preſſa ab elaſtris EP ; nam vires ſunt æquales ſummæ preſſionum fluentium , in quo mihi convenit cum recentioribus Carteſianis. Cum vero preſſio AQ ex quatuor ſeriebus infinitis elaſtrorum æqualis virtutis conflata ſit ipſa per ſe quadruplo major preſſione EP unius elaſtri, & propter æquale corpus eodem tempore pulſum quadruplo majori celeritate fluat; ſumma preſſionum AQ ſexdecim partibus ſummam preſſionum EP ſuperet neceſſe eſt . Vires igitur ſunt in ratione 16 ad 1 . Ex quo efficitur eſſe pariter ut quadrata celeritatum.

2. Quod ſi poſt primum minutum elaſtra AQ cohiberi, & elaſtrum EP per alterum minutum ſe dilatare & novos cum corpore ictus communicare ponamus, fore videbimus, ut elaſtrum EP hoc ſecundo minuto triplo majorem vim , quam primo dederat , preſſione , quæ in finita dilatatione infinitæ ſeriei elaſtrorum conſtans & eadem eſt , corpori tribuat §. 188. Quod recidit in caſum corporum gravium , quæ gravitate conſtante jugiter pelluntur deorſum, ut §. 145. cum Bernullio advertimus . Tunc vero velocitas corporis pulſi ab elaſtris AQ foret ſolum duplo major velocitate corporis pulſi ab EP , & vis ſolum quadruplo major , quod revolvitur in caſum ſuperius expenſum quatuor elaſtrorum & unius elaſtri, quæ ex ſerie finita componuntur . Ex quo concluditur falſos eſſe tum Leibnitianos, qui in actione elaſtrorum temporis rationem haberi oportere negant , tum Carteſianos , qui ſolius temporis, quo preſſiones fluunt, nulla habita celeritatis , qua preſſiones eædem aliæ aliis ſuccedunt ; eſt enim ratio ſubducenda utriuſque .

§. 196. Propoſitio

Quod ut dilucidius fiat, & ſimul confirmetur noſtra ſententia, Carteſiani nobis negare non poſſunt, diſtinctionem illam, quam §. 151. explicavimus inter corpora , quæ vi viva ſemper reſtaurata cientur, & inter corpora , quæ vi viva non reſtaurata pelluntur . Illa etenim una ſe expedire poſſunt ab objectis Muſſchenbroechii experimentis §. 149. Igitur aſſentiri debent ejuſdem elaſtri ad eamdem contractionem redacti & ad idem ſpatium ſe expandentis preſſiones eo minorem vim facere, quo breviori tempore ſe in corpus exerunt . Conſtat ergo in ſententia quoque Carteſianorum elaſtrorum preſſiones ipſas per ſe indifferentes eſſe , quod attinet ad quantitatem vis, quæ inde exſiſtat , & pro breviori vel longiori tempore minorem

vel

vel majorem generare. Quidni igitur eodem modo indifferentes erunt etiam pro ratione celeritatis, qua fluunt? Quid enim in veriori ſententia, quam in tractatu de quantitate defendimus §. 43. eſt tempus, niſi motus ejuſque celeritas? Quod ſi diſcrimen inter utrumque ponis, non repugno, modo & tu mihi aſſentiaris ad numerum & ſummam preſſionum, cui vis generata æqualis eſt, non magis conferre tempus, quod in tua ſententia a preſſionibus diſtinctum eſt, iiſque extrinſecus accidit, quam major & minor celeritas, quæ utpote major vel minor eodem tempore preſſionum continuata ſucceſſio eſt idem ac ſumma & numerus earumdem. Quid enim? num in definienda ſumma quantitatis alterius cujuſcumque generis, quæ ex fluxu alicujus elementi gradatim oritur, ad tempus, quo fluxus durat, & ad celeritatem, qua elementa fluunt, attendendum eſt §. 128. num. 12. in ſola metienda vi, quæ preſſionibus fluentibus generatur, ſolius temporis, quod impendunt preſſiones, non autem celeritatis, qua cientur, ratio habenda erit? Mihi certe hoc numquam perſuadebunt, niſi notiones omnes extorſerint, quibus ſtudium univerſalis Phyloſophiæ, Analyſis Infinite parvorum, & Phyſico-Mathematicæ meum animum informavit.

2. Ut vero cominus cum Leibnitianis congrediar, ajo Muſſchenbroechii experimentis confici quidem ab elaſtro a certo quodam contractionis ſtatu ſe dilatante vim eamdem cum diverſis maſſis diverſiſque temporibus communicari, ſed hoc ipſo oſtendi rationem temporis ſubduci oportere. Cum enim in pellenda maſſa quadruplo majori duplo minori celeritate preſſiones ab elaſtro profectæ fluant, duplo majori tempore opus eſt, ut eadem, atque in maſſa ſubquadrupla, vis generetur. Hoc enim pacto ſe vires & ſummæ preſſionum compenſant. Quanto enim ſumma preſſionum, quibus maſſa quadrupla cietur, ratione habita duplo minoris celeritatis, eſt minor ſecunda ſumma preſſionum, quibus ſubquadrupla, tanto ratione habita duplo longioris temporis altera alteram excedit. Igitur in hiſcemet explicandis Muſſchenbroechii experimentis temporis ratio negligenda non eſt.

§. 197. Propoſitio

Sed ut redeam ad quatuor elaſtra longitudinis infinitæ, in iis proprie verum ſit, quod Leibnitiani dicunt de preſſionibus, quarum aliæ alias juvent. Nam illæ preſſiones ſe viciſſim conjunctione juvant, ex quibus junctis eodem tempore vis major in corpore preſſo exſiſtit, quam ſi ſejunctæ forent. Res autem ita

ſe ha-

ſe habet. Siquidem cum illa quatuor elaſtra conjunctis viribus in eamdem maſſam *m* nituntur, vim uti 16 gignunt. Cum vero unum ex iis in æqualem maſſam M, ſolum vim ut 1 eodem tempore generat, quatuor in quatuor maſſas M ſejunctim ſe exerentia ſolum vim ut quatuor gignant neceſſe eſt. Igitur quatuor ſimul in eadem maſſa & eodem tempore plus poſſunt, quam eadem quatuor ſeparata in quatuor æqualibus maſſis. Quod ſi etiam in elaſtris finitis conſideremus ſolum eam partem vis, quæ eodem tempore gignitur, idem confirmari comperiemus. Hoc autem mirum videri non debet; quia cum elaſtrum utpote percitum vi, quæ jugiter reſtauratur, pro majori vel minori celeritate eodem tempore potis ſit plures vel pauciores preſſiones, atque idcirco majorem vel minorem exerere vim §. 196. preſſiones primi, ex. cauſſa, elaſtri a preſſionibus ſecundi juvantur, non ob eam præciſe cauſſam, quod duæ preſſiones junctæ proprie fiant quatuor, ſed quia preſſiones ſecundi celeritatem corporis pulſi a primo elaſtro juvantes maſſæ reſiſtentis impedimento magis tollendo occaſionem præbent, ut ſuas preſſiones illud elaſtrum eodem tempore citius exerere & ideo majorem vim eodem tempore imprimere poſſit.

§. 198. Propoſitio

Sed ut propius accedam ad id, quo hæc omnia ſpectant, ajo corpus duabus viribus ad angulum concurrentibus pulſum ſpectari poſſe ut percitum a duabus infinitis vel æqualis virtutis vel inæqualis elaſtrorum ſeriebus, quæ pariter datum angulum faciant. Quo poſito liquebit ratio eorum, quæ in vim ex duabus concurrentibus coalitam cadunt, & præſertim æqualitas inter effectum & cauſſam. Nam ſi potentiæ & celeritates ad angulum aliquem oppoſitæ (*Fig.* 34.) ſint A D, A B, ducta recta E A F ad punctum A, quæ ſit perpendicularis ad mediam potentiam A C, methodo, quam §. 129. explicavimus, quærendæ ſunt tam duæ rectæ A E, E D, ſive A M, quibus æquivalet media A D, quam duæ rectæ A F, F B, ſive A G, quibus media A B. Quo facto patet duas potentias & celeritates A D, A E, quatenus in duas æquales & omnino contrarias A E, A F reſolvuntur, pro nullis haberi poſſe, nullumque ea parte ſui effectum gignere; quatenus vero in alias duas omnino conſpirantes A M, A G, pro potentiis ſive elaſtris infinitis omnino congruentibus poſſe haberi & vim imprimere corpori perinde ac ſi forent elaſtra, quæ corpori duas celeritates congruentes A M, A G tribuerent. Quare facta

A C

AC = AM + AG, vis communicata tanta eſſe debet, quantum eſt quadratum celeritatis AC. Hæc autem vis hocque quadratum ſunt ſemper minora vi, quæ ex celeritatibus & potentiis omnino conſpirantibus & in eodem corpore conjunctis AD, AB exſiſtit, ut liquet; viribus autem, ex quibus celeritates AD, AB exſiſtunt in duobus corporibus æqualibus, poſſunt eſſe vel æqualia, vel majora, vel minora, quin aliquid detrimenti capiat certum principium æqualitatis inter effectum, & cauſſam. Nam ſi celeritates AD, AB omnino congruerent, vis, a qua illæ in eodem corpore productæ ſunt, major foret viribus, quibus in duobus corporibus æqualibus celeritates DA, DC ſejunctim gignerentur, quin illud principium everteretur, eo quod, ut ſupra explicavi, ſumma preſſionum congruentium AD, AB, ideoque vis foret uti dictum quadratum rectæ conſtantis ex AD, AB, ſumma vero preſſionum AD foret ut quadratum DA, & ſumma preſſionum AB, ut quadratum AB; quæ duæ ſummæ, quibus eſt æqualis vis in dictis duobus corporibus diſtributa, minores ſunt, quadrato rectæ conſtantis ex AD, AB, cui ſumma preſſionum in uno corpore congruentium eſt æqualis. Si vero celeritates AD, AB forent omnino oppoſitæ, vis reliqua vel nulla foret, ſi celeritates æquales, vel ſaltem minor viribus ſeparatis, quibus duæ celeritates AD, AB in duobus corporibus æqualibus gignuntur. Quare ſi duæ potentiæ & celeritates nec penitus congruant nec penitus opponantur, poſſunt eſſe vel æquales, vel majores, vel minores viribus ſeparatis, quin dictum principium labefactetur. Id enim pendet ab angulo oppoſitionis BAD. Nam cum ad angulum opponuntur, duo ſunt in iiſdem, quorum altero fieri debet, ut ſint minores, altero ut ſint majores ſejunctis viribus: nam quatenus celeritates & potentiæ AD, AB in duas æquales & omnino contrarias AE, AF reſolvuntur, accedunt ad naturam virium oppoſitarum, & minores eſſe deberent; quatenus autem in duas congruentes AM, AG, loco congruentium haberi poſſunt, & a majori vi, quam ſejunctæ, proficiſci debent. Quare hæc duo ita alterum ab altero compenſari poſſunt, ut vis, ex qua celeritas media AB in eodem tempore exſiſtit, præciſe ſit æqualis ſummæ virium, ex quibus celeritates AD, AB in duobus corporibus primo æqualibus exſiſterent. Id autem fit, cum ad angulum BAD rectum concurrunt, idque colligitur tum ex eo, quod vires ſunt ut quadrata celeritatum, tum ex eo, quod celeritas media eſt æqualis diagonali AC rectanguli

ABCD,

ABCD, tum demum ex eo, quod in rectangulo quadratum AC^2 eſt æquale ſummæ quadratorum $BA^2 + DA^2$. Quod ſi fiat concurſus in angulo obtuſo, iiſdem principiis monſtrabitur vis media AC minor viribus AD, AB, quæ in duobus corporibus & inter ſe & primo æqualibus reperiretur. Quod ſi tandem concurſus ſit ad angulum acutum, pariter eadem principia perſpicuum facerent vim mediam AC in uno corpore conglobatam futuram eſſe majorem viribus ſeparatis; neque hac re principium everteretur, quia tunc vires, quæ ſejunctas celeritates, ex. gr. AD, AB efficerent, minores forent viribus, quæ conjunctas in uno corpore AM, AG, viſque media foret effectus virium per AD, AB, non quatenus ſejunctæ ſunt, ſed quatenus junctæ in celeritatibus AM, AG, quæ congruerent, efficiendis.

§. 199. Corollarium

Atque hoc pacto reor compoſitionem virium cum principio æqualitatis inter effectum & cauſſam optime conciliari, ut aliud nihil hac in re ſuperſit, quod negotium faceſſere poſſit. Ex quo etiam fit, ut majus momentum accedat ad Leibnitianam virium æſtimationem, in qua difficiliora Phyſicæ capita mira facilitate explicantur.

CAPUT SEXTUM

De objectis, quæ ex colliſione corporum perfecte durorum adverſus Leibnitii ſententiam ducuntur.

§. 200. Objecta

QUæ omnia ita plane & luculenter concludi puto, ut adverſarios ipſos eſſe aſſenſuros confidam, ſi modo ex eorum animis eadem facilitate & diligentia evellam id, quod eos ab hac ſententia uſque nunc deterruit, præjudicatam videlicet illam opinionem, quod ex colliſione corporum perfecte ſolidorum Carteſiana virium æſtimatio tam evidenter efficiatur, ut Leibnitianis adverſus prima principia pugnandum ſit, quo rationibus inde concluſis occurrant. Fateor in iis refutandis Bernullium, Bulfingerum, Graveſandum, aliosque doctiſſimos viros mirifice deſudaſſe. Sed, quod bona eorum venia ſit dictum, nego illa fuiſſe in medium allata, quæ Philoſophis ſatisfacere poſſent, aut ſaltem ejuſdem eſſent momenti, ac argumenta Carteſianorum. At enim quid melius proferre ſperas poſt tot exantlatos a ſummis Phyſicis atque

que Geometris labores? Ut verum patefaciam, poſt longas identidem repetitas meditationes ſine ullo ſucceſſu jam animum deſponderam, cum caſu accidit, ut in eam inciderem theoriam virium centralium, quam §. 84. num. 9. memoravi, quæ una cum aliis principiis mihi facem prætulit, quo huic prope depoſitæ ac deſperatæ parti Phyſicæ ſubvenirem, & alia multa fere inextricabilia Philoſophiæ capita enodarem. Sed de his paulo poſt; nunc audiamus Carteſianos, qui rationem ita concludunt. Si duorum corporum perfecte ſolidorum M & *m*, quorum alterum alteri directe occurrit, ſint celeritates C & *c* in ratione reciproca maſſarum, ideſt ſi, ex. cauſſa, maſſa M eſt $= 2$, & $m = 1$, maſſæ M celeritas C ſit $= 1$, & maſſæ *m* celeritas $c = 2$, vires ſe mutuo perimunt, & corpora juncta quieſcunt. Quod argumento eſt eas eſſe inter ipſas æquales. Non ſunt autem æquales, niſi in ſententia Carteſii, in qua vires ſunt ut producta ex maſſa in celeritatem. Nam in Leibnitiana, quæ vult eſſe æquales producto ex maſſa in quadratum velocitatis, vis P maſſæ M eſt $= 2$, & vis *p* maſſæ *m* eſt $= 4$. Ergo amplectenda Carteſii ſententia & repudianda Leibnitii, ex qua conficitur id, quod cum evidenti ratione pugnat, vim duplo majorem poſſe a ſubdupla perimi. Immo ſi maſſæ $M = 2$ celeritas C ſit $= 2$, & maſſæ $m = 1$ celeritas *c* ſit $= 3$, ex legibus motuum compertum ſit, vim *p* maſſæ *m* prorſus iri corruptum, & in M aliquid eſſe reſiduum, quod ab M cum *m* communicetur, tametſi in Leibnitiana virium æſtimatione vis P maſſæ M ſit $= 8$ & vis *p* maſſæ *m* ſit $= 9$. Quod multo magis abhorret ab omni ratione, quæ perſpicue docet vim majorem a minori ſuperari non poſſe.

2. Quod ſi maſſa $M = 1$ celeritate $C = 2$ recta incurrat in maſſam quieſcentem $m = 1$, ideſt ſibi æqualem, hoc alio modo ratio concluditur adverſus Leibnitianam æſtimationem. Ex legibus motuum compertum ſit utramque maſſam $M + m = 2$ ſimul copulatam ut unum corpus moveri dimidio velocitatis illius, qua impingens ante conflictum ferebatur; deinde nihil vis in hoc conflictu interire, propterea quod nulla eſt in percuſſo corpore vis contraria, qua pars aliqua vis corrumpatur. Hoc autem verum eſt ſolum in Carteſiano ſyſtemate, in quo tum ante tum poſt conflictum vis eſt $= 2$, non autem in Leibnitiano, in quo vis poſt incurſum eſt quidem $= 2$, cum maſſa 2 ducta in 1 quadratum celeritatis 1 faciat 2, non vero ante, cum maſſa 1 ducta in 4 quadratum celeritatis 2 colligat 4. Quo ergo

abit

abit dimidia pars vis? Igitur propter hanc etiam rationem ſyſtema Leibnitii explodendum eſt, & in veteri Carteſiano perſtandum.

§. 201. Reſponſio

Animus mihi non eſt illa referre, quæ a Cl. Viris excogitata ſunt, ut his ſatisfacerent. Facere tamen non poſſum, quin referam Bernullii rationem in toties citato Commentario, quo Gordianum nodum ſecare quibuſdam eſt viſus, propterea quod cum iis, quæ ſumus dicturi, neceſſitudinem habet. Is ergo putat haſce rationes inniti illa falſa hypotheſi, quod corpora perfecte ſolida, quæque nullatenus comprimuntur in ictu, eſſe queant, cujus manifeſtam contradictionem ex lege continuitatis, ut ajunt, ita ſe credit efficere. Hujuſmodi lex ſtatuit nihil ab alio ad alium ſtatum contrarium per ſaltum & ex abrupto poſſe migrare, ſed opus eſſe, ut ante per omnes inter utrumque poſitos ſtatus & gradus tranſeat, ſive ut verbis utar Dominæ *Du Chaſtellet* tom. 1. Inſtit. Phyſic. §. 13. ex italica verſione in latinam linguam translatis, per omnes diſcrepantes ſtatus, qui percipi poſſunt inter utrumque. Quod ita probat. „ Principio ſufficientis rationis hoc efficitur; nam quicumque ſtatus, in quo aliquid eſt, habet ſuam „ ſufficientem rationem, cur in eo potius ſtatu reperiatur, quam „ in alio quocumque, hæcque ratio non poteſt inveniri niſi in „ ſtatu antegreſſo. Hic igitur anterior ſtatus quidpiam complectebatur, quod ſtatum actualem ſecutum progeneravit: ut hi „ duo ſtatus ſint ipſi inter ſe ita apti & connexi, ut aliquid interponi non poſſit. Si enim inter ſtatum actualem interque „ illum, qui proxime anteceſſit, alius aliquis ſtatus eſſe poſſet, „ natura primum ante reliquiſſet, quam ad eum relinquendum a „ ſecundo determinata fuiſſet. Nulla foret ergo ratio ſufficiens, „ cur ad hunc potius actualem ſtatum migraret, quam ad quemlibet alium poſſibilem. Ex quo fit nihil ab alio ad alium „ ſtatum pervenire, quin per omnes tranſeat interpoſitos ſtatus, „ quemadmodum ab alia ad aliam civitatem, niſi per interjectum iter non pervenitur „. Hactenus Cl. Fœmina, quæ paulo poſt hinc efficit cum Bernullio in hac rerum univerſitate nullum exſtare corpus perfecte durum, propterea quod in eorum conflictu hæc lex minime obſervaretur. Siquidem hæc corpora a motu finito ad quietem, & a quiete ad motum, & a motu hanc verſus plagam ad motum aliam verſus in inſtanti tranſirent. Quo fieret, ut interpoſitos ſtatus non percurrerent motus in infinitum

nitum tardioris & omnium diverſarum directionum, quæ inter duas contrarias intercipiuntur. Ex quibus conſequitur omnia corpora eſſe donata aliquo gradu elateris, quo idonea fiant huic implendæ, quam natura numquam tranſilit, legi continuitatis.

2. Sed ne his plane aſſentiar, duo maxime obſiſtunt, primum me iis rationibus, quæ ipſa ex natura continuæ extenſionis nullis actu partibus donatæ evidenter concluſæ ſunt §. 24. docuiſſe corpuſcula primitiva, ex quibus omnia corpora componuntur, eſſe ita ſolida & dura, ut nulla prorſus ratione comprimi poſſint, alterum non aliunde quam ex falſa & præjudicata notione ſoliditatis ejuſque cum impenetrabilitate conjunctionis oriri, quod in corporibus perfecte duris legem continuitatis obſervari non poſſe Philoſophi credunt. Quod ita conficio. Jam ſupra monuimus §. 113. num. 9. ex ea noſtra ſententia, quam §. 54. ſtabilivimus, quod corpus aliud alio in infinitum denſius eſſe poteſt, corpora ipſa per ſe, & ſi eorum eſſentia in extenſione poſita conſideretur, impenetrabilia non eſſe, quia ex duorum penetratione extenſorum aliud nihil ſequeretur, quam extenſum denſius, quod eſſe poſſe citato §. docuimus. Ex quo fit, ut ſi corpus ſolidum in aliud pariter ſolidum quieſcens incurrat, & aliud nihil præter eſſentiam in utroque reperiri ponatur, illud penetrare debeat, atque eodem percurſo a contraria egredi parte, quin ullam ſui impetus partem cum eodem communicet. Quid enim communicare poſſit cum eo, quod illius motui nequaquam obſiſtit? ut nunc taceam, quod paulo poſt oſtendam, corpus aliud in aliud tamquam veram cauſſam effectricem impetum non poſſe transfundere. Cum vero ex conſtanti ſenſuum teſtimonio diſcamus omnia corpora penetrationi reſiſtere, ad aliquod accidentale & extrinſecus adſcitum confugiendum eſt, quo ſufficientem impenetrabilitatis rationem afferamus. Quod enim ab eſſentia rei non derivatur, ejuſdem origo ab accidentibus & a re externa illud gignente repetenda eſt §. 22. num. 61.

3. Cum vero motu & vi, quæ illum generat, corpus ad alterum penetrandum determinetur, aliud nihil huic penetrationi impediendæ erit accommodatius præ contraria vi accidentali, cujuſmodi eſſe omnes vires ſupra docuimus §. 120. quæ motum cohibeat corporis, ne in interiorem alterius ſubſtantiam ſe inſinuet. Hæc autem vis, quo huic effecto gignendo fiat idonea, ſit ex genere repellentium neceſſe eſt, atque ſimul inſi-

infinita, qua vel maximas corporum in ſe incurrentium vires ſuperare, & ita mutuam ipſorum penetrationem impedire poſſit. Ad illam autem hiſce præditam qualitatibus aſtruendam alio nihil eſt opus, quam poſitione ſimpliciſſimæ hypotheſis innumerabilibus experimentis & obſervationibus confirmatæ, quod omnia corpuſcula primitiva ſe invicem trahant in ratione compoſita ex inverſa diſtantiæ a ſe mutuo, aut cujuſdam potentiæ ejuſdem, uti quadrati, quemadmodum fert Nevvtoniana ſententia, & ex directa ſimplici maſſarum, quarum altera ab altera allicitur. Si enim res ita ponatur, ubi corpora ad contactum, ſive ad infinite parvam diſtantiam pervenerint, vis eorum attractrix infinita fiet. Ex quo conſequitur eam in repellentem eamque pariter infinitam converti, ut a priori perſpicuum feci §. 84. num. 9. & 10. & cum ad vires centrales accedam, multo accuratius declarabo.

4. Hic animus non eſt enumerare experimenta, quibus hæc attractionis lex in hac rerum univerſitate obtinere conficitur; id enim eſt alterius loci. Hoc unum, quod ad illa pertinet, nunc animadvertam, hanc vim attractricem omnium corporum in eo ſenſu, quo ab omnibus Philoſophis admittitur gravitas, a nemine, qui recte ſentiat, jure ac merito poſſe negari. Nam ſicuti ex eo, quod corpora, quæ ſub ſenſus cadere potuerunt, deorſum petere centrum telluris verſus obſervata ſunt, omnia eodem tendere & gravia eſſe collegimus; ita ex eo quod innumerabilia corpora ad ſe invicem accedere deprehenſa ſunt, omnia idem præſtare inferendum eſt, & ideo gravitare in ſe invicem, cui generali corporum gravitati nomen attractionis ab inventoribus impoſitum fuit. Et quemadmodum omnes Philoſophi etiamſi aut nullam, aut non certam terreſtris gravitatis cauſſam afferre poſſint, tamen præclare ſecum actum putant, ſi alicujus naturalis effectus proximam terreſtris gravitatis cauſſam, uti in ſuſpenſione mercurii in tubis Torricellianis aeris gravitatem aſſignent, ita etſi nulla attractionis ſeu generalis gravitatis cauſſa afferatur, id non officit, quominus ad proximam multorum effectuum rationem reddendam hac generali attractione recte uti poſſint. Et ſicut iis, qui ad terreſtrem gravitatem confugiunt, vitio non vertitur, quod ignotum per aliud ignotum explicent, propterea quod ex altera parte illa gravitas eſt nota experimentis &, ut ajunt, *a poſteriori*, ex altera autem ſatius eſt effectus ſolam afferre cauſſam

proximam, quam nullam; ita ob eaſdem rationes iis, qui ad generalem, ea nota inurenda non eſt.

5. Quare ceſſent Carteſiani hæc adverſus Nevvtonianam ſententiam toties inculcare, & ſi quid proficere volunt, potius ſibi oſtendendum ſuſcipiant aut ratione non eſſe in corporibus hanc vim, qua ad ſe mutuo accedant, aut experimentis & obſervationibus in aliquo non reperiri. Quod certe non faciunt, ut ex ſolutione conſtabit eorum, quæ contradicuntur. Sed in anteceſſum adverto, ſi attendamus ad experimenta, in aliquibus corporibus potius obſervari vim repellentem, quod quale ſit ſuo loco videbimus; nunc id unum monemus eam quoque eſſe idoneam ad id efficiendum, quorſum hæc ſpectant, uti paulo poſt oſtendemus. Sed quod attinet ad ea, quæ objiciuntur, aliqui putant multum eſſe momenti in ea ratione, quod ſi omnia corpora ſe mutuo traherent, pluma aut folium prope ingentem templi fornicem poſita ad eumdem accurrerent; id autem nequaquam uſuvenit. Dicendum eſt ergo vim hanc attractricem in omnibus corporibus non reperiri. Quod ſi reponatur hanc vim non ſolum in fornice haberi, verum etiam in tellure, quæ cum multis partium millionibus fornicem ſuperet, habita ratione maſſæ poſſidet valde majorem, quam fornix ratione habita minoris diſtantiæ, cujus rationem aliquam inverſam uti duplicatam in Nevvtoniana ſententia ea vis ſequitur, regeri poteſt. Si pluma aut folium fornicem contingant, tunc vim, qua folium a fornice attrahitur, ob nullum ſive infinite parvum intervallum, futuram eſſe infinitam, ſi cum terreſtri vi, quæ finita eſt, conferatur; vim autem undequaque finitam ſuperari oportere ab ea, quæ ex capite maſſæ fornicis finita eſt, ex capite vero nullius a fornice diſtantiæ infinita eſt. Ad hanc infirmandam rationem ex iis, quæ de continui extenſi in infinitum diviſione in ſuperioribus ſunt diſputata §. 21. & 56. memoria repetendum eſt ſuperficiem extenſi ſeu particulas maſſæ, quæ a ſuperficie abſunt infinite parvo intervallo eſſe infinite minores iis, quæ in tota maſſa inveniuntur, quæque finitam habent a ſuperficie diſtantiam. Ex quo fit eas, quæ in folio infinita vi a fornice alliciuntur, utpote quæ a ſuperficie contacta & idcirco ab eadem intervallo infinite minimo abſunt, eſſe infinite minores iis, quæ finite diſtant, atque idcirco finita vi tum a fornice tum a tellure attrahuntur. In hiſce ſecundis ſit vis terræ multo major,

ut ob ingentem maſſam eſſe poteſt, vi fornicis. Corruptis utrimque utpote contrariis vi, qua illæ particulæ ſurſum a fornice trahuntur, & æquali portione vis, qua deorſum alliciuntur a terra, ſolum ea vis telluris, quæ reſidua eſt, conſideretur, & cum vi, qua primæ cum fornice cohærent, comparetur. Vis primarum infinita quidem erit ratione habita intenſionis, ſed infinite parva, ſi ratio habeatur infinite parvæ earumdem magnitudinis; ſecundarum autem erit finita tum in intenſione, tum in magnitudine, ſive ut ita dicam, extenſione particularum, quæ ab illa alliciuntur; vis autem infinita ex altera parte & infinite minor ex altera comparari poteſt cum ea, quæ ex utraque parte finita eſt, & eidem eſſe vel æqualis, vel major, vel minor; uti rectangulum infinitum in longitudine & infinite parvum in latitudine poteſt eſſe vel æquale, vel majus, vel minus rectangulo ex utraque parte finito, quia cum poſſit infinitum ad finitum eſſe in eadem ratione, ac finitum ad infinite parvum, in quo eventu productum ex extremis productum mediorum exæquat; ſequitur etiam infinitum ad finitum eſſe in majori vel minori ratione finiti ad infinite parvum, in quibus eventibus quod fit multiplicandis extremis, eſt majus vel minus illo, quod ex ductu mediorum exſiſtit. Ergo vis, qua ſurſum corpus a fornice abripitur, poteſt eſſe vel æqualis, vel major, vel minor illa, qua deorſum trahitur a tellure. Cum vero vis, qua corpus a fornice allicitur, eo major fit, quo corpus contingens majorem habet ſuperficiem contingentem, eo quod tunc plures particulæ infinita aut fortiori vi ab illo attrahuntur, eamque læviorem ob eamdem majoris contactus cauſſam, & quominus altum eſt, eo quod omnes illius particulæ breviori intervallo a fornice & longiori a tellure abſunt, & in contrariis eventibus eo minor fit; ex hiſce tribus capitibus ratio petenda eſt, cur aliqua corpora cum ſuperioribus contra gravitatis niſum cohærent, alia vero ab iis avelluntur, & terram verſus contendunt. Hinc eſt quod corpora aſpera, uti eſt folium, cohærere non poſſunt cum aliis, etiamſi mutuo ſe contingant, ſed a gravitate abripiuntur deorſum propter moleculas, in quibus contactus fit, pauciores quam opus eſt ut particularis attractio generalem ſuperet attractionem terreſtrem; corpora vero lævigatiſſima ob contractum in multo pluribus particulis etiam in vacuo Boyliano firmiſſime copulantur, nec a mutuo com-

 plexu

plexu ſine magna vi, aut ingenti pondere, quod ex inferiori appendatur, disjungi poſſunt. Hinc etiam oritur, quod omnia fluida cum ſolidis etiam non lævigatis cohærent, propterea quod ſingulæ particulæ, quæ ab aliis facile ſeparari poſſunt, & exiguæ ſunt & valde læves. Ex quibus omnibus compertum fit, cur quamvis in omnibus corporibus ſit vis attractrix, quæ in ratione duplicata inverſa diſtantiæ augeatur, tamen folium & pluma cum fornice, quem contingunt, cohærere non debeant.

6. Verum ex altera parte non leve hic mihi negotium faceſſi poteſt ex ea Nevvtoni propoſitione 73. libri 1. Princip. qua oſtendit ex hypotheſi attractionis in ratione inverſa duplicata diſtantiarum, quam in conſequentibus ſum amplexurus, conſequens eſſe attractionem ſphæræ in corpuſculum contingens ſphæram aut intra illam collocatum eſſe in ratione directa diſtantiæ a centro. Hinc enim efficitur hujuſmodi vim attrahentem in contactu infinitam non fieri, atque ideo in repellentem nequaquam converti. Quo ruunt omnia, quæ hactenus conſtituta fuerunt. Reſpondere poſſem me hic nulla etiamnum lege ad aliquam peculiarem attractionis ſpeciem defendendam teneri, atque idcirco mihi eſſe integrum illam tueri attractionis hypotheſim, quæ triplicatam inverſam ponit diſtantiarum rationem, in qua idem Nevvtonus infinitam in contactu vim attrahentem paulo poſt citatam propoſitionem confecit. Quo uno prorſus objectæ difficultati ſit ſatis. Sed quia Naturæ phænomena, ut alibi oſtendam, Nevvtonianam attractionem in hac rerum univerſitate obtinere demonſtrant, hac reſponſione non utor, & cum de attractionibus corporum diſſeremus, perſpicuum faciam ea, quæ Nevvtonus docuit, pertinere ad ſphæras ex multis corpuſculis coagmentatas, non ad primitiva corpuſcula, cum alterum in alterum incurrit.

7. His ſolutis difficultatibus ſequitur alia non levioris momenti, præſertim poſt illa, quæ a Domina *Du Chaſtellet* litteris conſignata ſunt. Sic autem aſtringitur. Si eſſet in corporibus vis attractrix, corpus aliud in aliud ageret, & aliud alius ſtatum mutaret etiam interpoſito vacuo. Jam vero corpus aliud in aliud agere, & aliud alius ſtatum interpoſito vacuo mutare non poteſt. Siquidem ut Cl. Fœmina optime probat tom. 1. Inſt. Fiſic. §. 395. hæc ſtatus mutatio foret ſine ulla prorſus ſufficienti ratione: ergo vis attractrix in corporibus

bus eſſe non poteſt. Ut quid ſentio, magis perſpicuum faciam, ego puto ſubſtantiam aliam in alia tamquam veram cauſſam effectricem agere non poſſe niſi alterutro ex his modis, vel creando vim in ſecunda, vel illam communicando. Nam aliam ſubſtantiam agere in alia idem eſt ac primam mutare ſtatum ſecundæ; mutatio vero ſtatus utpote aliquid relativum & ſucceſſivum ipſa per ſe gigni non poteſt, ſed generetur neceſſe eſt aliquod abſolutum & permanens, quod dicitur vis, ex quo illa mutatio exſiſtit §. 119. Hoc autem abſolutum non poteſt niſi vel denuo creari a ſubſtantia, virtutem creandi quæ habet, ideſt a Deo., vel ad ſummum ab alia ſubſtantia in aliam idem numero perſeverans migrare, in quo communicatio poſita eſt. Hac de cauſſa libenter do corpus aliud in aliud interpoſito vacuo diſſitum tamquam veram effectricem cauſſam operari non poſſe, propterea quod nec habet infinitam illam potentiam, qua abſolutum illud, quod dicitur vis, in corpore diſſito creet, nec interpoſito vacuo vim, quam habet, communicare poteſt, propterea quod ſi hæc eſſet eſſentialis, abſolute non poſſet ab alio in aliud corpus tranſire; ſin autem foret accidens, uti §. 120. oſtendimus eſſe quamcumque vim, quæ motui gignendo ſit apta, aut per ſaltum in inſtanti ab alio in aliud corpus migraret, aut aliquo temporis ſpatio ſine ulla prorſus ſubſtantia creata perſeverans interceptum inane percurreret; quorum alterum pugnat cum natura accidentis, quod ſemper aliquod poſtulat ſubjectum creatum, in quo ſit, alterum cum principio rationis ſufficientis & cum ſupra memorata lege continuitatis, necnon cum eo principio, quod nihil eodem inſtanti pluribus in locis eſſe poteſt. Quare corpus aliud ab alio tamquam a vera cauſſa efficiente trahi nequire concluditur. Aliud igitur nihil reſtat, niſi ut dicamus Deum eſſe veram effectricem attractionis cauſſam, qui occaſione præſentiæ corporum in ipſis creat hanc accidentalem vim, qua ad ſe invicem accedant, quaque idcirco ſe trahere videantur.

8. Sed nequis objiciat nos pro libito & ſine ulla neceſſitate, contraquam Philoſophum decet, ad primam cauſſam confugere, paucis oſtendendum eſt nullum corpus eſſe poſſe veram efficientem cauſſam motus alterius, neque cum aliud aliud contingit. Quod ita aggredior. Motus ipſe per ſe ab alio in alio corpore gigni non poteſt §. 119. vim autem motui efficiendo idoneam corpus nec in altero creare poteſt, ut paulo

ante oſtendi, nec cum eodem communicare. Cum enim conſiderata ſola corporis eſſentia ſine ulla accidentali vi repellente, corpus quieſcens ab altero, quod in ipſum incurrit, penetretur, num. 2, nullam eidem reſiſtentiam opponit; ſed quantum in ipſius eſſentia eſt, liberum ſine ullo impedimento tranſitum permittit. Ergo nulla eſt ſufficiens ratio, cur aliquam ab eodem recipiat. Intantum enim vis aliqua a corpore moto in quieſcens migrare debet, inquantum quieſcens impedimento eſt, ne aliud moveri pergat, dum maſſam quieſcentem offendit. Cum igitur ex eo, quod corpus aliud ab alio liberrime penetratur, nullum eſſe hujuſmodi impedimentum ſit conſequens, nullam a corpore moto cum eo, quod quieſcit, vim communicari concluditur. Sed fac corpora ita ex ſui natura eſſe impenetrabilia, ut dum aliud in maſſæ quietæ ſuperficiem incurrit, motum continuare non poſſit, quin illam abripiat & moveat. Nego tamen vim eamdem in individuo poſſe ab alio in aliud transferri. Siquidem tranſire non poteſt, niſi a ſuperficie tacta corpuſculi ſolidi quieſcentis ad alteram ſuperficiem diſtantem non tactam migret. Ergo quæro an migret in inſtanti, an in tempore. Si dicas in inſtanti, in illud offendes abſurdum, quod eadem numero vis eodem inſtanti in partibus tactis & in partibus remotis non tactis ideoque in diverſis locis reperiretur. In hac enim hypotheſi, qua vis in omnes corporis percuſſi partes diditur, ea in partibus tactis, ad quas ab impingente proxime tranſit, primum inveniatur neceſſe eſt. Quod ſi ad alterum te convertas, tuam cauſſam tolerabiliorem non facies. Nam in corpore prorſus ſolido, qualia ſunt corpuſcula primitiva, nulla pars moveri poteſt abſque aliis, quibuſcum ita firmiter conglutinata eſt, ut neque tamquam pars actualis ab aliis partibus diſtinguatur §. 20, nec omnes ante moveri poſſunt, quam ſingulæ ſuam acceperint partem vis, ſine qua motus eſſe non poteſt §. 119. Quare ſi vis a partibus tactis ad partes non tactas in tempore tranſit, corpus impingens & impactum quieſcant oportet per aliquod tempus, illud ſcilicet, quod neceſſarium eſt ad eum finem, ut ad omnes corporis percuſſi partes diffundatur ea vis, ſine qua moveri eædem non poſſunt. At id in quantas difficultates incurrat, nemo non videt. Quid enim quieſcentibus corporibus facit ea vis, quæ in ipſis exſtare ponitur? Ubi enim ad perfectam quietem redacta ſunt corpora,

ab

ab alio nullo niſi ab extrinſeco agente in motum rurſus cieri poſſunt . Dices hic non opus eſſe exteriori agente , cum ſit interior vis , quæ ubi corpus percuſſum omnino peragraverit , eadem corpora movebit . At hoc pacto non ſubſtantia vi prædita aliam ſubſtantiam movebit adminiculo vis , quam communicet, ſed ipſa vis, perinde ac ſi foret ſubſtantia, utrumque corpus omnino quieſcens ipſa per ſe movebit . Deinde quieſcentibus corporibus hæc vis interiorem corporis percuſſi ſubſtantiam in tempore peragrat . Quid illi deeſt ad hoc, ut tamquam vera ſubſtantia & veluti ſubſtantiale effluvium, quod ipſum per ſe movetur ſine motu corporis , in quo eſt, percipiatur ? Ergo ne his tam a ratione alienis aſſentiri cogamur, concludendum eſt vim a corporis percuſſi ſuperficie tacta ad alias partes non tactas nec in inſtanti nec in tempore poſſe meare . Ex quo efficitur corpus eſſe non poſſe veram cauſſam effectricem motus alterius , etiamſi aliud ab alio contingatur .

9. Quare neceſſarium eſt , ut in communicatione motus , quam inter corpora fieri, dum aliud in aliud incurrit, in hoc mundo videmus , ad illam confugiamus cauſſam , quæ ſumta occaſione incurſus alterius in alterum vim in impacto creet , & in impingente in nihilum redigat . Ubi enim cauſſæ naturales & ſecundæ ſatis non ſunt , Philoſophi eſt primam in ſubſidium vocare. Ex quo patet quod nobis, ut oſtenderemus, propoſitum erat, virium, qua corpora ſe mutuo trahunt juxta legem ſupra explicatam , cauſſam a ſolo Deo proxime peti oportere , idque non pro libito nos comminiſci & ſine ulla ſufficienti ratione .

10. Quibus ita expoſitis , propius accedo ad id , quorſum hæc ſpectant, & leges motuum in colliſione corporum perfecte ſolidorum , qualia ſunt primitiva corpuſcula , explicare aggredior. Sint itaque primo maſſa m quieſcens $= 1$ & maſſa $M = 1$, quæ velocitate C in m directe incurrat. Velocitas C dividatur in duas partes æquales , ideoque $C = 2$, cujuſmodi eſt etiam ſumma maſſarum æqualium $M + m = 2$. Ut M pervenit ad m , & ſe in illam inſinuare incepit , quo vi motrici , qua donata eſt , obtemperet , vis attrahens utriuſque corporis in vim repellentem convertitur num. 3 , quæ impedimento eſt , quominus maſſa M in partem maſſæ m ſub ſenſus cadentem ſe inſinuet . Nam continuo vis repellens impingentis

tis M incipit aliquem velocitatis gradum communicare cum maſſa *m* quieta ſecundum directionem motus ejuſdem M, & viceverſa vis repellens maſſæ impactæ *m* incipit generare velocitatem aliquam in maſſa M in contrariam plagam, atque idcirco corrumpere partem aliquam ejus velocitatis, qua M cieri ponitur. In præſenti hypotheſi, qua ponitur M = *m*, cum hæ vires repellentes æquales ſint, fiet ut quo tempore vis repellens maſſæ impingentis M unum gradum velocitatis in impacta *m* generat, eodem vis repellens maſſæ impactæ *m* gignat æqualem in M in contrariam partem, atque idcirco ex duobus velocitatis gradibus, quibus ante conflictum eadem ferebatur, unum perimat, & alterum ideſt velocitatem = 1 relinquat. Quamobrem ubi maſſa *m* unum velocitatis gradum hoc pacto accepit, movetur ea velocitate, quæ in M reſidua eſt. Ex quo fit maſſam M ſe amplius non inſinuare in maſſam *m*, eo quod utræque eadem velocitate cientur, & ideo ab illa non repelli, nec tamen attrahi, ſed poſitam in eo puncto contactus inter vim repellentem & attractricem, in quo a nulla cietur, eo quod contrariæ vires æquales ſe ſuſtinent, tamquam unum corpus cum maſſa *m* eadem velocitate = 1, ſcilicet dimidio celeritatis ante conflictum moveri. Ex quibus fit celeritatem C ante conflictum ad celeritatem *c* poſt conflictum eſſe ut maſſam utriuſque corporis M + *m* = 2 ad maſſam ſolius impingentis M = 1, ut vult communis recepta motus lex. Qui vero hæc cum Leibnitiana virium æſtimatione concilientur, intelligemus, ſi memoria repetamus, quemadmodum corpus deſcendens, aut ab elaſtris infinitis ſe expandentibus pulſum recipit a gravitate vel a preſſione elaſtrorum primo minuto unum gradum celeritatis & vis, ſecundo vero æquali minuto alium quidem æqualem gradum celeritatis, ſed tres vis §. 184. ob rationem toties inculcatam velocioris fluxus preſſionum in eodem minuto §. 128. ita corpus velocitate = 2 aſcendens, aut in illa elaſtra expanſa incurrens ob eamdem rationem primo minuto amittere unum gradum velocitatis & tres vis, ſecundo autem unum velocitatis & unum vis. §. 188. Hinc enim intelligitur, cur vis repellens maſſæ impingentis M, cujus celeritas = 2, gignens unum gradum celeritatis in *m* unum pariter vis gradum efficiat; at vis repellens maſſæ quieſcentis *m* unum gradum velocitatis gignens in M in contrariam ipſius motui plagam, & ideo

unum

unum corrumpens in eadem M ob valde majorem velocitatem, qua fluit, tres gradus vis motricis in illa corrumpat. Ex quo fit, ut ex quatuor gradibus vis, quæ in maſſa M ante conflictum reperiebatur, duo ſolum poſt conflictum exſiſtant, unus in maſſa impacta *m* denuo genitus vi repellente maſſæ impingentis M, alter reſiduus in M aliis tribus corruptis a vi repellente maſſæ impactæ *m*. Ergo cum maſſæ ſolidæ ſunt æquales, leges communicationis motus in incurſu alius in aliam quieſcentem cum Leibnitiana virium menſura concilientur.

11. Sed ejuſdem rei periculum faciamus, cum maſſæ ſunt inæquales. Sit ergo M = 2, maſſa quieſcens *m* = 1, velocitas C maſſæ M ſit = 3, ideſt in tot æquales partes diviſa, quot colligit utraque maſſa. Cum vires attractrices ideoque & expultrices maſſis proportione reſpondeant, numero tertio, vis repellens maſſæ M erit duplo major vi repellente maſſæ *m*. Quare quo tempore illa in maſſa impacta *m* duos gradus celeritatis gignet ſecundum directionem motus, eodem hæc in impingente M unum tantum gignet & ideo ex tribus, quibus donatur, unum corrumpet. Quo facto utraque maſſa eadem velocitate = 2 moveri deprehendetur, quod in cauſſa erit, ut vires repellentes & communicatio motus ceſſent ob rationem, quæ in primo caſu fuit allata, & ita velocitas C = 3 ante conflictum ad velocitatem *c* = 2 poſt conflictum ita ſe habeat, uti maſſa utriuſque = 3 ad maſſam ſolius impingentis = 2. Atque hæc de velocitatibus; quod vero attinet ad vires, ex ſupra memoratis §. 188. num. 4. conſtat a gravitate aut ab elaſtris primo minuto gigni unum gradum velocitatis & unum vis, ſecundo unum velocitatis & tres vis, tertio unum velocitatis & 5 vis; & viceverſa ſi gravitas & elaſtra ſint contraria motui corporis, quod habeat tres gradus velocitatis & ideo 9 vis, primo minuto corrumpi unum velocitatis & quinque vis, ſecundo unum velocitatis & tres vis, tertio unum velocitatis & unum vis. Hoc poſito vis repellens maſſæ M in maſſa quieſcente *m* gignens duos velocitatis gradus quatuor efficit vis; at vis repellens maſſæ *m* in impingente unum gradum velocitatis efficiens, & ideo unum ex tribus deſtruens quinque corrumpit gradus vis, qui tamen ſunt ducendi in maſſam M = 2, ideoque 10, ſcilicet quinque in ſingulis dimidiis, in quibus unum gradum celeritatis interimit.

mit. Quare cum ante conflictum in maſſa $M = 2$ lata velocitate $C = 3$ forent in ſententia Leibnitii 18 gradus vis, ſolum 12 poſt conflictum exſiſtere debent, propterea quod denuo generantur ſolum 4 in maſſa m, & 10 corrumpuntur in M; ergo ſex extinguuntur. Id quod congruit cum ſententia Leibnitii. Nam poſt conflictum maſſa eſt $= M + m = 2 + 1 = 3$, & velocitas c eſt $= 2$, cujus quadratum $= 4$ ductum in maſſam $= 3$ dat vim $= 12$, tertia parte corrupta ob allatas rationes. Similiter res concludetur, ſi ponamus maſſam motam M pluſquam duplo majorem maſſa m; immo efficiemus cur poſita $M = 3$ & $m = 1$, $\frac{1}{4}$ vis corrumpatur, $M = 4$ & $m = 1$, ſolum $\frac{1}{5}$ vis, $M = 5$ & $m = 1$, ſolum $\frac{1}{6}$ & ita porro in infinitum. Unde poſita M infinita & $m = 1$, nulla pars vis in nihilum abibit.

12. Sit nunc e contrario $M = 1$ & $m = 2$, & celeritas C ſit $= 3$, vis repellens M erit duplo minor vi repellente m; quare quo tempore illa unum gradum velocitatis & idcirco unum vis generabit in m, ſed ducendum in 2, quia maſſa $m = 2$, & ideo duos gradus gignet, eadem hæc in M duos gradus efficiet in contrariam motui plagam, & ideo ex tribus velocitatis & novem vis, quibus M eſt prædita, duos in M velocitatis & octo vis corrumpet. Quo facto maſſæ eadem, ut patet, velocitate $= 1$ percitæ amplius ſe non repellunt nec attrahunt, ſed ſimul copulatæ moveri pergunt. Ex quibus liquet tum celeritatem $C = 3$ ante conflictum ad celeritatem $c = 1$ poſt conflictum eſſe ut $M + m = 3$ ad $M = 1$; tum $\frac{2}{3}$ vis perimi, & $\frac{1}{3}$ reſtare. Nam ex 9 gradibus 8 perimuntur in M, & duo generantur in m. Ergo ex 9 ante conflictum exſiſtunt tres, quod congruit cum Leibnitii ſententia, quia poſt conflictum maſſa $M + m$ eſt $= 3$, & velocitas eſt $= 1$. Similiter efficietur, poſitis $M = 1$ & $m = 3$, ſolum $\frac{1}{4}$ reſtare vis & $\frac{3}{4}$ corrumpi, $M = 1$ & $m = 4$, ſolum $\frac{1}{5}$ eſſe reſiduam

&

& $\frac{4}{5}$ deleri, & ita in infinitum poſitis $M = 1$ & m infinita ſolum unam infinite parvam reſtare & vires omnes corrumpi.

13. Ex quibus omnibus efficitur celeritatem poſt conflictum, quæ dicatur v, eſſe $= MC : (M + m)$: eſt enim ut maſſa utriuſque corporis $M + m$ ad maſſam M ſolius impingentis, ita celeritas C ante conflictum ad celeritatem poſt conflictum; item ante conflictum vim motricem, quæ dicatur P, eſſe $= MC^2$, & poſt conflictum vim, quæ dicatur p, eſſe $= (M + m) M^2 C^2 : (M + m)^2 = M^2 C^2 : (M + m)$

14. Quamvis autem hæc ita inter ſe bene cohæreant, ut nihil amplius, tamen illud objici poteſt ex mutua corporum attractione, quæ in diſtantia infinite parva infinita eſt, conſequens eſſe velocitatem corporis incurrentis auctum iri a vi attractrice quieti priuſquam a vi ſecundi repellente minuatur, & corpus quieſcens ante pulſum iri verſus corpus incurrens contra plagam motus a vi attractrice primi, quam ab ejuſdem vi expultrice ad motum ſecundum directionem impingentis cieatur. Id autem legibus communiter receptis & experimentis, quibus eædem confirmatæ fuerunt, adverſatur.

15. Sed facile occurri poteſt, ſi advertamus diſcrimen inter maſſam infinite parvam, interque finitam, quæ prope maximum corpus reperiatur. Nam finita primæ velocitas non ſolum utcumque augebitur, ſed etiam in infinitum, eo quod ubi ad contactum pervenerit, omnes illius particulæ a loco vis infinitæ abſunt ſolum intervallo infinite parvo. Cum autem ſe penetrare incipient, vis repellens utriuſque maſſæ utpote attractrici æqualis prius has velocitates a vi attractrice profectas corrumpet, & inde eas gignet, quas modo explicavimus: ut intelligamus poſt conflictum corpora ita moveri, quemadmodum communiter receptæ leges præſcribunt. At ſi maſſæ finitæ magnitudinis ſint, atque in vicinia maximi corporis, qualis eſt tellus, tunc vis attractrix maſſæ quieſcentis parum ſe exeret, & in valde exigua ab ipſa diſtantia, eo quod vis attractrix terræ prævalet, & alioquin particulæ utriuſque maſſæ ſemper finitum inter ſe intervallum habent, ut a vi attractrice infinita ob dicta num. 5. celeritas infinita generari non poſſit. Idem dicatur de vi attractrice motæ. Quare ſi

Digitized by Google

re ſi illæ velocitates generantur, vel ita exiguæ ſunt, vel in tam parvo intervallo & ideo tam brevi tempore durant, ut ſub ſenſus cadere nequeant. Et quæ demum cumque gignantur, vires utriuſque maſſæ repellentes eas perimunt, & inde illas, quas paulo ante diximus, gignunt. Ex quibus conficitur in hoc objecto nihil eſſe, quod cum receptis motuum legibus non optime componatur.

16. Hic unum addo ad magis explicandum id, quod num. 10. dixi de loco inter vires attrahentes & repellentes intercepto, ſi vis attrahens uſque ad aliquem locum & punctum teneat, & inde repellens incipiat, futurum eſſe punctum aliquod inter utramque interceptum, in quo viribus contrariis ſe ſuſtinentibus nulla ſe explicet, adeo ut corpus ibidem quietum manere poſſit. Cum de viribus centralibus differemus, rationem a priori trademus. Nunc illud exemplo declaramus forcipum elaſticarum, quarum brachia a contactu uſque ad certam expanſionem ſe invicem repellunt, & a certa ad majorem ſe attrahunt, in loco vero interpoſito nec repellunt nec attrahunt, ſed quieta manent. Hic autem locus in præſenti caſu eſt in contactu, a quo extrorſum attractio, introrſum repulſio dominantur.

17. Hac difficultate enodata pergamus ad alias motuum leges in corporum ſolidorum colliſione, & examinemus eventum, quo duæ maſſæ M, *m* duabus celeritatibus C, *c* directe ſibi occurrere ponantur. Et primo ſit $M = m$; quæ ubi ad contactum pervenerint & ſe intromittere cœperint, vis expultrix maſſæ M incipiet generare gradum aliquem velocitatis in maſſa *m* in contrariam directioni motus ipſius plagam, & ideo gradum corrumpere æqualem contrariæ velocitatis, qua *m* donatur & in M incurrit num. 10. & viceverſa vis expultrix maſſæ *m* idem in maſſa M præſtabit. Cum vero in hoc caſu vires expultrices ſint æquales, quo tempore vis repellens maſſæ M deſtruet totam celeritatem *c*, quæ ponatur eſſe minor C, eodem vis æqualis repellens maſſæ *m* æqualem gradum in C corrumpet. His corruptis perinde eſt, ac ſi *m* quieſcat, & M moveatur contra maſſam *m* velocitate reſidua, ideſt $C - c$; quo hic ſecundus caſus ad primum redigitur. Unde velocitas *v* poſt conflictum ſecundum directionem motus maſſæ M erit $= (MC - Mc) : (M + m)$ num. 13. & quia M eſt $= m$, erit $v = (MC - mc) : (M + m)$. Unde ſi *c* ſit $= C$, velocitas reſidua poſt conflictum nulla erit. Quod attinet ad vires, quæ perimuntur in M mota, ex.

ex. gr. celeritate $=3$ & in m lata velocitate $=1$ ajo æqualem non perimi; nam ut dixi in primo caſu, dum vis repellens maſſæ M corrumpit unicum gradum velocitatis, quæ eſt in m, & ideo etiam vim unius gradus, vis repellens maſſæ m interea corrumpens in M tertium æqualem gradum celeritatis quinque gradus vis illi reſpondentes interimit. Quare cum ante conflictum reperirentur 10 gradus vis, ideſt 9 in maſſa $M=1$ mota celeritate $=3$, & unus in $m=1$ lata velocitate $=1$, in ſola colliſione virium contrariarum amittuntur ſex, ſcilicet 5 in M, & 1 in m. Unde reſtant 4 gradus vis in ſola maſſa M, ex quibus alii duo perimuntur in communicatione motus, dum maſſa M celeritate $=2$ in maſſam m ſibi æqualem & quieſcentem incurrit num. 10. Ergo poſt integrum conflictum in utraque maſſa erunt ſolum duo gradus vis, octo aliis omnino corruptis. Quod congruit cum valore modo invento velocitatis poſt conflictum; nam cum ſit $v=(MC-mc):(M+m)$, & ideo $=2:2=1$, vis poſt conflictum in ſententia Leibnitii erit $=(MC-mc)^2 (M+m):(M+m)^2=(MC-mc)^2:(M+m)$, & ideo in præſenti caſu $=4:2=2$.

18. Quod ſi maſſæ M & m ſint inæquales, celeritates, quæ in utraque maſſa a viribus repellentibus eodem tempore perimuntur, non erunt æquales, ſed in ratione inverſa maſſarum; quia quo major eſt maſſa M, & ideo etiam vis repellens maſſæ M, eo major gradus velocitatis in altera m eodem tempore corrumpitur, quam in maſſa M a vi repellente maſſæ m. Quare cum deſtruitur tota celeritas c maſſæ m vi repellente maſſæ M, interea vi repellente maſſæ m corrumpitur in M celeritas $=\frac{mc}{M}$, quia erit $M:m=c$ ad velocitatem, quæ in M interit; & e contrario cum vi repellente maſſæ m tota deletur velocitas C in maſſa M, interea vi expultrice maſſæ M velocitas $=\frac{MC}{m}$ in maſſa m abolетur. Videndum eſt autem an $\frac{mc}{M}$ ſit minus C necne; nam in primo caſu perinde eſt, ac ſi m quieſceret tota ipſius velocitate deleta, & M velocitate $=\frac{MC-mc}{M}$ in m quieſcentem incurreret,

reret, & e contrario in ſecundo perinde foret, ac ſi m velocitate $= \frac{mc - MC}{m}$ in M quieſcentem impetum faceret. Siquidem in primo caſu penitus deſtructa velocitate maſſæ m, velocitas maſſæ M erit $= C - \frac{mc}{M} = \frac{MC - mc}{M}$; & viceverſa in ſecundo. Quo pacto hic etiam caſus ad primum redigitur, atque ideo poſt integrum conflictum velocitas v in maſſa M erit $= M(MC - mc) : M(M + m) = (MC - mc) : (M + m)$; quæ eſt formula velocitatis, quam omnes admittunt. Unde ſi celeritates ſint in ratione reciproca maſſarum, ideſt $M : m = c : C$, & ideo $MC = mc$, velocitas poſt conflictum nulla erit. In quo nihil eſt, quod cum principiis ſupra explicatis non optime cohæreat. Siquidem ſi M ſit $= 2$, & $m = 1$, & $C = 1$, & $c = 2$, quo tempore vis repellens maſſæ $m = 1$ corrumpit unum gradum celeritatis, qui eſt in M, & idcirco unum vis ducendum tamen in maſſam 2, & ideo duos vis gradus perimit, dupla vis repellens maſſæ $M = 2$ duos gradus velocitatis, & ideo 4 vis in maſſa m extinguit, idque ob rationes, quas num. 10. & 11. attulimus. Quare nihil mirum eſſe debet, ſi omni velocitate & vi motrice corrupta corpora quieſcant. Bulfingerus in citata Diſſertatione de viribus vivis, quæ exſtat priore tomo Comm. Acad. Petrop. aliquid hac in re vidit, dum corruptionis virium licet inæqualium in hypotheſi celeritatum, quæ ſint in ratione inverſa maſſarum, cauſſam ex eo derivavit, quod illæ vires eodem tempore fluunt. Sed cum hoc principium ad alios caſus traducerem, nihil colligere potui, quod ſatisfaceret, mihi adhuc ignotis iis, de quibus hic agimus, quæ perſpicuam a priori rationem ſuppeditant in quacumque hypotheſi maſſarum & celeritatum.

19. Reſtat tertius caſus corporis perfecte duri directe incurrentis in aliud verſus eamdem plagam tardius motum. Itaque maſſa M celeritate C incurrat in maſſam m, quæ verſus eamdem plagam minori velocitate c cieatur: qua parte velocitas C eſt $=$ velocitati c, maſſa M ſe non inſinuabit in m, ſed ſolum ea parte, qua C ſuperat c, ideſt ſola velocitate $= C - c$. Ex quo fit, ut quod attinet ad velocitatem utrimque æqualem, vires repellentes utriuſque ſe explicare non poſſint, nec aliquam partem velocitatis & vis aut corrumpere in M, aut in m generare, ſed

ſed hæc virium aut corruptio aut generatio fiant ſolum ratione habita velocitatis $C-c$, & perinde contingat, ac ſi maſſa m quieſceret, & M celeritate $C-c$ in illam incurreret. Quamobrem tantiſper ſepoſitis velocitatibus hinc inde æqualibus, communicatio ita fiet, ut velocitas $C-c$ ante conflictum ad velocitatem poſt conflictum ita ſe habeat, quemadmodum maſſa utriuſque corporis, ſcilicet $M+m$, ad maſſam M ſolius impingentis. Unde hæc poſt conflictum communis velocitas orta ex ea parte velocitatis, per quam maſſa M in aliam incurrit, erit $=(MC-Mc):(M+m)$ num. 13. Jam vero huic addenda eſt velocitas c, quæ in utraque maſſa incommunicata permanſit. Ergo integra velocitas communis v poſt conflictum erit $=\frac{MC-Mc}{M+m}+c$ $=\frac{MC-Mc+Mc+mc}{M+m}=\frac{MC+mc}{M+m}$, quæ eſt formula velocitatis, quam omnes admittunt.

20. Virium autem generatio & corruptio juxta expoſita principia continget; quod ut aliquo exemplo declaretur, ſint maſſæ æquales, ideſt tam M, quam $m=1$, & ideo $M+m=2$; ſit $C=4$, $c=2$, qua in hypotheſi vis maſſæ M eſt $=16$, & maſſæ $m=4$. Duo hinc inde gradus incommunicati permanent. Ex quo fit, ut perinde ſit, ac ſi m quieſceret, & M ferretur in m velocitate $=2$. Quo ergo tempore vis repellens maſſæ M generat unum gradum velocitatis in m, æqualis vis repellens maſſæ m æqualem gignit in M, & ideo corrumpit unum gradum velocitatis ex quatuor qui in M reperiuntur. Ex quo fit, ut in M ſeptem gradus vis perimantur, quia, ut ſupra adverti num. 11. in imprimendo primo gradu velocitatis vis $=1$ generatur, in ſecundo vis $=3$, in tertio vis $=5$, in quarto vis $=7$, & ita porro. Quare in maſſa M reſtat vis $=9$, cum antea foret $=16$. At dum in maſſa m jam duos velocitatis gradus & quatuor vis habente alius velocitatis gignitur gradus, quinque vis gradus excitantur. Quare in maſſa m erit vis $=9$. Ergo in utraque maſſa vis eſt $=18$. Unde ex 20 gradibus vis, qui ante conflictum in utraque reperiebantur, duo ſolum gradus intereunt. Quod optime congruit cum Leibnitiana virium æſtimatione. Nam ex ſupra dicto generali valore num. 19. velocitatis communis efficitur in hac hypotheſi velocitatem utrique maſſæ communem poſt conflictum eſſe $=6:2=3$; cumque maſſa $M+m$ ſit

ſit = 2, erit vis poſt conflictum in Leibnitii ſententia = 18. Ergo concluditur his, quæ nos commentati ſumus pro corruptione virium in impingente & generatione in impacto, cum Leibnitiana virium menſura convenire. Quæ eadem convenientia facile oſtendi poteſt in aliis maſſarum inæqualium eventibus, quos in præſentiarum omittimus, ne in re, quæ hujus loci non eſt, nimis longum faciamus.

21. Præſertim cum ex iis, quæ diſſeruimus, ſatis conſtet id, quorſum hæc ſpectant, leges motuum in colliſione corporum ſolidorum cum noſtra virium menſura componi, & nihil eſſe momenti in iis rationibus, quæ numero primo objectæ fuerunt. Nam quod attinet ad incurſum maſſæ M in quieſcentem *m*, conſtat ratio, cur aliqua pars virium perimatur, quia ſcilicet etiamſi maſſæ ſunt æquales & ideo æquali vi repellente donantur, tamen actio vis repellentis maſſæ *m* in maſſa M ob velociorem fluxum preſſionum actionem æqualis vis ſed minori velocitati fluentis maſſæ M in *m* ſuperat, idque ob eam rationem, quod illa in maſſa M ſecundum velocitatis gradum corrumpit, ad quem gignendum cum triplo major preſſionum faventium numerus, quam ad primum §. 188. num. 4. requiratur, ad eum etiam extinguendum triplo majori numero eſt opus; at hæc in maſſa *m* ſolum primum velocitatis gradum, atque ideo etiam vim = 1 progignit. In hoc autem virium, quæ ſe explicant, negotio toties adverti non eſſe attendenda ipſa ſola virium elementa ſive preſſiones, quæ poſſunt eſſe æquales, quin inter actiones & vires inde exſiſtentes æqualitas intercedat; quemadmodum longitudines duorum rectangulorum æquales eſſe queunt, quin rectangula ex eorum fluxu eodem tempore formata æqualia ſint; propterea quod alia velocitate ferri poteſt; ſed preſſionum etiam fluentium velocitates, ex quibus fit, ut ex æqualibus preſſionibus etiam æquali tempore fluentibus nunc major nunc minor actio & vis gignatur & corrumpatur, propterea quod aliæ alia velocitate fluunt. Ex quo etiam conſtat reſponſio ad difficultatem ductam ex colliſione corporum, quæ ſibi mutuo occurrunt. Numquam enim vis minor majorem perimit, ſed in occurſu ex. gr. maſſæ M = 2 latæ velocitate C = 1, & maſſæ *m* = 1 latæ velocitate *c* = 2, vis repellens maſſæ M duos velocitatis gradus deſtruens in *m* eodem tempore, ac vis repellens maſſæ *m* unum in M corrumpit, majori velocitate fluit, atque ma-

Digitized by Google

majorem actionem exercet, & majorem generat & corrumpit vim, quam vis repellens maſſæ m, quæ in M ſuas preſſiones tardius fluentes explicat. Ex quo una cum iis, quæ paulo ante explicata accurate fuerunt, elicitur hanc, quæ videbatur inenodabilis difficultas, & Carteſianos a Leibnitiana ſententia quammaxime deterrebat, ita ſolvi, ut nullus reſidere ſcrupulus poſſe & veritas in clariſſima luce poſita eſſe videatur.

22. Illud etiam efficitur tantum abeſſe, ut in omnibus naturæ phænomenis explicandis ad impulſionem alius in aliud corpus tamquam ad veram & unicam cauſſam, quæ clare intelligatur, non vero ad vires attrahentes aut repellentes tamquam ad eas, quæ potius inter occultas ſcholaſticorum qualitates numerandæ ſint, confugere oporteat, ut ipſa corporis alius in aliud incurſio ipſa per ſe nihil, quod ad mutationes attinet ſtatus, efficere poſſit ſine eorumdem corporum viribus attrahentibus & expultricibus eo ſenſu intellectis, quem explicavimus. Unde mirum mihi videtur Carteſii aſtipulatores illos ipſos, qui cum Magiſtro mordicus eam tenent ſententiam, quam invictis rationibus effeci, corpora, dum aliud in aliud impingit, eſſe ſolum cauſſas motus occaſionales, ut ajunt, unum vero Deum eſſe propriam & effectricem, cane pejus & angue ab univerſali attractione abhorrere, quæ ita explicata, ut nos volumus, ab hac ipſa ſententia neceſſario conſequitur. Verum ſpero, ubi hæc legerint, eos in gratiam redituros cum attractione, quam ut conſectarium doctrinæ, cui ſubſcribunt, recognoſcent.

23. Hic tamen ſilentio præterire non poſſunt difficultatem adverſus Nevvtonianam attractionem a Domina *du Chaſtellet* propoſitam §. 395. Inſtit. Fiſich. non quia putem ea infirmari attractionem, quatenus a me defenditur, ſed quia alii fortaſſe id poſſunt exiſtimare. Eſt autem in hoc poſita, quod mutationis corporis A ad præſentiam corporis B primum non contingentis nulla eſt ratio ſufficiens nec in ipſo corpore A, propterea quod ipſum per ſe eſt ad motum & ad quietem indifferens, nec extra corpus A, propterea quod inter A & B ponitur eſſe inane ſine ullo interpoſito corpore. Ex quo efficit neque Deum poſſe prævidere quid corpus A facturum eſſet, & deinceps ſubjungit. „ Nec dici poteſt Deum poſſe „ cognoſcere quid huic corpori eſſet eventurum in præſenti

„ hypotheſi, proptereaquod cum attractio in ſententia Nevvto-
„ nianorum ſit proprietas, quam toti materiæ Deus impreſ-
„ ſit, præſcire poſſet quid hanc proprietatem conſequi debet;
„ nam ut mittam hanc hypotheſim iis labefactari, quæ de
„ eſſentiis capite tertio docuimus, attractio corpora ſollicitat
„ certa quadam velocitate, & ſecundum certam quamdam
„ directionem; hæ autem velocitas & directio variabiles ſunt,
„ quod utræque pendent a poſitione & maſſa corporis attra-
„ hentis & a diſtantia attracti. Ergo adminiculo ſolius con-
„ templationis corporis cujuſcumque & ſola cognitione illius,
„ quod in eodem proxime Deus operatur, ſcire non poſſet
„ (dato etiam quod materiæ attractionem indiderit) quænam
„ eſſent futuræ directio & velocitas hujus corporis, cum ab
„ alio corpore attrahitur„. Hactenus Clar. Mulier, quæ impugnare videtur ſententiam aliquorum ex ſchola Nevvtonis, qui attractionem tamquam proprietatem corpori eſſentialem defendunt, non vero noſtram, qui volumus eam aliud non eſſe, quam accidentalem vim corpori A impreſſam ad præſentiam alterius B, quo primum ad ſecundum accedit, proportionalem directe maſſæ corporis attrahentis & inverſe quadrato diſtantiæ alius ab alio. Si quis tamen putet in hac ratione eſſe aliquid momenti etiam contra noſtram ſententiam, ſic occurro. Non eſt quidem extra corpus A in quodam alio corpore aut in ſubſtantia creata ratio ſufficiens, cur corpus A accedat ad B, in quo acceſſu poſita eſt, ut ſupra explicavimus, attractio, quæ a nobis defenditur; eſt tamen in Deo, qui cum ob ea, quæ hic diſputata ſunt, & etiam ob illa, quæ §. 125. num. 11. diſſeruimus, ipſe per ſe debeat creare & deſtruere vim, quæ ab alio in aliud corpus tranſire non poteſt, hanc ſibi in mundi gubernatione ſtatuit legem, ut eam in ratione compoſita ex directa maſſarum & inverſa quadrati diſtantiarum creet & perimat. Quamobrem aſſentior quidem non poſſe Deum ex ſola contemplatione eſſentiæ corporis A, prævidere quid ſit futurum in A in vicinia corporis B; nego tamen id non poſſe præſcire ex vi accidentali, quam utrique eſt impreſſurus. Nam cum futurorum prævиſio pendeat, ut Theologi docent, ex divinæ voluntatis decreto, quo ad illa creanda libere ſe determinavit, primum decrevit hanc legem condere, ut corporibus daret vim accedendi ad ſe invicem, quæ maſſis directe & quadratis diſtantiarum inverſe

reſponderet. Deinde voluit creare, verbi gratia, illa duo corpora A & B talis maſſæ, & in tali ſitu & diſtantia, ex quo prævidit futura eſſe talia corpora talis maſſæ & in tali intervallo. Inde fit, ut adminiculo prioris decreti prævideat qualem determinatam vim & quali directione præditam utrique corpori ſeorſim inditurus ſit. Ex natura vero, quantitate & directione vis quis ſanæ mentis negare poteſt Deum prævidere velocitatem & directionem utriuſque corporis, quæ in illa determinata vi ſufficientem habent rationem? Quare non eſt cogendus Deus ad prævidendum celeritatem & directionem corporis A ex ſola ejuſdem conſideratione; ſunt enim utraque corpora relate ſpectanda, ut præſciat Deus, quales velocitates & directiones utrumque ſit habiturum, propterea quod vis, unde tamquam a cauſſa illa prævifio oritur, a Deo non imprimitur corpori A abſolute ſpectato, ſed quatenus refertur ad B vicinum, & ipſius quantitas & directio ad normam maſſæ, ſitus & quadrati diſtantiæ corporis B exigitur, idemque contingit in B. Igitur ex hac ratione nihil efficitur adverſus vires attractrices & expultrices, quatenus a nobis defenduntur. Scio quidem Cl. Fœminam eſſe contradicturam, hanc attractionem, ſi in tota materia corporea reperitur, in numerum eſſentialium eſſe reponendam, proptwereaquod eſſet attributum, quod in omni corpore conſtanter obſervaretur. At moneo ſimile objectum non aliunde originem ducere, quam ex non ſatis evoluta eſſentiæ notione, & diſtinctionis præſertim inter primariam & ſubſtantialem, interque ſecundariam & accidentalem §. 22. num. 7. Nam fieri poteſt, ut aliquod prædicatum perpetuo inhæreat, non tamen ad eſſentiam pertineat rei primariam & ſubſtantialem, proptereaquod ea res poteſt conſtare ſine eodem prædicato, idemque prædicatum ſalva ſubſtantia rei abeſſe poteſt & ſeparari. Quod argumento eſt illud eſſe accidens perpetuum quidem, ſed quod ab exteriori cauſſa gigni debeat, cum a ſubſtantia rei non determinetur, & ad ſummum pertinere ad eſſentiam ſecundariam, quæ non ſolum ex ſubſtantiis, ſed etiam componitur ex accidentibus. Jam vero talem eſſe omnem vim motricem, & ideo etiam attractricem, quæ non eſt niſi vis motrix proxime a Deo creata, jam pluribus docuimus adverſus Leibnitium, Wolphium, & ipſam Dominam *Du Chaſtellet* §. 120. Ergo hæ vires attractrices atque expultrices quamquam per univerſam

materiam diffuſæ ſint, tamen inter accidentia ejuſdem numerentur oportet.

24. Hac conſtituta virium uſque ad corporis contactum attrahentium, ultra vero contactum in interiori ſubſtantia repellentium theoria, ſequitur nullam eſſe rationem, quæ Leibnitianos eo deduxit, ut corpora perfecte dura & nulli obnoxia compreſſioni partium exploderent ab hac rerum univerſitate. Nam idcirco, quemadmodum monui num. 3. corpora hujuſmodi eliminarunt, quod eorum colliſiones conciliari non poſſe crederent cum lege continuitatis, num. 1. Jam vero in noſtra ſententia facillime conciliantur. Nam corpus perfecte durum in aliud perfecte durum incurrens, per ſaltum & in inſtanti amittere non debet finitam aliquam partem velocitatis, nec corpus percuſſum eam in inſtanti & per ſaltum acquirere, quin per omnes tranſeat poſſibiles gradus infinite parvæ celeritatis. Corpus enim incurrens ubi ad contactum pervenit, non a ſubſtantia ipſa per ſe conſiderata percuſſi impeditur, quominus moveri pergat eadem velocitate, ſed ſolum a vi repellente percuſſi. Vis autem a vi contraria nequaquam perimitur in inſtanti & puncto ſpatii, ſed paulatim per aliquod tempus & ſpatium ſaltem infinite parva, ſi vis infinita ſit, ut hic ponitur. Ergo cum illa infinita vis in tota interiori ſubſtantia teneat, corpus incurrens ſe per infinite parvum ſpatiolum intra eamdem ſubſtantiam inſinuabit, & in illo omnes interpoſitos celeritatis poſſibilis gradus ante percurret, quam ab alia finita velocitate ad aliam finite minorem perveniat. Similiter percuſſum a vi repellente percutientis non per ſaltum acquirit totam illam finitam velocitatem, quam juxta leges expoſitas acquirere debet, ſed paulatim tranſeundo per omnes interceptos poſſibilium celeritatum gradus. Neque dicas tempus & ſpatia infinite parva eſſe non poſſe. Nam præterquamquod nulla ratione id oſtendi jam docuimus §. 88. & ſeq. id certum eſt ex poſita poſſibilitate vis infinitæ conſequi etiam poſſe exſtare tempuſcula, ſpatiola, & alias quantitates infinite parvas, quemadmodum §. citato feci perſpicuum. Quod ſi vis infinita eſſe non poſſit, & ideo vis repellens corporum licet maxima, tamen finita ſit, tunc multo magis lex continuitatis obſervabitur in corporum perfecte durorum incurſu, propterea quod corpus percutiens ſe per finitum, tametſi exiguum ſpatium in percuſſum inſinuabit, & hoc pacto antequam

quam ab alia ad aliam finitam velocitatem tranſeat, omnes interpoſitos, qui percipi poſſunt, velocitatum gradus percurret. Eadem ratione occurſum duorum corporum perfecte durorum, quorum celeritates ſint in ratione inverſa maſſarum cum dicta lege compones. Neque reponas motum corporum ſic ſibi occurrentium ex finito infinite parvum in inſtanti fieri, quod pariter eſt contra legem continuitatis. Nam finita velocitate ſolum infinite parvum ſpatiolum in tempuſculo abſolvitur. Jam vero motrices corporum vires ab infinitis ipſorum repellentibus viribus in tempuſculo deſtruuntur. Ergo tametſi corpora ſolum minimum ſpatiolum aliud intra alius ſubſtantiam ſe inſinuant, nihilominus ipſorum velocitates non in inſtanti minimæ fiunt, ſed paulatim extinguuntur.

25. His ſcriptis meas ad manus pervenit libellus, qui inſcribitur *Bibliotheque Impartiale &c. tom. 2. Premier Partie a Leide* 1750. in quo articulo quinto legi ſpecimen cujuſdam libri inſcripti *Eſſai de Coſmologie par M. De Maupertuis: Mens agitat molem. Æneid. l. 6.* 1750. ſine loco editionis, & paginis 173 conſtantis, & inter alia Cl. Auctorem principiis Carteſii, quod eadem motus quantitas in hac rerum univerſitate ſervatur, & Leibnitii, quod eadem virium vivarum, ſive producti ex maſſa in quadratum velocitatis, ſubſtituiſſe hoc aliud: *cum aliqua in natura mutatio fit, quantitas actionis ad hanc mutationem neceſſaria eſt minima omnium, quæ eſſe poſſunt*: & inde elicuiſſe tum leges motus corporum durorum, tum illas, quæ ad elaſtica pertinent, tum denique leges quietis, ſive æquilibrii, quod inter corpora reperitur. „ Jam vero (ſcribit auctor Bibliothecæ) uno & eodem principio hæc tria problemata reſolvere „ eſt rationem reddere omnium eorum, quæ in natura uſuveniunt, & explicationem phænomenorum ita aptam & connexam efficere, quemadmodum uſque ad præſens tempus factum non erat. Speciatim autem id eſt inter ſimpliciſſimam „ naturæ legem, qualis eſt quietis & æquilibrii, quæ multis ab „ hinc ſæculis cognita & explorata eſt, & inter leges motuum, „ quas detegere multo fuit difficilius, eam connexionem atque „ neceſſitudinem oſtendere, cujus nullum adhuc ne minimum „ quidem veſtigium fuerat obſervatum. Sed maxima hujus principii commoda, quæ illius ſuper alia dignitatem extollunt, in „ eo poſita ſunt, quod ſapientiæ plenum eſt, & ſubſtantia ſumme perfecta dignum, cuique natura ita conſtanter ſubjecta „ vide-

„ videtur, ut non ſolum in omnibus mutationibus illud obſer-
„ vet, verum etiam dum in eodem ſtatu permanet, obſervare
„ conetur. Hoc principium eſt etiam magis conſentaneum cum
„ ratione, qua Deus omnia ſibi ſubjecta ſemper tenere perci-
„ piendus eſt, propterea quod mundum relinquit in perpetua
„ neceſſitate potentiæ Conditoris, & ex ſapientiſſima hujus po-
„ tentiæ adminiſtratione neceſſario conſequitur. Leges motuum
„ inde illatæ eædem eſſe inveniuntur, quas obſervat natura; &
„ illius uſus in omnibus phænomenis mirificus eſt, in motu
„ animalium, in vegetatione plantarum, in aſtrorum revolutio-
„ nibus: id quod univerſi ſpectaculum efficit multo majus,
„ multo pulchrius, multo dignius auctore. Tunc idonea notio
„ potentiæ & ſapientiæ ſupremi Numinis haberi poteſt, non vero
„ cum judicium fit ex parva quadam particula, cujus non no-
„ vimus nec formationem, nec uſum, nec neceſſitudinem, quæ
„ illi eſt cum partibus aliis„.

26. Hactenus citatus auctor, ex cujus verbis mihi expiſcari non licet rationem, qua ex dicto minimæ actionis principio Maupertuiſius leges motuum & æquilibrii deducat, aut qua minimam actionem metiatur. Ex iis profecto, quæ de viribus vivis late diſſeruimus, actionis, qua vis viva aut generatur, aut generata corrumpitur, menſuram eſſe eamdem ac vis vivæ, atque ideo proportione reſpondere maſſæ ductæ in quadratum velocitatis, ſive eſſe æqualem producto ex preſſione in celeritatem, qua fluit, & in tempus, quo fluxus durat, §. 128. colligitur. Si vero hujus menſuræ ratio habeatur in incurſu maſſæ M latæ velocitate C in aliam *m*, vis & actio exercita erit = vi, qua corpus M ferebatur, ſi M ſit = *m*, erit minor, ſi M ſit major *m*, & denique major, ſi M ſit minor *m*. Nam ſit M = 2, C = 6, & *m* = 2. Vis ante conflictum erit = 72. Jam vero in *m* generatur velocitas C = 3, num. 10. & ideo vis = 18, in M vero corrumpitur velocitas = 3, num. 11. atque idcirco vis = 54; nam ſexto gradui celeritatis reſpondent 11 gradus vis, num. 11. quinto reſpondent 9, quarto ſeptem, qui ſimul collecti faciunt ſummam 27, hæc ducta in maſſam 2 colligit ſummam totius vis corruptæ in M = 54. Cum vero tota actio vi generatæ in *m*, quæ eſt = 18, & vi corruptæ in M, quæ eſt = 54, proportione reſpondeat, ſequitur totam vim & actionem exercitam eſſe = 72, ideſt = vi, qua ſola maſſa M ante conflictum ferebatur. Sin autem M ſit = 2, C = 6, & *m* = 1, celeritas *c* genita in *m* erit = 4, & corrupta

in

in M erit = 2, num. 10. Quare vis genita in *m* erit = 16, & vis corrupta in M erit = 40, quia 11 + 9 ductus in maſſam 2 colligit 40. Ergo tota actio exercita = 40 + 16 = 56, ideſt minor vi 72, quæ ante conflictum reperiebatur in M. Denique ſit M = 2, C = 6, *m* = 4, celeritas *c* genita in *m* erit = 2, & ideo vis generata in *m* erit = 16. Sed in M corrumpetur velocitas = 4, ideſt evaneſcent ſextus, quintus, quartus & tertius gradus velocitatis, atque ideo 32 gradus vis, qui ducti in maſſam 2 dant 64 gradus vis interemtæ. Quare tota actio exercita erit = 64 + 16, ideoque multo major vi = 72, quæ in maſſa M ante incurſum obſervabatur. Utrum vero actio ſic computata, quemadmodum ſubduci oportere ex ſuperioribus colligitur, ſit minima omnium, quæ ad eam mutationem efficiendam ſunt neceſſariæ, ideſt ut in maſſis æqualibus dimidia velocitas maneat in incurrente, & dimidia æqualis in percuſſo gignatur, definire non auſim, qua ratione methodo de maximis & minimis id inveniri queat. Profecto id certum videtur, quia ut conſtat ex dictis, perimi non poteſt in maſſa incurrente M dimidia pars velocitatis, niſi $\frac{3}{4}$ vis, quæ in illa eſt, perimantur, & in maſſa æquali non poteſt gigni æqualis dimidia, quin $\frac{1}{4}$ vis generetur. Ergo vis & actio exercita ſaltem ſit = 4 neceſſe eſt, ideoque vi, qua ſola maſſa M ante conflictum cietur.

27. Sed ut res ſe habeat de principio Maupertuiſii, puto noſtrum in iis omnibus prærogativis, quas de illo prædicat citatæ Bibliothecæ auctor, eſſe par, in aliis fortaſſe, verbo abſit invidia, præſtare. Nam quod attinet ad æquilibrii leges, quæ ex illo eliciuntur, ajo leges eaſdem ex noſtro ſua veluti ſponte oriri. Ex iis enim, quæ num. 18. & 19. diximus in hypotheſi duarum maſſarum M & *m*, quæ velocitatibus C & *c* rationem earumdem inverſam ſequentibus ſibi occurrunt, apparet ideo vires perimi, quia quo tempore vis repellens maſſæ M = 2 verbi cauſſa corrumpit velocitatem = 2 maſſæ *m* = 1 ideoque totam ejus vim motricem, eodem vis repellens maſſæ *m* velocitatem = 1 maſſæ M atque idcirco totam ejus vim perimit. Ex quo fit, ut ſi fingamus M & *m* quieſcere, & in M velocitatem = 1, in *m* velocitatem = 2, ideſt in ratione inverſa maſſarum generari debere ponamus, illæ vires

 eodem

eodem tempore generandæ ſint & quidem a Deo, quem eſſe unam cauſſam vi motrici in corpore gignendæ idoneam ſupra docuimus num. 9. Quare ſi maſſæ M & *m* ſint conjunctæ, & in M ab aliqua cauſſa generanda ſit velocitas = 1 contra maſſam *m*, in *m* autem velocitas = 2 contra maſſam M, id fieri non poteſt, niſi maſſæ ſe invicem penetrent; in penetratione autem exeritur tum vis repellens maſſæ M corrumpens velocitatem = 2 in maſſa *m*, & vis repellens maſſæ *m*, quæ velocitatem = 1 in maſſa M eodem tempore corrumpere debet. Hinc vero efficitur in neutra maſſa vim generari poſſe, quæ motum efficiat; non in M, nam ab illa cauſſa gignenda eſt velocitas = 1 contra maſſam M, & a vi repellente maſſæ *m* eodem tempore generanda eſt velocitas æqualis 1 in eadem maſſa M in contrariam partem, ideoque vires æquales in contrarias partes. Vires autem æquales & in contrarias partes in eadem maſſa gigni non poſſunt §. 125. num. 11. ſaltem quod attinet ad ipſarum motum. Ergo maſſa M omnino quieſcat neceſſe eſt. Similiter contingit in maſſa *m*, in qua eodem tempore a dicta cauſſa, & a vi repellente maſſæ M celeritas = 2 in contrarias plagas efficienda eſt. Ergo in nulla ex his maſſis vis & motus generari poſſunt. Res vero ita ſe habet in æquilibrio gravium, quæ ex extremis vectis inflexilis & omnino ſolidi ſuſpendantur. Nam maſſa gravis M = 2 ponatur in diſtantia unius pedis a puncto fixo, maſſa vero *m* in diſtantia duorum. Ob vectis ſoliditatem & punctum fixum maſſæ ita conjunctæ ſunt, ut ipſorum gravitates fluere non poſſint & vim vivam generare, quin gravitas maſſæ M, ſi ipſa prævaleret, duplo minorem velocitatem efficiat, quam gravitas maſſæ *m*, ſi pariter hæc prævaleat. Quare ſi gravitates ſe explicant, ab iis velocitates deorſum generandæ ſunt in ratione inverſa maſſarum, ideſt in maſſa M velocitas = 1, & in *m* velocitas = 2, & quidem ita directæ, ut in ſe mutuo corpora tendant non quidem proxime, ſed adminiculo ſolidi vectis, quod in præſenti negotio perinde eſt. Quare vis repellens maſſæ M ope ejuſdem vectis generare debet in *m* velocitatem = 2 ſurſum verſus eodem tempore, quo a gravitate velocitas = 2 deorſum efficienda eſt, & vis repellens maſſæ *m* gignere debet in M velocitatem = 1 eodem ipſo tempore, quo a gravitate eadem deorſum generanda eſt. Ergo nullus motus nullaque vis gignatur oportet.

28. Quo confirmatur quod citato §. 125. num. 11. ſtatuimus, in perfecto æquilibrio, quale poteſt eſſe, dum corpora perfecte

dura

dura vecti perfecte duro imponuntur, nullam exſiſtere gravitatis vim aut preſſionem. Cum enim ob leges ſibi præſcriptas attractionis & repulſionis non poſſit Deus vel minimo tempore vires gravitatis in iis duabus maſſis progenerare, quin ſimul vires contrarias & æquales ab illa attractionis & repulſionis lege profectas ſingulis attribuat; nulla eſt ratio, cur aut alterutram gignat, nulla poſita majori ratione pro una, quam pro altera, aut utramque contrariam creet, cum nihil, utpote contrariæ & æquales & ad contrarios æquales motus tendentes, efficere poſſint, & alioquin vim motricem ſine ullo motu, qui proxime ab illa efficitur, eſſe non poſſe nec quod attinet ad ſubſtantiam veriſimillimum ſit, §. citato. Quibus in majori luce ponitur quod §. 125. num. 15. diximus nullas in elaſtro, quod a corpore comprimitur, aut in gravi ſurſum projecto exſiſtere vis elaſticæ aut gravitatis preſſiones, ſed eſſe ſolum in proxima potentia ut exſiſtant, & occaſionem præbere Deo, ut in corpore projecto aut contra elaſtrum, aut ſurſum vim paulatim corrumpat, cum jam hoc loco illud planum fecerimus impetus communicationem non fieri virtute effectrice corporum incurrentium, ſed viribus attractricibus & repellentibus, quæ aliud non ſunt quam actio Dei vim in aliquo corpore aut generantis, aut genitam corrumpentis occaſione incurſus alterius.

29. Conſtat ergo leges æquilibrii gravium mira facilitate ex noſtro principio deduci. Nunc videndum foret, an leges motuum corporum elaſticorum ex eodem ſimiliter eliciantur. Sed ſi communem in hac re methodum ſequamur, facile eſt ex iis, quæ in colliſione corporum durorum uſuvenire ſtatuimus, definire quid accidat in elaſticis, proptereaquod hæc in compreſſione partium habentur uti dura, & in reſtitutione in impingente amittitur alia velocitas æqualis illi, quæ in compreſſione amiſſa eſt, in impacto autem alius imprimitur gradus velocitatis æqualis illi, qui ſimiliter in compreſſione fuit communicatus. Quare neceſſe non eſt, ut in hoc loco diutius immoremur, præſertim cum alibi de illo ſimus ex profeſſo diſputaturi, & noſtras in hanc rem prolaturi commentationes, quæ ſi hic proferrentur, nimium, quam hujus inſtituti ratio poſtulet, in longum nos ducerent. Itaque venio ad alias duas prærogativas noſtro principio cum illo, quod Maupertuiſius induxit, communes. Nam primo cum vires illæ attractrices

ctrices & expultrices, ſine quibus nulla eſt alius in aliud corporum actio, proxime a Deo creentur & conſerventur, & ſi quando opus eſt, perimantur, hinc intelligitur omnia corpora hujuſce mundi Conditoris potentiæ quammaxime ſubjici, & illius actione indeſinenter opus habere. Deinde hæc attractionis lex eſt illa eadem, quam ad innumerabilia phænomena pertinere Nevvtoniani jam oſtenderunt, quo intelligitur eam per omnes hujus rerum univerſitatis partes manare.

30. Sed veniamus ad eas, in quibus noſtrum præſtare diximus. Ac primo ſive animum advertas ad experimenta, quæ docent attractionem in omnibus materiæ particulis reperiri, num. 4. ſive ad rationem, quæ illam eſſe neceſſariam oſtendit quo aliud alius corporis ſtatum mutet, num. 9. ſive theoremata matheſeos, quæ vim attractricem uſque ad contactum in expultricem ultra contactum degenerare confirmant, num. 3. omni ex parte adeo confirmatum eſſe videtur ut nihil ex pura hypotheſi & ex arbitrio ſumi appareat. Quod ab Auctore Bibliotecæ non indicatur a Maupertuiſio factum fuiſſe circa principium, quod is invexit in Phyſicam.

31. Deinde hoc etiam excellit, quod eo poſito multa, quæ antea videbantur inexplicabilia, ita perſpicua fiunt, ut nihil amplius poſſit deſiderari. Reſiſtentiæ ſeu vis inertiæ, pro qua tamquam pro aris & focis Recentiores omnes acerrime pugnant, quamque §. 115. num. 12. me explicaturum pollicitus ſum, nullam mihi umquam claram notionem formare quivi. Nunc ea clariſſime explicata eſt num. 2, ex quo intelligitur eam eſſe poſitam in illa vi repellente, quæ in corpus ſe exerit, ubi ad contactum alterius pervenit, & ſe in ejus maſſam inſinuare contendit. Unde etiam elicitur ratio illius communis effati, quod ſine vi inertiæ & reſiſtentiæ aliud corpus in aliud non ageret, propterea quod ſi in corpore percuſſo vis repellens non foret, maſſa corporis moti ſe in illud inſinuaret, & ſine ullo prorſus impedimento ab altera ad alteram ipſius partem tranſiret. Item allatum principium in bona luce ponit, quod Phyſici tenent de reactione corporis percuſſi in corpus percutiens, propterea quod vis repellens maſſæ *m*, in quam altera maſſa M incurrit, partem aliquam vis, quæ in eadem M reperitur, corrumpit, & quidem, ut ex ſupradictis conſtat, ſemper majorem vi, quæ vi repellente maſſæ M in *m* generatur; ut verum non ſit, quod a Philoſophis ſola obſcu-

ra

ra actionis & reactionis notione utentibus communiter ſtatuitur, reactionem eſſe æqualem actioni: nec id in aliquod certum principium incurrit, proptereaquod licet maſſa percuſſa *m* aliquando ſit æqualis percutienti M, & aliquando ſit minor, in quarum altera hypotheſi vis ipſius repellens vim repellentem alterius exæquat, in altera vero etiam eſt minor, tamen mirum eſſe non debet ejuſdem multo majori velocitate fluentes preſſiones quam æquales aut etiam majores alterius num. 21. ad majorem ſummam conficiendam, atque ideo ad majorem vim generandam & corrumpendam idoneas eſſe. Ex quibus patet me quod attinet ad vim inertiæ fidem liberaſſe quam §. 115. num. 12. dedi.

32. Inter alia vero hoc noſtro principio corporum eſſentia, de qua §. 113, 114, 115 diſſeruimus, majori in luce collocatur. Nam cum octo qualitates omnibus corporibus inſitæ e Muſſchembroechio *Eſſai de Phyſiq.* tom. 1. §. 14. recenſeantur, extenſio, impenetrabilitas, vis inertiæ, gravitas, vis attractionis, potentia motus, potentia quietis, potentia figuræ, quæ tres ultimæ ab ipſo vocantur *la Mobilitè*, *la Quieſcibilitè*, *& la Figurabilitè*, id laudatum auctorem & alios ab admittenda extenſione tamquam corporum eſſentia potiſſimum deterruit, quod nulli viderent, qua ratione aliæ qualitates ab extenſione tamquam ab eſſentia orirentur. „ Sed aliis rationibus (ait Muſſchembroechius §. 16. num. 3. ut etiam adverti §. 115. num. 2.) confici poteſt extenſione nullo modo corporum eſſentiam formari. Quemadmodum enim omnes circuli & trianguli proprietates, quæ nobis perſpectæ ſunt, ex eorum natura proficiſcuntur, aut ex illa a Geometris colliguntur, & quemadmodum aliunde alias harum figurarum non cognoſcimus proprietates, quam eas, quas ex earum natura elicuimus; ita neceſſe foret, ut ex natura corporum, ſi ſemel hæc explorata fieret, omnes illorum proprietates elicere poſſemus, atque monſtrare eas ex hac natura proficiſci & originem ducere. Fac igitur corporis naturam eſſe poſitam in extenſione; peto a te, qui percipies impenetrabilitatem, vim inertiæ, mobilitatem, gravitatem & vim attractionis ab hac extenſione pendere & cum eadem eſſe copulatas. Pondera & examina quantum vis, non invenies nec minimam inter extenſionem & has proprietates neceſſitudinem. Quare extenſio naturam corporum ne-

„ qua-

„ quaquam conſtituit „ . Verum ex his , quæ conſtituta fuerunt , patet neceſſitudo, quæ inter extenſionem , & has proprietates intercedit . Nam ſi primaria corporum eſſentia conſideretur , alterum cum altero penetrari poteſt , & ſi accedat vis, qua in alterum incurrit , revera compenetratur, num. 3. Qui vero corpus extenſum impenetrabile fiat, accipe. Primum in extenſione intelligitur , cur corpus extenſum moveri poſſit . Quod enim eſt in certo loco , poteſt etiam alia loca occupare . Nam cum locus ſit corporum , quæ contingantur , ſuperficies, §. 31. relatio ad certam aliquam ſuperficiem corpori eſſe neceſſaria non poteſt, ideoque mutari quit. Quod autem eſt in certo loco, non poteſt alium occupare, niſi ſucceſſive occupet omnia intermedia. Quod autem ſucceſſive omnia intercepta loca occupare poteſt, id moveri quit . Ergo extenſum ex eo, quod extenſum eſt, poſſe moveri intelligitur . Quia vero motus eſſe non poteſt in corporibus , quin ſit aliquid abſolutum & permanens, quod ſit illius proxima cauſſa quodque dicitur vis §. 119. hinc efficitur ex eo , quod corpus poteſt moveri , concludi etiam poſſe recipere vim motricem . Ergo etiam potentia vis motricis ex extenſione per interpoſitam potentiam motus elicitur . Quod ſi ob rationes ſupra allatas in omnibus primitivis corpuſculis ponantur vires attractrices tamquam accidentia proxime a Deo in iis creata , quæ in ratione inverſa quadrati aut alterius potentiæ diſtantiarum a ſe invicem creſcant ; hinc intelligemus eſſe pariter tamquam accidentia in interiori eorum ſubſtantia vires expultrices eaſque infinitas . Ex quo efficiemus impenetrabilitatem, ideſt potentiam excludendi corpora ab interiori ſubſtantia , quæ potentia utpote pendens a vi expultrice , quæ eſt accidens corporis , erit ſolum conditionata & corporis attributum non in ſtatu proximo , ſed ſolum in aliquo ſtatu juxta ea , quæ de hiſce poſſibilitatibus conditionatis §. 22. num. 59. & ſequentibus late diſſeruimus . Et en clare explicata & ex natura extenſionis elicita impenetrabilitas corporum : quo etiam luculentius refutatur ſententia eorum , qui eſſentiam corporis in impenetrabilitate reponunt §. 113. num. 12. Quod attinet ad vim attractionis & gravitatis, quæ eſt attractio ſpecialis, liquet non ipſas prodire ab extenſione & eſſentia corporis, proptereaquod accidentia ſunt a Deo in ipſis creata, §. 119. ſed ſolum ipſarum potentiam, id quod paulo ante monſtravimus. Ex ea vero

lege

Digitized by Google

lege attractionis quomodo vis inertiæ efficiatur, jam fecimus ita perſpicuum num. 31. ut ad claram ejuſdem notionem nihil deeſſe videatur. Quemadmodum autem corpus poteſt recipere vim, ita poteſt etiam eam non habere. Unde elicitur potentia quietis, ad quam aliud nihil neceſſe eſt, niſi ut nulla in corpore vis ponatur, de quo vide quæ in hanc rem §. 119. num. 6. & ſequenti accurate tractavimus. De potentia figuræ nihil addo, cum ipſa etiam figura neceſſaria corpuſculis primitivis, & tamquam attributum illudque immutabile jam oſtenſa fuerit §. 117. num. 2. Ex quibus patet, quid reſponderi debeat ad ea, quæ a Muſſchembroechio objecta fuerunt, impenetrabilitatis videlicet & vis inertiæ, utpote quæ ſunt potentiæ conditionatæ, originem atque rationem non in ſola primaria & ſubſtantiali corpuſculorum eſſentia eſſe quærendam, ſed etiam in accidentibus, ideſt in vi motrice, attractione & repulſione §. 22. num. 56. & ſequen. harum autem virium, utpote quæ ſunt accidentia prima §. eodem num. 56. poſſibilitatem ab eſſentia, exſiſtentiam autem eſſe derivandam ab ente exteriori §. 22. num. 66. ſcilicet a Deo, propterea quod ab alio corpore in aliis tamquam a cauſſis effectricibus gigni non poſſe jam oſtendimus num. 8. Simul etiam compertum fit ex hac virium attrahentium & repellentium doctrina maximam iis, quæ ad eſſentiam & naturam corporum pertinent, lucem accedere; ut quaſi nos pœniteat tam anguſtis limitibus cum eodem Muſſchembroechio noſtram de corporum natura cognitionem circumſcripſiſſe §. 113. num. 1. ut non interiorem eſſentiam ſed ſolum eorum corticem ac ſuperficiem nobis eſſe perſpecta diceremus. Cum enim extenſio, quæ eſt primaria ipſorum eſſentia, uno & eodem tenore incedat, quid habet interior corporum ſubſtantia præter illam, quæ apparet, in longum, latum atque profundum extenſionem, & eam, quæ tot corporum proprietatibus explicandis maximo uſui eſt, ingeneratam a Deo vim repellentem? Ex quibus liquere arbitror me iis ſtetiſſe, quæ §. 113. num. 13. recepi ac promiſi, & difficultatibus Muſſchembroechii plane ſatisfeciſſe, & perfectam illam corporis notionem, quam Magnus Leibnitius §. 115. num. 1. adumbravit, ſub oculos poſuiſſe. Siquidem ex extenſione tamquam eſſentia, & ex viribus attractricibus atque motricibus tamquam primis corporum accidentibus, omnia, quæ homo requirit, quæque in motu corporum obſervantur, intulimus.

33. At enim ſi hæc ita forent, ratio omnium eorum, quæ in corporibus obſervantur, ex nobis perſpecta & explorata eorum eſſentia facillime colligeretur, quemadmodum ex natura jam explorata trianguli & circuli omnia, quæ de utroque cognita ſunt, inferuntur. Verum qui hæc objicit, nimis abutitur hac paritate, & hypotheſes ſimplices cum iis, quæ valde implicatæ ſunt, confundit. Nam ut ea mittam, quæ §. 115. num. 2. ad id reſpondi, & unum ex multis, quæ aſferri poſſent, exemplum producam, quanta felicitate non inveniuntur curvæ, in quibus incedit corpus projectum, quod ab uno tantum centro virium in ratione inverſa duplicata diſtantiarum ab eodem attrahatur? At ſolum duo ponantur hujuſmodi centra; nemo Mechanicorum ignorat magna difficultate quaſdam elici formulas differentiales, eaſque ita intricatas, ut vix ulli ſint uſui. Quod ſi tria ponerentur, difficultas quantum excreſceret? Si vero centum aut mille, eſſet problema a ſolo ſummo Geometra reſolvendum; idque non ob aliam rationem, niſi quia prima hypotheſis ſimplex eſt, aliæ nimis compoſitæ, quam ut finita hominum mens ad eas evolvendas ſufficiat. Quod ſi illorum centrorum numerum ac poſitionem ignoraremus, quis ſanæ mentis problema curvæ, in qua corpus incederet, ex eo ſolum ſperaret ſe poſſe reſolvere, quod unius centri problematibus ſatisfecit? Res perinde ſe habet in re, qua de agimus. Si datis ſolum duorum corpuſculorum maſſis, vi, qua in ſe mutuo incurrunt, & directione, proponatur ſolvendum problema, quid poſt conflictum futurum ſit, facile erit ex iis, quæ conſtituta ſunt, ſolutionem elicere. Ergo ne inde fiemus idonei ad ſolvendum problema, ſi hæc corpora in ſe incurrentia ſint 100. ſint 1000. ſint innumerabilia; preſertim ſi eorum numerus, magnitudo, figura, vis, celeritas, ſitus ac diſpoſitio nos lateant? Quid autem ſunt corpora omnia, quibus circumambimur, niſi innumerabilium congeries corpuſculorum, de quibus omnia, quæ modo enumerata ſunt, ignoramus? Quis ergo nos compellere poteſt ad horum omnium rationem ex ea, quam cognoſcimus, primitiva corporum eſſentia ejuſque primariis proprietatibus eliciendam? Ceterum in primitivis corpuſculis data vi attractrice, quæ ſit in ratione directa maſſæ & inverſa duplicata celeritatis, ſupradictæ naturæ leges & eæ maxime, quæ in colliſione corporum obſervantur, tanta facilitate,

Digitized by Google

quemadmodum conſtat ex ſuperioribus, eliciuntur, ut experimentis opus eſſe non videatur; vel ſaltem iiſdem opus non ſit niſi ad eam attractionis legem in corpuſculis ſtatuendam, propterea quod cum vis attractrix a corporum eſſentia non determinetur, neceſſe eſt ad illam inducendam confugere ad Dei voluntatem, quæ ſolum a poſteriori noſci poteſt. Quamquam & id, quod num. 2. & 3. a priori ſtatuimus, ad eam inveniendam ſufficere poteſt.

34. Sed pergamus ad alia, quæ ex noſtro principio effici poſſunt. Ac primo conſequitur divina potentia dari poſſe corporum penetrationem, ſi modo vim illam expultricem, quam ipſe in corporibus creavit, non conſervet, & interiorem corporum locum, propterea quod corpus minus cum alio compenetratum in alterius ſubſtantia tamquam in loco extenſo reciperetur. Ex quo etiam fieret, ut eo tempore, quo corpus per aliud majus tranſiret, motus ipſius explicari non poſſet per ſucceſſivum contactum partium ſuperficiei corporis alterius, quod ab eo contingeretur, ut §. 31. fecimus, ſed per ſucceſſivam cum aliis atque aliis potentialibus partibus corporis majoris percuſſi penetrationem. Et fortaſſe colligitur etiam contactum corporum in pura ſuperficie non fieri. Nam ex altera parte vis illa repellens infinita, quam in interiori ſubſtantia corporis eſſe poſuimus, impedit quidem, ne corpus vi percitum in alterius ſubſtantiam per finitum ſpatium ſe inſinuet, non vero ne per infinite parvum num. 24. ex altera vero ſicut juxta principia, quæ ſupra expoſuimus, puncta non ſunt lineæ, nec lineæ ſunt ſuperficies, nec ſuperficies ſunt corpus, ſed ſolum initium & finis ſive termini harum extenſionum, nec hujuſmodi termini ipſi per ſe ſine ſubſtantia terminata eſſe poſſunt; ita contactus in puro puncto, aut linea, aut ſuperficie non fit, ſed in iis ſolum eſt initium ac finis contactus, qui ob hanc cauſſam in interiori ſubſtantia fiat oportet, nec purum contactus initium ac finis ſine re, in qua hi termini reperiantur, ideſt ſine ipſo in eadem interiori ſubſtantia contactu eſſe queunt.

35. Quod ſi ita eſt, ut eſſe videtur, duo hinc conſequuntur, alterum eſt non omnino cum veritate conſentire, quæ §. 18. de contactu in puris punctis, lineis aut ſuperficiebus diſſeruimus, & idcirco, quæ de hiſce rebus ibi ſtatuta ſunt, vera eſſe quidem abſtracte, ut ajunt, & in eo ſenſu, ut corpora

pora

pora mathematica ita perfecta, qualia a Geometris percipiuntur, exſiſtere poſſint cum ſuis veris principiis & finibus, non autem ut hæc principia & fines deſignari aut ab alio corpore contingi queant. Alterum vero faciliorem ſuppeditari rationem, qua ſatisfaciamus illi contra noſtram de compoſitione continui ſententiam objecto ducto ex eo, quod ſphæra perfecta planum perfectum in puncto inextenſo contingit, & ſi recta ſuper plano ducatur, lineam ex punctis conſtantem deſcribit §.46. & 47. Ex dictis enim colligitur falſum eſſe quod aſſumitur de contactu in puncto inextenſo. Quare cum ſaltem per infinite exiguum ſpatium in interiorem plani ſubjecti ſubſtantiam ſe inſinuet, ſi alterum ab altera cœptum eſſe tangi ponamus, non lineam ſed verum corpus triplici dimenſione, licet duabus infinite parvis vere donatum percurret. Ex quo colligitur prorſus corruere celeberrimam hanc difficultatem, quæ ab antiquiſſimis temporibus ad hanc uſque memoriam Philoſophorum ingenia mirifice torſit.

36. Unde illud etiam colligitur aliqua ex parte corrigendam eſſe motus definitionem. Cum enim motus definitus fuerit ſucceſſiva mutatio contactus corporis in aliis atque aliis ſuperficiei alterius corporis partibus, cujus mutationis ratio in corpore moto ſit, pro illo verbo *ſuperficiei* hoc aliud *interioris ſubſtantiæ* ponendum eſſe ex dictis conficitur. Ex quo etiam fit dari poſſe interiorem locum, in quo corpora exſiſtant, ſcilicet corpus majus eſſe intimum locum minoris, quod cum eo compenetretur §. 31.

37. Quoniam vero prima noſtra pro virium æſtimatione ratio ducta fuit §.127. ex obliquo incurſu corporis duri in planum immobile pariter durum, & ex legibus in eodem obſervatis, quatenus a poſteriori cognitæ & a Phyſicis admiſſæ ponebantur, operæ pretium me facturum arbitror, ſi ex iiſdem legibus in gratiam ejuſdem virium menſuræ nunc a priori demonſtratis eam rationem luculentius confirmem. Quod ita exſequor. Planum immobile aliud non eſt, quam corpus ita magnum, ut partibus vere vel ſaltem phyſice infinitis ſuperet corpus, quod in ipſum incurrit. Siquidem omne corpus finitum ab alio finita velocitate moveri poteſt. Jam vero cum maſſa finita M in infinitam *m* quieſcentem directe incurrit, vis hujus repellens totam perimit velocitatem, atque idcirco vim motricem maſſæ incurrentis M num. 12. Nam quo tempore

pore infinita vis repellens finitæ impingentis M velocitatem infinite parvam gignit in infinita impacta *m*, eodem infinities infinita repellens *m* totam finitam velocitatem, atque ideo vim maſſæ M omnino corrumpit. Ex quo colligitur vim repellentem maſſæ infinitæ in corruptione impendi illius vis, quæ in impingente M reperitur. Hoc poſito cum maſſa M oblique in planum *m* incurrit, non ſe inſinuat in interiorem maſſæ *m* ſubſtantiam, niſi ſecundum directionem ad planum perpendicularem, & ideo niſi per velocitatem, quæ ſecundum eam directionem eſt, non vero ſecundum directionem & velocitates, quæ a plano æquidiſtent. Quare quod attinet ad vim repellentem maſſæ infinitæ *m*, quæ ſe exerit, ſimul ac maſſa M in illam ſe inſinuare contendit, num. 12. perinde eſt ac ſi maſſa M ea ſola velocitate, quæ perpendiculo reſpondet, in planum *m* incurreret. Ergo vis repellens infinitæ maſſæ *m* totam illam velocitatem perpendicularem & vim motricem, quæ ipſam gignit, corrumpet. Velocitas autem ſecundum rectam plano parallelam & vis eidem reſpondens in corpore permanebunt. Cum autem tam vis, quæ corrumpitur, quam ea, quæ reſtat, antea forent in maſſa M, hinc efficeretur in ſententia Carteſii ſummam ex vi, quæ corrupta fuit, & ex vi, quæ permanſit, eſſe majorem vi, quæ ante incurſum in M reperiebatur; immo ſi plana obliqua infinita ponantur, vires omnes corruptas cum ea, quæ in ultimo reſidua eſt, eſſe infinities majores illa, qua maſſa M antea donabatur; in ſententia vero Leibnitii ſemper uſuvenire quod ratio poſcit, ut ſumma ex viribus omnibus, quæ peremtæ fuerunt, & ex vi, quæ permanſit, eam, qua maſſa impingens ante incurſum ferebatur, exæquet. Cum vero alterum ab omni ratione abhorreat, alterum autem, cum ea mire conſentiat; hinc a priori confirmatur ea noſtra ratio, quam pro Leibnitii ſententia contra Carteſianos eo loci deduximus. Niſi quod hic paulo aliter contorquetur. Nam ibi vim in eo faciebam, quod globus cum plano communicare non poteſt vim majorem illa, quæ in ipſo eſt, præſertim in infinitum, amplexatus communem Philoſophorum notionem tranſitus vis ab impingente in impactum; hoc vero loci ea notione diligentius examinata & correcta momentum illius rationis poſitum eſſe puto in hoc alio, quod vis in impingente deſtructa ab impacti repellente vi major præſertim in infinitum eſſe non poteſt illa, quæ in

eodem ante incurſum reperiebatur. Ex quo efficitur ex legibus colliſionis corporum perfecte durorum, quatenus a priori nunc conſtitutæ fuerunt, bene concludi vim corporum motricem eſſe in ratione quadrati velocitatis, non autem in ratione ſimplicis velocitatis, ut Carteſiani contendunt.

38. Similiter non erit abs re planum facere, quam habeat vim ratio ducta, §.128.& alibi ab actione elaſtrorum in corpora, & ab actione corporum in elaſtra. Iis enim locis ſemper poſuimus vim ab elaſtris in corpora, quæ ab iiſdem pelluntur, tranſmitti, & ex quantitate preſſionis tranſmiſſæ, celeritatis, qua tranſmittitur, & temporis, quo hic tranſitus durat, vim motricem ad Leibnitii menſuram eſſe exigendam collegimus. Cum autem vires ab alio in aliud corpus migrare non poſſe hic oſtenderimus, ratio a nobis non bene fuiſſe concluſa videri poteſt. Verum enim vero, ſi virium transfuſionem eo ſenſu intelligas, ut vi expultrice elaſtri vis in corpore generetur, & vi repellente corporis motus elaſtri retardetur, omnia, quæ diſputata ſunt, recte concludi videbis. Ut unum ex multis exemplis hic proferam, ſit elaſtrum AB (*Fig.* 33.) ſex elaſtris invicem copulatis conſtans, quod clauſum intellige inter duo corpora $A=2$ & $B=1$ & ſe dilatare contendens. Quia duo brachia ſe in illa corpora inſinuare conantur, exſiſtent quatuor vires expultrices duæ in elaſtro AB ad extrema prorſus æquales, aliæ duæ in maſſis, altera altera duplo major ob majorem maſſam A. Vis autem repellens extremi A generabit in maſſa $A=2$ duplo minorem velocitatem, quam æqualis vis repellens extremi B in maſſa $B=1$. Item vis repellens maſſæ A, utpote duplo major vi repellente maſſæ B, duplo plus retardabit motum extremi A, quod cum ea conjunctum eſt. Ex quo fiet, ut verſus A duplo minor numerus elaſtrorum ſe explicet, quam verſus B, ſcilicet illorſum duo ſe expandant, verſus autem B quatuor. Quare preſſiones a vi repellente extremi B generatæ duplo majori velocitate fluent, quam illæ, quæ ab extremo A progignuntur. Nam ingreſſus extremi B in maſſam B, qui motu efficitur, eſt cauſſa, cur vis repellens ejuſdem extremi ſe exerat, num. 3.& 10. Ergo quo major & celerior erit ingreſſus, eo vis repellens magis atque celerius ſe exeret, majoremque preſſionum ſummam atque ideo vim motricem eodem tempore generabit. Cum itaque ex iis, quæ citato loco explicata

plicata ſunt, etiam tempora, quibus æquales extremorum preſſiones ſe explicant, ſint æqualia; ſequitur in maſſa B duplo majorem vim, quam in A generari; id quod Leibnitiana virium æſtimatio requirit. Similiter res confici poteſt ex aliis eventibus, qui citato loco & alibi fuerunt expenſi. Sed univerſim illud adverto, ſi pro vi, qua elaſtra ſe exerunt, vim ipſorum repellentem, & pro vi, quam maſſæ recipiunt, vim repellentem maſſarum, quæ elaſtrorum motum retardat, ſubſtituas, omnes rationes ibi concluſas ſuam obtinere vim obſervabis.

39. Hactenus poſuimus omnia corpora ſe invicem trahere in ratione inverſa quadrati diſtantiarum a ſemetipſis, & leges colliſionis corporum ex hac hypotheſi eruimus. At plurima experimenta ſub oculos ponunt vires potius repellentes in quibuſdam corporibus reperiri. Qui ergo receptæ colliſionis corporum leges in eadem obſervabuntur? Tunc enim in contactu vis repellens in attrahentem converteret, num. 3. Ergo tantum abeſſet, ut hæc vis impenetrabilitatem efficeret corporum, ut potius ipſorum penetrationem juvaret. Nec enim vis repellens, quæ in minima diſtantia a contactu infinita fieret, efficere poſſet, quominus corpus vi finita percitum uſque ad alterius contactum perveniret. Nam vis illa infinita quidem foret in intenſione, ſed infinite parva ratione habita extenſionis & magnitudinis infinite parvæ particularum, ut num. 5. quod attinet ad vim attractricem, explicavimus. Quare vis corporis infinite quidem minor in intenſione, ſed infinite major in extenſione & magnitudine particularum, quæ illa donantur, cum eadem conferri eamdemque ſuperare poteſt. Igitur impedire non poſſet contactum atque idcirco penetrationem.

40. Quibus primum reſpondeo experimentis non ita facile poſſe probari veram & abſolutam corporum vim expultricem. Nam idcirco duo corpora ſe invicem repellere poſſunt, quia primum ex iis majori vi trahit ad ſe tertium quoddam, quicum conjungitur ſecundum, quam ipſum ſecundum alliciat. In quo eventu ex notis legibus gravium, quæ licet abſolute levia non ſunt, tamen quia minus gravia ſunt quam aqua, ab aqua ſurſum emergunt, & a terra, quæ majori vi trahit aquam, quodammodo repelluntur, facile inferri poteſt ſecundum corpus a primo repelli debere, tametſi non ſit in iiſdem

niſi abſoluta vis attractionis. Quod vero in pluribus res ita ſe habeat, patet ex multis, quæ a Boeravio in excellenti Chemiæ libro referuntur, experimentis, & præſertim ex iis, quæ circa ſal alchali facta ſunt; hoc enim trahit alcoholem & alia olea, trahit aquam, trahit ſpiritus & ſales acidos, ſi hæc corpora in vicinia ſalis alchali ſeorſim ponantur. At ſi oleum copuletur cum aqua, a ſale alchali trahitur aqua, & oleum expellitur; ſi aqua cum ſalibus acidis, ſal acidum allicitur, & aqua repellitur; ſi unum ſal acidum cum alio pariter ſale acido, ad ſe rapit primum & ſecundum diſpellit. Utrum vero id in omnibus ſimilibus experimentis contingat, non auſim hic definire, propterea quod hac de re mihi in alium locum integrum ſervo. Interim ſiquis aliquid amplius deſiderat, legat notas auctoris illius, quem in quæſtione de vacuo laudavimus, ad primum tomum editionis latinæ Elementorum Phyſicæ Muſſchenbroechii. Is enim hanc rem ex profeſſo examinat, & nullam eſſe in corporibus abſolutam vim repellentem monſtrare conatur.

41. Ceterum etſi quibuſdam in corporibus hæc foret abſoluta vis repellens, tamen leges motuum in corporum colliſione necnon impenetrabilitatem, niſi mea me fallit opinio, inde inferre poſſemus. Nam ubi corpus impingens ad infinite parvam a corpore impingendo diſtantiam pervenit, infinita vis repellens maſſæ impingentis M incipit ſollicitare maſſam *m* eamque movere, & vis pariter infinita maſſæ impingendæ *m* incipit retardare motum maſſæ M. Jam vero infinita vis in tempuſculo in corpore quieſcente velocitatem finitam generat, & in moto finitam corrumpit. Ergo viribus repellentibus ita retardatur motus incurrentis, & augetur impacti, ut ante eadem velocitate ferantur, quam primum in ſecundum ſe inſinuet, itaque alterum ab altero alliciatur. Siquidem corpus velocitate finita percitum non poteſt, niſi infinite parvum peragrare ſpatiolum, quod inter utrumque corpus interpoſitum eſt, in illo eodem tempuſculo, in quo aliud corpus ab alio vi infinita indeſinenter repellitur. Ex quo efficitur non poſſe perveniri ad contactum, atque ideo nec ad corporum compenetrationem.

42. Quamobrem puto hanc fieri non poſſe niſi in corporibus, quæ omni vi ſive attractrice ſive expultrice forent ſpoliata. Utrum vero hæc corpora dentur, quis affirmare audeat,

cum

Digitized by Google

cum omnia, quæ in ſenſus incurrunt, penetrationi reſiſtere videamus? Ceterum ſi conjecturis eſt locus, hujuſmodi eſſe viderentur corpuſcula, quæ magnes emittit, & quibus allicit ferrum, ſi modo corpuſculis, ut Carteſiani volunt, utitur magnes ad id efficiendum. Nam pluribus experimentis a Muſſchenbroechio inſtitutis a meque repetitis compertum ſit, ſi inter magnetem & ferrum quodcumque aliud vel denſiſſimum & valde craſſum corpus interponatur, ferrum a magnete perinde trahi, ac ſi ſolus aer interjectus foret. Quod argumento eſt ea corpuſcula ne minimum quidem obicis offendere, dum per corpora trajiciuntur, contraquam contingit in omnibus aliis effectis, quæ virtute corpuſculorum effluentium perfici ſolent; ſiquidem horum vis aut prorſus deletur, aut ſaltem retunditur. Id autem evincit magnetica effluvia non pervadere ſolos corporum meatus, qui alii in aliis corporibus ſunt, ſed etiam interiorem ipſorum ſubſtantiam, quin aliquid impedimenti inde accipiant. Unde conſequitur eadem effluvia ab aliis corporibus neque attrahi neque repelli. Sed hæc tamquam meram conjecturam accipi volo.

43. His ſcriptis meas ad manus pervenit tomus ſecundus *Mem. de l'Acad. Roy. de Berlin*, in quo legi ſupra laudatam Diſſertationem Maupertuiſii inſcriptam *Le Loix du Mouvement & du Repos deduites d'un Principe Metaphyſique*, & ſimul ad aures pervenerunt turbæ, quas in Germania præſertim civit inde orta controverſia circa primum illius principii auctorem. Quod attinet ad ſecundum, neminem puto ægre laturum, ſi meum nolim interponere judicium; quod vero ad primum, operæ pretium arbitror ſumma ejus capita hic exſcribere, propterea quod illi cum Leibnitiana virium æſtimatione quammaxime convenit. Primum itaque is tamquam certum & exploratum ponit quantitatem actionis eſſe productum ex maſſa in velocitatem & in ſpatium, quod ab ea maſſa percurritur. Deinde ſtatuit maſſam A moveri velocitate a, maſſam B velocitate b verſus eamdem partem ſed tardius, velocitatem autem communem poſt conflictum eſſe $x < a$, & $> b$. Quibus poſitis ſic rationem concludit. Mutatio in eo poſita eſt, quod quæ maſſa prius ferebatur velocitate a, & ideo ſpatium a velocitati proportione reſpondens dato tempore conficiebat, eadem poſt conflictum cietur velocitate x, & eodem tempore ſpatium x abſolvit. Res ſimiliter ſe habet in B. Ergo mutatio eadem

Digitized by Google

prorſus foret, ac ſi A retro ferretur ſuper planum immateriale velocitate $a - x$ per ſpatium $a - x$, ideſt illa, quam exprimit differentia inter majorem priſtinam velocitatem a, & minorem x, quæ ſupervenit, & B ante proceſſiſſet ſuper planum pariter immateriale, quod motum fuiſſet velocitate $x - b$ per ſpatium $x - b$. Quare in utroque caſu quantitates actionum erunt $A(a-x)^2$ & $B(x-b)^2$, ideſt $Aa^2 - 2Aax + Ax^2 + Bx^2 - 2Bbx + Bb^2$ erit aliquod minimum, ſi in motus communicatione illud ſervatur principium minimæ actionis, de quo num. 25. verba fecimus. Unde ſi hanc æquationem differentiamus, erit

$$-2Aadx + 2Axdx + 2Bxdx - 2Bbdx = 0.$$ Ex quo elicitur $$x = (Aa + Bb) : (A + B)$$
quæ eſt eadem velocitatis formula ac ea, quam ſupra elicuimus cum communi Recentiorum ſententia.

Quod ſi velocitas b ſit contraria velocitati a, tunc erit
$$x = (Aa - Bb) : (A + B)$$
& ſi maſſa B quieſcat & ideo $b = 0$, erit
$$x = Aa : (A + B)$$
& tandem ſi maſſa B quieſcens ponatur eſſe infinita atque ideo immobilis, ob numeratorem Aa finitum & denominatorem B infinitum erit velocitas $x = 0$. Quæ omnia cum notis motuum legibus in colliſione corporum durorum conveniunt. Ergo ex dato minimæ actionis principio receptæ omnium calculo motuum leges in corporibus duris mirifice derivantur.

44. Hæc autem cum Leibnitiana virium æſtimatione congruere nemo non videt conſequi ex eo, quod aſſumtum fuit de æqualitate inter actionem & productum ex maſſa in velocitatem & ſpatium. Cum enim velocitas hic ponatur æquabilis, & ideo ſpatium dato tempore confectum in ejuſdem velocitatis ratione, perinde eſt ac ſi Maupertuiſius aſſumſiſſet actionem eſſe = producto ex maſſa in quadratum velocitatis, quemadmodum Leibnitius contendit. Si autem actio hoc productum exæquat, etiam vis, quæ illi proportione reſpondet, idem productum exaquet neceſſe eſt. Sed de æqualitate inter vim & actionem, & inter actionem atque illud productum præter ea, quæ jam in ſuperioribus diſputata ſunt, alia etiam exquiſitiora in poſterum afferentur.

45. Verum enim vero hic advertere juvat diſcrimen inter hanc methodum eliciendi motus leges in colliſione corporum per-

perfecte durorum, & inter eam, quam ſupra uſurpavimus, ne quis noſtram ſupervacaneam eſſe arbitretur. Videlicet noſtra methodus communicationis motus leges ex ipſamet cauſſa effectrice motus, ideſt ex viribus attractricibus atque expultricibus derivat, & ſub oculos ſubjicit modum, quo maſſa percutiens motum in percuſſa gignit, & percuſſa in percutiente corrumpit, & quantitatem vis, quæ in utraque aut generanda aut extinguenda eſt. Maupertuiſiana vero affert rationem ab actione minima derivatam, quæ Deum movet ad has potius leges, quam ad alias ſumma ſapientia ſibimet præſcribendas in eadem motus communicatione, nullis indicatis viribus, quibus Naturæ auctor ad eas obtinendas utitur, nec modo, quo hæ vires operantur. Ex quo colligitur tantum abeſſe, ut noſtra ſupervacanea ſit, ut dubium eſſe non poſſit utra præſtet. Si enim animum advertas ad certitudinem, noſtra innititur viribus, quæ ſub oculos cadunt, cum Maupertuiſiana nitatur fine, quem ſibi Deus in mundi gubernatione propoſuit, ex aliquibus ſolum convenientibus cauſſis derivato. Præterquamquod ex illa jam conſtituta certius colligi poterunt, quæ in altera aſſumuntur. Cum enim ex noſtra methodo conficiatur idem velocitatis valor, qui ex principio minimæ actionis elicitus fuit, hoc principium a Deo ſervari in motus communicatione conſequitur.

46. Quæ omnia valent etiam in corporum æquilibrium, quod ex ſua methodo ſic auctor deducit. Longitudo vectis ſit $= c$, maſſæ corporum hinc inde ex extremis appenſæ ſint A & B, diſtantia corporis A a puncto æquilibrii ſit z; diſtantia corporis B ab eodem erit $c - z$. Cum arcus deſcripti a corporibus, ſi ponatur vectis rotare circa dictum punctum, ſint in ratione z & $c - z$, atque idcirco velocitates iis arcubus proportione reſpondentes eamdem rationem ſequantur; actio corporis A erit $= Az^2$, & actio corporis $B = B(c - z)^2$. Quare ſumma actionum ideſt $Az^2 + Bc^2 - 2Bcz + Bz^2$ erit minimum. Ergo differentiando $2Azdz - 2Bcdz + 2Bzdz = 0$; unde efficitur $z = Bc : (A + B)$, ſive

$$z : c = B : A + B, \&$$
$$z : c - z = B : A + B - B, \text{ ideſt}$$
$$z : c - z = B : A$$

ſive diſtantiæ corporum a puncto æquilibrii ſunt in ratione inverſa maſſarum, quæ eſt communis æquilibrii lex.

CAPUT SEPTIMUM.

De objectis, quæ ex colliſione corporum elaſticorum adverſus Leibnitii ſententiam ducuntur.

§. 202. Objectio & Reſponſio

QUibus ita conſtitutis, & ſublata præcipua contra Leibnitii ſententiam difficultate, res in Leibnitiano Syſtemate ſatis commode conſtituta foret, ſi eodem poſito fieret, ut in colliſione corporum elaſticorum eamdem virium quantitatem ante & poſt conflictum haberemus. At id nequaquam uſuvenit. Immo doctus quidam auctor in Diſſertatione paucis ab hinc annis edita pro Carteſii ſententia probat vires in infinitum augeri, ſi Leibnitii menſuram teneamus, & hac de cauſſa potiſſimum eam explodi oportere contendit. Sic autem ratio ab homine concluditur.

Prendaſi un quadrato AC (*Fig.* 38.), *e prolonghinſi i lati* . . . . . . *in* F, *ed* L, *talchè ſia* AF = AL = AD = AB; *indi condotta la retta* LF, *per* AC *ſi tiri la retta* EAC. *Siano pertanto tre corpi elaſtici eguali* A, F, L, *e vengano i corpi* F, L *ad urtar nel medeſimo iſtante il corpo* A *colle direzioni e velocità* LA, FA. *Che avverrà perciò dopo l'urto? Concioſſiacchè il moto del corpo* F *ſia compoſto de' due moti collaterali* EF, EA, *e il moto del corpo* L *de' due* EA, EL; *opponendoſi i due moti* EF, EL *fra di loro, ed eſſendo la direzione de' moti* EA *ſecondo la direzione* AC, *per cui dee moverſi il corpo* A *dopo l'urto ſecondo le leggi della meccanica univerſalmente ricevute; egli è evidente, che nel punto* A *naſceranno tre colliſioni; una con cui il corpo* F *urterà il corpo* A *colla velocità* EA; *l'altra con cui il corpo* L *urterà lo ſteſſo corpo* A *colla velocità* EA; *la terza, con cui i corpi* F, L *ſi collideranno ſcambievolmente colle velocità* EL, EF. *Quindi è manifeſto, che i corpi* E, L *comunicheranno al corpo* A *inſieme la velocità* 2AE = AC, *e dopo l'urto ſi rifletteranno per le rette* AN, *e la oppoſta eguali alle* FE, EL *colle velocità* EF, EL. *Poſto queſto veniamo a conſiderare la quantità delle forze de' corpi* F, L, A *tanto avanti l'urto quanto dopo nell' ipoteſi Leibniziana. Poichè in queſta ipoteſi le forze vive ſono come i quadrati delle velocità (quando ſieno eguali le maſſe) ſarà la forza del corpo* F *avanti l'urto* $= FE^2 + EA^2$; *e quelle del corpo* $L = LE^2 + EA^2$; *e però la*

la ſomma $= 2\,AE^2 + LE^2 + FE^2$ *; oppure eſſendo* $FE = EL = AE$, *la ſomma delle forze de' corpi* F, L *avanti l'urto* $= 4\,AE^2$. *Dopo l'urto la velocità del corpo* $A = AC = 2\,AE$ *; e perciò la forza viva* $= 4\,AE^2$, *ed eſſendo le velocità de' corpi* F, L *dopo l'urto* EF, EL, *o ſia* AE, AE, *la forza viva tanto del corpo* F, *quanto del corpo* $L = AE^2$, *e la ſomma però delle forze vive de' corpi* F, $L = 2\,AE^2$ *; la qual ſomma aggiunta alla ſomma* $4\,AE^2$ *del corpo* A, *fa la ſomma* $6\,AE^2$. *Ma avanti l'urto la ſomma di tutta la forza* $4\,AE^2$, *come ſi è dimoſtrato ; dunque abbiamo guadagnato la forza* $2\,AE^2$. *Che ſe nel punto* C *s'innalzi la perpendicolare* $CH = CA$, *e ſi ſuppongano ne' punti* C *ed* H *due altri corpi elaſtici, ciaſcheduno de' quali ſia* $= A$ *; nel modo ſteſſo ſi dimoſtrerà, che urtando nel medeſimo iſtante i corpi* A, H *nel corpo* C, *dopo l'urto s'averà guadagnato la forza* $4\,AE^2$, *talchè continuandoſi il raziocinio nel modo ſteſſo, ſi farà finalmente vedere, che la forza viva, che ſi può andar guadagnando, creſce ſecondo la progreſſione Geometrica de' numeri* 2, 4, 8, 16 *; ciò che repugna ancor pel Leibnizio.... Io ſo che uno Scrittore aſſai celebre in una Diſſertazione, che negli Atti d'una Accademia ha pubblicato a favor del Leibnizio, dice, che nel caſo noſtro i due corpi* F, L *dopo l'urto reſteranno in quiete. Ma in ciò quanto egli ſia lungi dal vero è manifeſto dalla dimoſtrazione addotta* (§. 2.) *e ſi prova così* (§. 3.) *I corpi* F, L, *che anno le forze* AE^2, AE^2, EF^2, EL^2, *comunicano al corpo* A *le forze* AE^2, AE^2*; dunque ritengono per ſe le forze* EF^2, EL^2*; e perciò dovendo colliderſi con eſſe, con eſſe doveranno ancora dopo l'urto rifletterſi ; onde non ſi rimarranno in quiete.*

Hactenus laudatus auctor, qui deinde ope analyſis invenit duas ſphæras æquales non ſolum maſſa ſed etiam volumine, quæ in tertiam æqualis quidem maſſæ ſed majoris voluminis eodem incurrant inſtanti, quo ſibi viciſſim occurrunt.

2. Verum ad id obtinendum tanto molimine opus non eſt. Intelligantur enim duo quadrata æqualia DEGQ (*Fig.* 39.) & QGLM, adeo ut ſit $DQ = DE = DM$, tametſi ſchema id non exhibeat, & duo parallelogramma æqualia ACDB, PMNO, ſed ſolida & elaſtica & poſita in eo loco, quem ſchema exhibet, in tertium æquale & elaſticum IKH pariter conſtitutum in eo loco, quem ſchema ſubjicit oculis, incurrant æquali velocitate ſecundum diagonales DG, MG, adeo ut punctum A ſemper in recta ADG & punctum O ſemper in re-

cta OMG incedat. Quo pacto duo corpora ACDB, PMNO eodem inſtanti ſibi mutuo occurrent ſecundum rectas BD, PM, & in quieſcens IKH incurrent ſecundum rectas CD, MN. Singulæ maſſæ dicantur m. Unde ſola maſſa impingens erit $= 2m$, & maſſa corporis icti $= m$. Recta $DE = QG = DQ = ML = GL$ dicatur C; erit $DG = MG = C\surd 2$. His poſitis vis maſſæ ACDB ante conflictum erit in Leibnitii ſententia $= 2mC^2$, & æqualis etiam erit vis maſſæ PMNO; ideoque tota vis ante conflictum erit $= 4mC^2$.

3. Videamus nunc quænam in ſingulis tribus maſſis vis exſiſtat ex colliſione, quo hanc cum illa comparantes, utrum augeatur, an vero eadem perſtet, noſcamus. Hic perinde eſt ac ſi corpus elaſticum duplæ maſſæ incurrat in corpus ſimplæ IKH velocitate $QG = C$; illud, quia duo corpora æqualia ACDB, PMNO ſimul juncta perinde, ac ſi unum forent, eadem velocitate in tertium IKH incidunt; hoc, quia ſecundum directiones & velocitates DQ, MQ duo corpora nihil efficiunt in tertio, ſed ſolum aliud agit in aliud, de quo poſtea. Quare maſſa impingentis erit $2m$, celeritas C, & maſſa impacti m. Ergo velocitas poſt conflictum in corpore impacto IKH erit $= \frac{4mC}{3m}$ §. 574. Elem. Mech. Wolphii $= \frac{4C}{3}$. In corpore vero impingente ſecundum eamdem directionem QSR ex eodem Wolphio citato loco erit $= \frac{2mC - mC}{3m} = \frac{1C}{3}$. Sit $GR = \frac{1}{3}C$. Quare quælibet ex duabus maſſis impingentibus ACDB, PMNO amiſſa aliqua parte velocitatis QG retinebit ſolum velocitatem GR ſecundum eamdem directionem ad corpus impactum perpendicularem. Cum vero eædem duæ maſſæ tamquam duo elaſtica æqualia invicem recta confligant ſecundum directiones & velocitates DQ, MQ, ſive EG & LG æquales & omnino contrarias, ſingulæ poſt conflictum reſilient iiſdem velocitatibus C ſecundum directiones GL, $GE = C$. Cum vero habeant etiam velocitatem perpendicularem $GR = \frac{1C}{3}$,

per-

perfectis rectangulis GRTE, GRSL percurrent ſuas quæque diagonales GT, GS iis velocitatibus, quæ iiſdem reſpondent; eſt autem $GS = \sqrt{(GR^2 + GL^2)} = \sqrt{(\frac{1}{9}C^2 + C^2)} = C\sqrt{(\frac{1}{9} + 1)} = C\sqrt{(\frac{1+9}{9})} = C\sqrt{\frac{10}{9}}$. Ergo ſingulæ maſſæ impingentes poſt conflictum hac velocitate ciebuntur $= C\sqrt{\frac{10}{9}}$ Unde conſequitur in ſententia Leibnitii vim corporis ACDB poſt conflictum ſecundum rectam GT eſſe $= \frac{10}{9} m\,C^2$, item vim maſſæ PMNO ſecundum rectam GS eſſe $= 10\,m\,C^2 : 9$, vim vero corporis icti IKH ſecundum rectam QGR eſſe $= 16\,m\,C^2 : 9$. Quare tota vis ex his tribus conflata poſt conflictum erit $= (20\,m\,C^2 + 16\,m\,C^2) : 9 = 4\,m\,C^2$ prorſus eadem, ac ante conflictum.

4. Quæ cum ex notis legibus colliſionis corporum elaſticorum adeo luculenter concluſa ſint, aliquod a veritate alienum irrepſiſſe in rationem ab auctore concluſam evincunt. Quo id ſub oculos ponamus, diſtinguendum eſt inter hypotheſim ejuſdem duarum ſphærarum volumine & maſſa æqualium, quæ quo inſtanti ſibi viciſſim occurrunt, & in tertiam incidunt æqualis maſſæ, ſed voluminis tanto majoris, quantum indicat valor inventus, interque hypotheſim duarum æqualium volumine & maſſa in tertiam tam volumine quam maſſa ſingulis primis æqualem incurrentium. Nam in prima res perinde ſe habet, ac in ea, quam nos expendimus, ut patet. Quare dicta $EA = C$ (*Fig.* 38.) ſphæræ impactæ velocitas poſt conflictum erit $= 4\,EA : 3 = 4\,C : 3$, ut ſupra ex legibus colliſionum corporum elaſticorum eruimus, non $= 2\,EA = 2\,C$, ut ponit auctor eo nixus, ut mihi videtur, principio, quod cum ſingulæ maſſæ percutientes gignant in æquali maſſa percuſſa velocitatem AE, ſive C, ut ex iiſdem colliſionum legibus efficitur, ſimul incurrentes duplam AE efficere debeant. Id quod falſum eſſe eædem leges commonſtrant. Quod vero attinet ad duas ſphæras incurrentes, eam velocitatem habebunt, quam ſupra definivimus. Atque in hac eadem hypotheſi non eſſet vera ſententia alterius auctoris, quem is impugnat, de ſphæ-

ſphærarum incidentium quiete poſt incurſum. In ſecunda vero hypotheſi ſingularum ſphærarum velocitatibus F A, L A (*Fig.* 38.) in ſuas quibuſque directiones F E & E A, L E & E A diviſis idem contingere oſtenderemus. Scilicet perinde erit, ac ſi maſſa dupla in ſimplicem A velocitate = E A = C incurreret. Ex quo fiet, ut ſphæra impacta A feratur ſecundum E A C velocitate = 4 C: 3 num. 2, non = 2 C, ut perperam ponit auctor Diſſertationis, ſphæræ vero impingentes ſecundum A C pellantur velocitate = C: 3 (numero eodem). Quia vero velocitates F E, L E, omnino oppoſitæ ſunt non quidem proxime, quia ſphæræ F & L non ſe contingunt, ſed remote adminiculo ſphæræ interjectæ A, ideo ſphæræ eædem velocitatibus æqualibus in A ſecundum parallelas rectis E F, E L in contrarias partes a vi elaſtica propelluntur; ideſt ſingulæ habebunt velocitatem = C ſecundum eas directiones: ergo cum etiam habeant velocitatem = C: 3 ſecundum A C, perfectis paralellogrammis diagonales deſcribent. Quo pacto ſimiliter, ac in prima hypotheſi, eaſdem in tribus maſſis vires vivas poſt conflictum, ac in ſolis duabus ante conflictum inveniemus. Ex quo colligitur impingentes nec regredi ſecundum directiones in A parallelas rectis E F, E L, ut vult Diſſertationis auctor, nec quieſcere, ut falſo contendit ille alter, qui ab auctore impugnatur, ſed mediam inter directiones A C & A N, A C & oppoſitam directioni A N poſt conflictum abſolvere. Quibus omnino ſatisfactum arbitror huic difficultati, quæ primo aſpectu efficaciſſima videbatur.

Scholion

Mirum alicui fortaſſe videbitur me nullam umquam mentionem feciſſe eximii cujuſdam libri, qui inſcribitur *Dialogo intorno alle forze vive* triennio ab hinc Bononiæ editi, ideſt an. 1749. auctore Cl. Matheſeos Profeſſore P. Vincentio Riccati, qui Leibnitii ſententiam adeo luculenter exquiſiteque tractavit, ut multos in Italia etiam tum hæſitantes confirmarit, alios etiam a Carteſii caſtris ad Leibnitiana traduxerit. Cui ut ſatisfaciam, ajo me multo ante, quam ad meas manus liber perveniret, ea ſcripſiſſe, quæ hactenus diſputata ſunt, & etiam alia plura in peculiari Diſſertatione de viribus vivis, ut multis & teſtibus & argumentis docere poſſum, & inter alia Theſibus Brixiæ excuſis an. 1748, quas unus ex meis auditoribus Seminarii Brixiani coram Eminentiſſimo non ſolum

Pur-

Digitized by Google

Purpura, ſed etiam omni litterarum genere, ut doctiſſimi iique permulti & omnium Gentium teſtimonio eximiis laudibus celebrati libri ab eodem editi teſtantur, Cardinali Quirino defendit, quibus Theſibus a numero 30. uſque ad 35. ſumma quædam capita eorum, quæ diſſeruimus, delibantur. Id unum in cauſſa fuit, cur in his contexendis ne verbum quidem de Riccati opere fecerim, & in cauſſa eſt, cur neque in edendis facerem, ne cogerer multa retexere, quod valde pigebat: præſertim cum ad ultimum locum mihi integrum ſervare poteram de iis, quæ ab ipſo tam ſubtiliter excogitata ſunt; id quod ſequenti capite ſum facturus.

CAPUT OCTAVUM

Expenditur liber P. Vincentii Riccati de viribus vivis.

Scholion

AUctor in eximio opere loquentes inducit undecim diebus Cæſarem, qui Carteſii partes tuetur, Lelium, qui Leibnitianas ſecutus auctoris Perſonam gerit, & Neſtorem, qui tamquam hononarius arbiter in neutram partem valde propendens introducitur. Quamobrem ſingulos ſingulorum dierum ſermones totidem fere articulis perſequemur, & quæ nobis probentur, quæ minime arrideant, quam breviſſime fieri poterit, explicabimus.

ARTICULUS I.

De ſermone primo die habito.

§. 205. Sententia Riccati.

PRimo die auctor totus eſt in explicando, quid nomine vis vivæ, cujus menſura quæritur, intelligi debeat, & rem altius repetens primum docet quid ſit vis inertiæ. Qua in re pag. 15. ponit & probat id, in quo convenit inter Philoſophos, omne corpus conſervare debere illum quietis aut motus ſtatum, in quo eſt, nec poſſe tranſire ab alio ad alium ex infinitis ſtatibus, ad quos eſt indifferens, niſi mutationis ſit ratio ſufficiens, ſive cauſſa, quæ mutationi gignendæ proportione reſpondeat. Hoc conſtituto ait poſſe nos in corpore percipere quamdam proprietatem,

tatem, quæ non ſinat mutationem aliquam in corpore fieri, quando præſto non ſit cauſſa variationi ſtatus proportionalis, hancque qualitatem vim inertiæ appellari poſſe docet, modo ex eo, quod vis dicatur, Philoſophi non concludant eſſe vim ſimilem earum, quæ mutationem efficiunt. Nam ut advertit pag. 16. res his nominibus ſubjectæ ſunt valde diverſæ. Nam vires motrices motum aut gignunt, aut corrumpunt; vis inertiæ motum non corrumpit, & multo minus efficit. Illæ ſtatum corporis mutare conantur, hæc autem conſervat, nec mutari ſinit, niſi a cauſſa proportionali, & aliud non ſibi vult, niſi hoc, quod ad ſtatus corporis mutationem cauſſa ſufficiens atque ideo mutationi proportionalis deſideratur.

2. His conſtitutis a pag. 17. uſque ad 22. paucis delineat theoriam fluxus preſſionum, quam nos abſolvimus, quaque uſi ſumus tum ad confirmandam Leibnitii ſententiam §. 128. & ab objectis Carteſianorum vindicandas rationes, quæ ab actione elaſtrorum ducuntur §. 180. & ſeq. tum ad oſtendendam æqualitatem inter cauſſam & effectum in motu compoſito §. 190. & ſeq. & tria diſtinguit, vim, uti gravitatis vel elateris, quæ a nobis vocatur preſſio, ab aliis vis mortua, aut potentia, actionem ejuſdem, quam nos diximus ſummam preſſionum, quæ fluxu preſſionum generatur, & mutationem ſtatus, quæ efficitur ab hujuſmodi actione, remque declarat exemplo fluxus & motus rectæ ſecundum alteram rectam, uti & nos pluribus locis effecimus. Quibus ſibi munit viam ad vim vivam definiendam. Primum monet pag. 25. P. Buskovikium vim vivam eamdem putare ac vim inertiæ, advertitque non eſſe quidem admittendam vim vivam in eo ſenſu, ut ſit quidpiam reale, quod corpore nitatur, ejuſque poſſeſſionem capiat, proptereaquod hujuſmodi vis ſupervacanea foret, & idcirco a Phyſicis eſt explodenda, ſed locum illi dari oportere hoc modo perceptæ, ut ſit eadem atque vis inertiæ, ſed comitata quibuſdam ſpecialibus adjunctis, quorum ratio non ſemper habetur; quæ adjuncta explicat, dum pag. ſequenti ſic illam definit. „ Cum vis viva nominatur, non intelligitur „ ſimplex vis inertiæ, ſed illa facultas, qua vis inertiæ prædita „ eſt, exercendi continuam & ſucceſſivam actionem ſeu potius „ reactionem contra actionem cujuslibet vis mortuæ, quæ in „ ſtatu corporis mutando impenditur, quoad hoc ſtatui quietis „ reſtituatur. „ Inde autem concludit „ cum hujuſce vis vivæ „ menſura quæritur, aliud nihil quæri quam menſuram actionis

„ vis

„ vis mortuæ qua illa ſtatus mutatio perficitur „. Cum vero P. Buskovikius affirmaſſet litem vel Carteſianis adjudicandam vel Leibnitianis pro ratione poteſtatis, quæ nomini vis vivæ ſubjicitur, illis, ſi nomine vis vivæ velimus intelligi eam corporis affectionem, qua motu æquabili datum ſpatium abſolvit, his, ſi illam alteram, qua gravia in planum molle delabentia foveas efficiunt, vel globi quadam perciti vi in elaſtrum expanſum incurrunt illudque conſtringunt; ſe ad vitandam vocabulorum controverſiam pag. 28. profitetur „ nomine vis vivæ intelligere vim „ illam, quæ in corpore percipitur transfuſa actione vis mortuæ, „ quæ vis viva eidem actioni vis mortuæ proportione reſpondet „. His conſtitutis mirifice ſolvit difficultatem contra Leibnitianum ſyſtema petitam a motu æquabili, itaque primi diei diſputationem concludit.

Sententia Noſtra.

2. Tametſi quod attinet ad ſummam quæſtionem mihi cum P. Riccati conveniat, quod vis viva generetur actione vis mortuæ, & quod quærere menſuram vis ejuſdem idem ſit, ac quærere menſuram actionis mortuæ, ſive ſummæ preſſionum fluentium, quas alii vires mortuas appellant; tamen in eo diſſentio, quod arbitror, ut §. 124. pluribus oſtendi, eſſe quidem in corporibus vires mortuas ſive puras preſſiones uti ſuperficies in extenſo ſolido, ſed nuſquam in hac rerum univerſitate ipſas per ſe poſſe exſtare, ſed eſſe ſemper cum vera vi ſive cum ſumma preſſionum copulatas, quemadmodum puræ ſuperficies exſtare non queunt, ſed tantum in ſolido profunde extenſo, ſive cum ſumma ſuperficierum conjunctæ. Ex quo fit in hac ſententia vires omnes corporum eſſe ejuſdem ſpeciei, & omnes vires dici debere vivas atque motrices, tametſi in hiſce viribus ſit aliquid, quod tamquam ejuſdem elementum percipere debeamus, quodque alio modo metiri oporteat ac vim, cujus ponitur elementum. Id quod mihi ſuppeditavit rationem §. 127. num. 17. infirmandi, quod adverſus argumentum ductum a motu compoſito & ab obliquo corporis incurſu in planum pro Leibnitiana ſententia retorſit Cl. Mairanus. Ex qua etiam mea ſolutione concludi poteſt alia ratio in noſtram ſententiam, quæ tamen ſolum valere poteſt apud Sectatores Leibnitii. Nam ſi quæ foret pura preſſio in natura, ea profecto eſſet gravitas; gravitas autem hujuſmodi non eſt; cujus enim menſura eſt eadem ac vis vivæ, illa pura preſſio non eſt, ſed vis viva fluxu generata preſſionum; ex iis

vero,

vero, quæ citato loco ex Mairano excripſimus, conſtat gravitatem corporis duobus planis eodem tempore oblique inſiſtentis reſolvi in duas laterales, quarum ſumma non eſt æqualis, uti eſſe debet, gravitati, quæ reſolvitur, niſi gravitas ſit in ratione quadrati velocitatis initialis; ergo ſaltem Leibnitiani fateantur oportet gravitatem aliaſque vires, quæ ab ipſis mortuæ appellantur, cum exſiſtunt, veras eſſe vires vivas, in quibus preſſiones tamquam termini conſtent.

3. Idem confirmatur experimento, quod Riccatus affert pag. 31. quo loco quæſtionem tractat de diſtinctione preſſionum & virium vivarum, de qua nos §. 124. 125. enucleate diſſeruimus. Eſt autem hoc. Si intra virgulam aquæ e fonte exſilientis in ſitu a virgula non valde diſſito globum ponamus, hic ab aqua ſublevatur, ſed non uſque ad ſummam ſuperficiem, ſed ſolum uſque ad aliquem locum intra eamdem aquam, in quo conſiſtit æqualibus in contrarias partes momentis libratus. Hoc loco notato, ſi idem in altiori ponatur, ab aqua ſurſum non abripitur, ſed contra illius niſum & motum deſcendit. Ad quod experimentum ſic loquens inducitur Cæſar pag. 32. adverſus communem ſententiam, quam etiam Riccatus amplectitur, gravitatem eſſe puram preſſionem, vim vero impreſſam ab aqua ſaliente eſſe vim vivam & hanc eſſe illa infinities majorem. „ Vis aquæ „ aſcendentis eſt ſane vis viva, vis autem globi eſt mortua. Nihilotamenminus globus inter hujuſmodi vires collocatus ſæpe „ in æquilibrio manet, ſæpe gravitati obtemperat, vimque contrariam aquæ ſuperat. Cum ergo vis mortua interdum vim „ vivam exæquet, interdum autem ſuperet, a vero longiſſime abeſt illam ab hac infinitis partibus ſuperari „. Hæc ita refutare contendit & cum ratione conciliare Riccatus. Cum vis aquæ non ſe explicet in globo niſi gradatim & tranſeundo per omnes poſſibiles gradus velocitatis, tempuſculo infinite parvo non exercet in globo niſi actionem pariter infinite parvam; quo eodem tempuſculo etiam gravitas infinite exiguam gignit. Ex quo fit actiones gravitatis globi & vis aquæ comparari poſſe inter ipſas, & alteram alteri eſſe æqualem, aut alteram ab altera etiam ſuperari poſſe. Nam vires eo tempuſculo inter ſe non contendunt niſi per eas infinite parvas actiones, quas tunc in globo gignunt. Unde concludit auctor pag. 33. paralogiſmum in eo poſitum eſſe, quod in has ſimileſque diſputationes irrepit falſa poſitio, quod quæ vis ſenſim infunditur, tota illico cum corpore communicetur.

4. Sed

4. Sed hoc pacto nodum quæſtionis ajo non ſolvi, quod ſit dictum pace tanti viri, de cujus honore nihil detractum velim, ſi negem eum acu tetigiſſe quæſtionem incidentem, quamque profitetur ſe accurate quantum vellet adhuc examinare non potuiſſe. Quod ſi feciſſet, nullus dubito, quin inter prima elementa actionum, quæ a vi mortua gravitatis, & a vi viva aquæ exercentur, infinitum obſervaſſet diſcrimen, ſi idem ipſas inter vires ſtatueretur. Quis enim ignorat ex altera parte inter ipſas quantitates infinite parvas infinitum eſſe poſſe intervallum, & ex altera ſpatiolum, quod tempuſculo percurritur a gravi propter velocitatem finitam jam acquiſitam, eſſe infinite majus ratione habita illius ſpatioli, quod vi gravitatis, ſeu virtute celeritatis ab ea genitæ interea peragratur? Quare gravitas ſi ſit pura preſſio, & ideo infinite minor vi viva aquæ ſalientis, tempuſculo gignere debet velocitatem, ſed infinities minorem velocitate pariter minima, quam in eodem vis aquæ motrix efficiat. Quod ſi infinitum inter effectus, ſive velocitates generandas diſcrimen intereſt, pariter infinitum interſit oportet inter illarum virium actiones, ſive cauſſas, unde iidem effectus exſiſtunt. Ruit ergo ſolutio Riccati, quæ alia non eſt, quam allata a Fontenellio in hac eadem re, quam §. 127. num. 7. calculi infinitorum principiis refutavimus.

5. Quamobrem ut veram afferam rationem ductam ab iis, quæ §. 125. differui, primum adverto ſi grave ſurſum pellatur ea velocitate, quam in deſcenſu per aliquod ſpatium acquireret, confecturum idem ſpatium ſurſum, atque in ejuſdem fine totam ejuſdem vim iri corruptum a gravitate, quæ incipiet deorſum trudere corpus, quod cum ad imum ejuſdem pervenerit, velocitatem, qua ſurſum projectum fuerat, rurſus habebit. Hæc autem velocitas & ideo ſpatium ſurſum conficiendum adeo exigua eſſe poterunt, ut in oculum minime incurrant. Quo in eventu aſcendet quidem grave, ſed id non apparebit, proptereaquod vis ſurſum ante corrumpetur, quam a corpore ſpatium ſub ſenſus cadens abſolvatur. Deinde animadverto ictus gravi impreſſos ab aqua ſaliente eſſe interruptos, ſive inter primos & eos, qui ſuccedunt, quoddam interfluere tempus exiguum quidem & ſenſibus nequaquam ſubjectum, finitum tamen, proptereaquod inter aquæ aliorumque fluidorum particulas pori exigui quidem ſed finiti in-

tercipiuntur; quo fit, ut poſtquam primæ aquæ particulæ in globum incurrerunt, aliæ quoddam exiguum ſpatium prius abſolvere debeant, quam ad globum, aut ad eas, quæ in illum incurrerunt, promovendas perveniant, idque præſertim uſuvenit in aqua exſiliente, quia vi projectionis aquæ particulæ magis hac illac diſſipantur, & ideo multo majores poros intercipere compelluntur. Contraquam contingit in ictibus, qui a gravitate in corpore imprimuntur, qui aut continui ſunt, quemadmodum eos Geometræ conſiderant, aut valde minus interrupti, quam ii, qui ab aquæ particulis proficiſcuntur. Tertio conſidero, quid in ſummo globo contingere debeat ſtatim ac globus intra aquam ponitur. Cum enim aquea columna ſupra globum velocitate jam acquiſita ſuperiora capeſſere pergat, & columna infra globum in locum ab ea relictum ſtatim ſuccedere non poſſit, propterea quod impeditur a globo, qui etſi ab aqua ſurſum pellatur, tamen ea velocitate, qua ſuperior columna, ſurſum ferri nequit; fieri debet, ut columnæ laterales ſeu circumpoſitæ & omnes aqueæ particulæ eo ferantur vi fluiditatis, quæ, ut notum eſt, & alias dilucide explicabitur, eo defert particulas aquæ, quo minor eſt reſiſtentia, ſive in ea loca, quæ vacua relinquenda forent, niſi particulæ aquæ eodem confluerent. Quo particularum confluxu vis viva generatur contraria vi, qua globus ab inferiori columna ſurſum projicitur. His omnibus explicatur dictum phænomenon, quin opus ſit, ut ad elementa actionum virium gravitatis & aquæ confugiamus. Nam primo globus in tam parva a fonte diſtantia collocari poteſt, ut vis aquæ, quæ inibi major eſt habita ratione tum majoris maſſæ, tum majoris velocitatis, per non exiguum ſpatium globum pellere debeat, etſi quamdam velocitatis partem corrumpant tum ictus, & ii quidem frequentiores gravitatis, tum particulæ fluidæ, quæ ad ſummum globum ob dictam rationem undequaque confluunt. Quo fit, ut corpus aſcendat, quod cum facit, vis, quæ ab aqua altiori ſubinde imprimitur, debilitatur tum ex eo, quod particulæ aquæ magis diſſipantur & tardiores evadunt, tum ex eo, quod ictus magis quam ante, & quam faciat gravitas, interruptos imprimunt, tum denique ex eo, quod a particulis aquæ ad ſummum globum confluentibus indeſinenter infringitur. Quare tam parva eſſe poteſt, ut globus ea percitus ſolum exiguum & ſub oculos non cadens ſpatium

aſcen-

aſcendere poſſit, in quo percurrendo vis ſurſum corrumpitur a vi gravitatis, quæ illo tempore exiguo quidem ſed finito interfluente inter anteriores & poſteriores non continuatos ictus aquæ vim exiguam ſed finitam extinguere poteſt, & ſimul a vi particularum, quas ad globi ſummitatem confluere oſtendimus: in quo eventu corpus recidit. Jam vero hæc alia vis adeo exigua eſſe poteſt, ut minimo ſpatio deorſum emenſo iterum ab impetu columnæ aquæ ſalientis deſtruatur, qua deſtructa ceſſabit deſcendere globus & iterum aſcendere incipiet, hique itus ac reditus in æternum continuarentur in ſententia eorum, qui volunt perfectum æquilibrium non dari, de qua §. 125. diſſeruimus. Qui aſcenſus atque deſcenſus cum per inſenſilia ſpatia conficiantur, ad ſpeciem globus ſine ullo motu conſiſtit. At ſi globus in loco valde altiori ponatur, vis particularum confluentium & globum deorſum pellentium etiam a primo multis partibus ſuperare poteſt vim aquæ ſurſum pellentis, & ideo efficere, ut globus per ſenſile ſpatium deorſum feratur, immo ad fundum uſque, propter-eaquod cum motus deorſum a gravitate perpetuo acceleretur, neque in eo loco, in quo vires contrariæ ſunt æquales, conquieſcere poteſt, uti altera ex lancibus, quæ altius ſublata, ubi demittitur, in æquilibrii loco non conſiſtit, ſed propter vim in deſcenſu acquiſitam ultra deſcendit.

6. Sed de his ſatis: venio ad id, quod Patri Buskovikio aſſentitur Riccatus nullam eſſe admittendam vim vivam, quæ ſit quidpiam reale, quod veluti corporis poſſeſſionem capiat, & adverto me jam docuiſſe §. 119. exſtare vim motricem diſtinctam a motu tamquam cauſſam ab effectu, eamque eſſe quidpiam abſolutum & permanens & ex numero eorum, quæ in corporibus proxime a Deo creantur, aut in nihilum rediguntur. Quare ſi neget illam eſſe quidpiam reale in hoc ſenſu, omnibus iis rationibus, quas ibidem attulimus, premetur; unde cum is tria diſtinxerit, potentiam, ſive preſſionem, quam putat vere ad corpus poſſe admoveri & æternum tempus ita admotam permanere, quin actio ſequatur, actionem ejuſdem & motum; dico, ſi rem ad vivum reſecemus, nomine actionis, quatenus a motu diſtinguitur, non aliud intelligi niſi vim vivam, quæ fluxu preſſionis generari intelligitur, uti rectangulum fluxu rectæ, quæque eſt intrinſeca cauſſa, cur corpus moveatur, ſive cur hæc relatio ſucceſſivi contactus cum

alio corpore in corpore moto exſiſtat. Ex quibus etiam efficitur hanc vim, de cujus menſura Carteſiani & Leibnitiani inter ſe digladiantur, ita ab omnibus accipi oportere, ut eamdem omnino vim motricem ſignificet, nec audiendum Buskovikium, qui alia atque alia ratione vires, de quibus eſt quæſtio, accipi poſſe contendit.

7. Ex iis vero, quæ §. 201. num. 31. diſputavimus, aperte colligitur vim inertiæ eſſe vim ejuſdem omnino ſpeciei ac eſt vis viva; eſt enim vis repellens, quæ in interiori corporis ſubſtantia reperitur, qua fit, ut quædam vis vivæ corporis impingentis portio ea perimatur ratione, quam citato loco num. 10. expoſuimus.

ARTICULUS II.

De Sermone tertio die habito.

§. 204. Sententia Riccati

Mitto illa omnia, quæ in ſermone ſecundi diei accuratiſſime, ut ſolet, & ſubtiliſſime differit P. Riccatus de foveis, quæ a gravibus in planum molle decidentibus excavantur, quas productis ex maſſa in quadratum velocitatis proportione reſpondere certiſſimis experimentis confirmat; propterea quod ex altera parte de iis ne verbum quidem in ſuperioribus feci, ex altera vero excavatio fovearum ope corporum decidentium congruit cum elaſtrorum conſtrictione, quæ a corporibus data velocitate in eadem incurrentibus fit. Unde illæ foveæ ob nullas alias rationes conficere poſſunt Leibnitianam virium æſtimationem, niſi propter eas, quas pluribus in locis & præſertim §§. 128, 188. expoſuimus, ductas ab eo, quod vires aut generatæ in diductione elaſtrorum, aut corruptæ in contractione productis ex celeritate fluxus preſſionum in tempus, quo fluunt, proportione reſpondent.

2. Quamobrem hæc mitto, ut dixi, & accedo ad ſermonem tertii diei, in quo Cl. Auctor mira facilitate Bernullianam elaſtrorum theoriam explanat, id quod etiam ego in ſuperioribus feci, eamque ab Adverſariorum objectis vindicat, de quibus nullam feci mentionem, propterea quod cum principiis communi Phyſicorum calculo receptis adeo cohærere mihi

mihi videbatur, ut a nemine poſſe in dubium revocari arbitrarer, præſertim cum Camuſius Carteſianæ ſententiæ defenſor eamdem alia methodo confeciſſet §. 142. Quamquam non dubito Riccatum in ſolutione objectorum ſuo muneri ſatisfeciſſe, tamen mihi licere arbitror quædam addere præſertim quod attinet ad objectum doctiſſimi Geometræ Franciſci Mariæ Zanotti, quod majus habere momentum mihi videtur. Cum ergo Riccatus pag. 88. in tertio corollario Theorematis primi ſtatuiſſet, poſito æquali æqualium elaſtrorum numero, quæ in maſſas ſe exerunt, velocitates eſſe in ratione reciproca ſubduplicata maſſarum, & tempora in ratione itidem ſubduplicata ſed directa earumdem, id quod nos §§. *161.* *168.* ſtabilivimus, refert laudatum Zanottum in 2. tom. Comment. Acad. Bonon. hujus eſſe ſententiæ, quod ſi æquales elaſtrorum ſeries ex altera parte obice innixæ ſe in diverſas maſſas exerunt, velocitates generant, quæ ſimplicem rationem reciprocam maſſarum ſequantur. Cum autem in primo corollario poſitis maſſis æqualibus docuiſſet velocitates eſſe in ratione ſubduplicata numeri elaſtrorum, tempora vero, quibus ſe explicant, in eadem ratione, pag. 89. narrat Zanottum ſtatuere æqualitatem inter tempora, quibus diducuntur, & hac ratione firmare. Si elaſtrum A intra naviculam ponatur, nemo inficias ierit dilatationem ejuſdem eodem tempore fieri, ſive navicula quieſcat, ſive moveatur. Sed ſi ante elaſtrum A ſit elaſtrum B, quod cum eo jungatur, hoc præſtiterit idem, ac navicula, propterea quod quemadmodum navicula defert elaſtrum A, cum dilatatur, ita elaſtrum B, cum diducitur, ſecum abripit elaſtrum A. Ergo quemadmodum A eodem tempore aperitur in navicula, ſive ea quieſcat, ſive aliquorſum feratur, ita, quod attinet ad tempus in dilatatione impenſum, perinde eſt, ſive ab elaſtro B abripiatur, ſive ſecus. Ex quibus fit duas elaſtrorum ſeries, ad quas maſſæ æquales admoveantur, eodem tempore pervenire ad maximam dilatationem, quæ perſpicuitatis gratia ponitur eſſe illa, quam habent duo ſingulorum elaſtrorum brachia, cum angulum rectum complectuntur. Quo loco adverto non ſolum a Bernullio, verum etiam a Riccato & ab aliis poni a brachiis ſingulorum utriuſque ſeriei æqualium elaſtrorum, cum ſe expandere incipiunt, æquales angulos, ut 30 graduum, comprehendi.

3. Ad hæc Riccatus ita reſpondet pag. 90. Dubito allatum exemplum valde eſſe diverſum, motuſque translati theoriam nihil facere ad rem, de qua agimus. Nam omnia elaſtri A puncta eadem ac navicula velocitate prius feruntur, quam elaſtrum in eadem collocatum ſe expandat; unde elater aliud nihil facit, quam cujuslibet puncti velocitatem augere eadem ratione, qua illam gigneret navicula quieſcente. At elaſtrum B, quod antegreditur, non in omnia elaſtri A puncta æqualem eodem inſtanti velocitatem imprimit, ſed ante exiguam aliquam motus partem communicat cum cuſpide, quam tangit, qua fit, ut proxima puncta alia poſt alia gradatim accelerentur. Quamobrem quo tempore ipſa per ſe cuſpis ad corpus pellendum admota aperitur, altera cuſpis, ſe vicino elaſtro expandente, clauditur. Unde conſequitur elaſtrum A, quod præ ſe habet elaſtrum B, eodem tempore minus ſe expandere, quam ſi ſolum eſſet. Ita fit unum elaſtrum citius ſe explicare, quam duo, cum maſſæ ab iis pellendæ æquales ſunt. Hactenus Riccatus, qui in ſermone habito ſexto die pag. 189. accuratius definit ſingularum cuſpidum celeritatem, dum hæc ſcribit. „ Elaſtra, ſeriem aliquam quæ componunt, in communicando motu cum corpore, non ſe dilatant aliud poſt aliud ſed omnia ſimul, ita ut dum cuſpides primi ad obicem admoti, & ſecundi, quæ contingunt ſe ſe, ſpatiolum quoddam conficiunt, cuſpides, quæ ſe pariter contingunt ſecundi & tertii, duplum abſolvant, cuſpides ſe contingentes tertii & quarti triplum, & ita porro gradatim, cuſpis vero ultimi eadem velocitate cieatur, qua corpus ab ipſa ſollicitatum. „

§. 205. Noſtra Sententia

Ad hæc vero magis confirmanda operæ pretium arbitror rem altius petere, & de modo ac legibus, quibus elaſtra ſe exerunt, diſſerere enucleatius. In ea quæſtione an vis elaſtica ſit cauſſa, cur corpora elaſtica in planum delabentia reflectantur, ab iis, qui contra certiſſima experimenta reflexionem eidem vi acceptam ferre nolunt, objici ſolet folliculum ab alto delapſum in planum ſurſum remeare, manu vero compreſſum contra pavimentum nequaquam reflecti, tametſi nihiloſecius quam in deſcenſu partes comprimantur, & ſublata manu reſtituantur. Ad id autem ſic occurrere ſoleo. Vis elaſtica folliculi manu compreſſi ipſa per ſe apta eſt folliculo ſurſum pellendo, & revera pellit, ſed cum id ante præſtet, quam manus ſe ſub-

ſubducere poſſit, proptereaquod eadem citius partes compreſſas reſtituit, quam manus ſubſtrahatur, ideo fit, ut folliculus vi elaſticæ obtemperare non queat. Quod vero res ita ſe habeat, confirmatur hoc experimento. Inter duos uncos pavimento infixos pone folliculum, ad alterum ex uncis religa filum, & illud ſupra folliculum circumvolutum induc in alterum uncum, ac trahe quantum ſatis eſt ad illum comprimendum. Rebus ita conſtitutis de repente abſcinde filum, obſervabiſque folliculum ſuperiora capeſſere, & eo quidem altius aſcendere, quo filum magis adductum fuerat, & ideo quo folliculus ante abſciſſionem compreſſior reperiebatur. Quod idcirco contingit, quia filum non poteſt, uti manus, retundere vis elaſticæ ictus. Unde hæc duo concluduntur, alterum in primo experimento ideo folliculum non aſcendiſſe, quia vis elateris impediebatur a manu; alterum vero caſum & motum folliculi deorſum non eſſe ipſa per ſe cauſſam reflexionis efficientem, ſed ſolum diſponere corpus ad reflexionem, quatenus inde efficitur compreſſio; qua propter contrarium niſum elateris inde profecti vis deorſum corrumpitur, eaque deſtructa vis elaſtica folliculum verſus ſuperiora propellit; proptereaquod in ſecundo experimento non eſt motus deorſum ſed ſola compreſſio, & nihilominus corpus aſcendit.

2. Cum vero ad hæc ita evidenter concluſa adverſarii urgeant effectum vis elaſticæ eſſe ſolam partium compreſſarum reſtitutionem & reditum ad priorem ſitum, non autem corporis reflexionem, idque ſuadere conentur tum experimento virgæ in arcum compreſſæ & in medio pavimenti collocatæ, cujus brachia, ſi filum, quo cohibentur, abſcindas, ſe explicant quidem in utramque partem, ſed virgam neutram verſus propellunt, tum ratione, quia in poris compreſſis vis elaſtica, undecumque oriatur, omnes verſus partes æqualiter ſe exerit, atque ideo corpus compreſſum nullam verſus plagam propellere poteſt; ſic replicare ſum ſolitus. Duobus modis fieri poteſt experimentum virgæ in arcum compreſſæ, primum in medio pavimento, quo in eventu contingit id, quod objicitur, idque ob allatam rationem virium in contrarias plagas æqualium, quia quantum virga a brachio dextro dextrorſum impellitur, tantumdem a ſiniſtro ſiniſtrorſum: deinde ſi alterum virgæ brachium ad parietem admoveris. Tunc enim, ut ſæpius expertus ſum, aliud contingit; ſiquidem præciſo filo virga verſus oppoſitum parietem magna celeritate a vi elaſtica projicitur. Cujus effectus ratio evidens eſt;

nam vis elaſtica brachii ad parietem admoti ſuſtinetur a pariete & cum eo communicatur. Quare vis alterius libera manet a vi contraria, nec ab ea impediri poteſt, ne virgam illorſum pellat, quorſum ea dirigitur. Res vero ita ſe habet etiam in folliculo deorſum cadente, vel in quocumque alio corpore, cujus pori, dum in ſolum impingit, comprimuntur. Vis elaſtica ſive aeris in folliculo, ſive alterius cujuſcumque cauſſæ in poris corporum ſolidorum verſus omnes partes parietes interiores vel folliculi, vel pororum corporis ſolidi æqualiter urget, atque id in cauſſa eſt, cur folliculus nec dextrorſum, nec ſiniſtrorſum reflectatur, propterea quod altera alteram vim utpote contrariam & æqualem corrumpit. At res non ita ſe habet quod attinet ad vim ſurſum; quamvis enim ſit etiam vis elaſtica deorſum contraria & æqualis, hæc tamen vim, quæ folliculum ſurſum propellit, impedire non poteſt, eo quod illa a pavimento ſubjecto ſuſtinetur & cum illo communicatur. Quare vis ſurſum libera manet & folliculum ſurſum propellit.

3. Hæc autem, quibus reflexionis cauſſam quaſi digito monſtrari puto, magnam arbitror lucem afferre quæſtioni, quam habemus præ manibus. Inde enim eruitur corporis partes compreſſas in utramque ex plagis contrariis reſtitui, ſed reflexionem aliquorſum non fieri, niſi virtute illius elaſticæ vis, quæ eodem verſus tendat, non alterius, quæ impedimentum offendens perimitur: ut etiam in occurſu corporum elaſticorum, ubi hæc compreſſa & in compreſſionibus efficiendis vires impenſæ fuerunt, in ſingulis poris utriuſque corporis vires elaſticæ quidem tam ſe exerant contra ſe mutuo, quam verſus plagas oppoſitas, eas videlicet, unde corpora profecta ſunt, ſed corpora non reflectantur virtute priorum directionum, quæ ſe viciſſim ſuſtinent atque corrumpunt, ſed virtute aliarum directionum, quæ a contrariis ſe ſuſtinentibus liberæ corpora verſus eas plagas, unde venerunt, impellere poſſunt. Ex his autem efficitur ſeriem, quæcumque ſit, elaſtrorum ſe non explicare niſi virtute ultimi brachii; nam primi ad obicem admoti vis ab eodem ſuſtinetur, alia omnia, quæ ſe contingunt, ſe viciſſim ſuſtinent, eo quod in contrarias plagas tendunt æqualibus viribus; ſolum ergo ultimum vim ad motum expeditam & a nullo alio retuſam habebit. Dum vero hoc ultimum brachium antrorſum procurrit, ſpatium inter ipſum & primum majus fit; quo aucto omnia elaſtra ſe æqualiter explicant; ſi enim aliquod ex iis magis vel minus

nus compreſſum præ aliis maneret, continuo vel majori vi propria ſe in majus ſpatium extenderet & alia comprimeret, vel majori aliorum vi in minus comprimeretur. Id autem fieri non poteſt, niſi ea circa cuſpides uſuveniant, quæ Riccatus conſtituit, ut ſchema auctoris contemplanti patebit.

4. Hinc intelligitur, cur duo elaſtra longiori tempore quam unum, quatuor longiori quam duo ſe expandunt; vis enim, qua id fit, ex altera parte eadem eſt, & ex altera in data hypotheſi, quod elaſtra æqualia ſint, æqualiter compreſſa, & ad eumdem maximæ diductionis angulum ſe explicare poſſint, cuſpis ſeriei duorum antequam ad hunc perveniat maximum angulum, ſpatium conficere debet duplum ejus, quod conficit cuſpis unius, ſeries trium triplum, ſeries quatuor quadruplum, & ita porro. Quod ſi ita eſt, mirum eſſe non debet, unum & ſolum elaſtrum minori temporis intervallo opus habere, quam ſi cum altero copulatum reperiatur ad eum finem, ut ad maximæ diductionis angulum perveniat; id quod Zanotti ſententiam prorſus evertit. Immo ſi aut nullæ, aut æquales maſſæ ab uno elaſtro & a ſerie quatuor pellantur, ex eo, quod in ſingulis ab ultima cuſpide ſeriei quatuor diſtantiis quadruplo majoribus, quam intervalla a cuſpide ſe expandente unius, vires pellentes ſunt ſemper æquales, eruitur tempora expanſionum eſſe in ratione directa ſubduplicata numeri elaſtrorum, ut ſuo loco perſpicuum fecimus, & ex Galilæana conſtantis gravitatis hypotheſi compertum fit. Quemadmodum enim a gravi ſpatium quadruplum tempore duplo conficitur, quia in ſpatiis finitis $= 1$ & $= 4$ gravitas eadem perſtat; ita ſingula ſpatiola infinite exigua $= 1$ a cuſpide unius elaſtri conficiuntur tempuſculo $= 1$, & ſingula ſpatiola $= 4$ ſumta in diſtantiis $= 4$ a cuſpide ultimi elaſtri ſeriei $= 4$ tempuſculo $= 2$ abſolvenda ſunt, proptereaquod preſſio in iis ſpatiolis in utraque ſerie eſt æqualis & eadem perſeverat. Colligendis autem unam in ſummam hiſce ſpatiolis atque tempuſculis, conſequens fit unum elaſtrum ſe per ſuum totum ſpatium $= 1$ tempore pariter $= 1$ explicare, ſeriem autem quatuor per ſuum $= 4$ tempore $= 2$. Quibus ſatisfit objectis Cl. Zanotti, atque Bernullii theoremata circa elaſtrorum expanſionem confirmantur.

A R-

ARTICULUS III.

De Sermone habito quarto & quinto die.

§. 206. Sententia Riccati

IN colloquio quarti diei totus eſt Riccatus in extorquendo e manibus Carteſianorum effugio temporis, quo uno putant ſe poſſe evadere ex anguſtiis, in quas ſe conjiciunt, dum ſuam de virium æſtimatione ſententiam cum actione elaſtrorum conciliare conantur; atque hæc duo præſertim ſibi oſtendenda proponit, rationem temporis haberi non poſſe nec iis poſitis in ratione directa velocitatum, quibus elaſtra expanſa a corporibus in eadem incurrentibus comprimi incipiunt, nec in ratione inverſa earumdem. In quibus conficiendis adeo luculenter verſatur, ut non videam quid contradici poſſit a Carteſianis.

Noſtra Sententia

2. Verum nullam temporis habendam eſſe rationem non magis ex his efficitur, quam, ut is optime advertit pag. 126. ex eo, quod aliquando tempora, quibus elaſtra comprimuntur, velocitatibus initialibus corporum incurrentium proportione reſpondent, concludatur generalis theoria, quæ deinceps in eos caſus, in quibus aliter res ſe habeat, non convenire obſervatur. Et revera tempus ſubduci oportere in iis viribus, quæ a ſua cauſſa indeſinenter reſtaurantur, ſi quæ communicatæ & ideo amiſſæ fuerint, tum generatim §. 128. 152. & ſeq. tum ſpeciatim §. 180. & ſeq. perſpicuum fecimus in ſingulis quibuſque caſibus vim vivam, ſeu ſummam preſſionum, ſive quæ generantur, ſive perimuntur, eſſe æqualem producto ex ipſamet quantitate preſſionis in celeritatem, qua fluit, & in tempus, quo durat fluxus. Unde ſi preſſiones impreſſæ duobus corporibus ſint æquales, erunt vires = productis ex celeritatibus fluxus preſſionum in tempus, quo durant, ut contingit in caſibus §. 181. 182. 183. 184. in quorum ultimo expenditur caſus corporum gravium, quæ ex diverſis altitudinibus cadant. Si vero etiam tempora ſint æqualia, erunt vires ſolum in ratione velocitatum, quibus preſſiones fluunt, ut accidit in caſu §. 180. quo duo corpora molis inæqualis ab eodem elaſtro ex ſex conſtante utrimque pelluntur. Quo loco adverto nullam pro explodendo tempore eſſe Leibnitianorum rationem ductam ex eo, quod eodem tempore generentur

vires

vires inæquales; nam quod tempus in aliquo caſu proportionem non variet, id non proficiſcitur ex eo, quia ſupputandum non ſit, ſed ex geometrico illo principio, quod elementa duarum quantitatum, ſi ſint utrimque æqualia, proportionem non mutant, ſive ſubducantur, ſive ſecus. Tandem ſi in duobus caſibus preſſiones ipſæ, velocitates, quibus fluunt, & tempora fluxionum ſint inæqualia, ut accidit in caſibus §. 185. 186. ſingula ſupputanda erunt ad veram virium quantitatem obtinendam, ſingulisque ſubductis ſemper vires productis ex maſſa in quadratum velocitatis æquales exſiſtent.

3. Ex quibus efficitur id, quod advertit Riccatus pag. 176. in ſermone quinti diei, in quo ex profeſſo de gravitate diſſerit, actionem gravitatis aut elateris non eſſe æqualem, ut Carteſiani putant, gravitati, aut preſſioni elaſtri ductæ in tempus, quo hæ vires operantur, ſed iiſdem potentiis ductis in ſpatium, per quod ſe explicant, verum quidem eſſe ſed non propter rationem ab ipſo allatam, quod ex altera parte ſola preſſio ſine actione permanere poteſt in corpore etiam infinitum tempus, cum ab altera contraria & æquali preſſione ſuſtinetur; ex altera vero ſimul ac vel per minimum ſpatium preſſio corpus impellit & comitatur, actio exſiſtere percipitur. Nam ut ea nunc prætercam, quæ alibi ſunt diſputata vel de preſſionibus, quæ per ſe non poſſunt exſtare §. 124. 125. vel contra ſententiam Hermanni, cum de gravitatis actione ex profeſſo diſſerebam §. 139. non ideo actio, ſive ſumma preſſionum & vis motrix productum exæquat ex preſſione in ſpatium ducta, quia tempus omnino ſit explodendum, ſed quia cum vis ſit æqualis preſſioni ductæ in productum ex celeritate, qua fluit, & in tempus, quo fluere pergit, ſcilicet hoc productum ex velocitate in tempus ſpatium confectum exæquare comperitur. Ita fit, ut Carteſiana virium & actionum menſura non ideo inepta ſit, quia ponat tempus tamquam elementum actionis & vis, ſed quia duo tantum affert ejuſdem elementa, preſſionem & tempus, & omittat tertium, ideſt velocitatem, qua fluit; quemadmodum ſi menſura rectanguli poneretur productum ex recta ſuper aliam rectam fluente ducta in tempus, quo fluit, peccaret quidem non quia temporis rationem haberet una cum quantitate rectæ fluentis, ſed quia omitteret celeritatem fluxus ejuſdem, cum alioquin vera menſura rectanguli ſit productum ex recta fluente in celeritatem, qua fluit, & in tempus, quo motus durat, ſive productum ex eadem recta

ēta in rectam, quam altero extremo pertranſit; proptereaquod hujuſmodi recta productum ex celeritate in tempus exæquat.

4. Sed antequam ab hoc loco diſcedam, nequis ſcrupulus reſideat, non erit abs re veritatem noſtræ menſuræ oſtendere in illiſmetipſis caſibus, in quibus temporis ullam haberi poſſe rationem auctor negat, tametſi in aliquibus ex iis jam id ſupra docuerim. Sint enim, ut is affirmat pag. 111. duodecim elaſtra æqualia, & primo compaginetur ſeries hujuſmodi, ut aliud poſt aliud ſit, deinde ſecunda ſeries, in qua bina reperiantur, atque ideo illa ſit elaſtrorum ſex duplicatorum, tum tertia, in qua terna, quæque idcirco quatuor triplicata habebit, tandem quarta, in qua ſint quaterna, & ideo tria quadruplicata contineat. Jam vero ex iis, quæ tum a Riccato in corollario ſecundo Theorematis tertii, tum a nobis §. 165. & ſequen. oſtenſa ſunt, ſequitur æquales velocitates in eodem corpore ab his elaſtris ſe explicantibus generari, tempora autem eſſe ut numeros elaſtrorum, quorum aliud alii ſuccedit, ideſt ut 12, 6, 4, 3. Ex his autem hæc auctor concludit pag. 112. initio „ Ergo ſi cum omnia reliqua ſint æqualia, tem- „ pora inæqualia ſupputare vellemus, actionum æqualitas „ turbaretur „. Sed ut id conſequatur ex ratione temporis in actionum & virium menſuram inducta ab iis, contra quos diſputat eo loco P. Riccatus, tamen ajo non conſequi ex modo, quo nos eamdem rationem introducimus. Cum enim in ſingulis hiſce quatuor caſibus velocitates ſint æquales non ſolum eæ, quæ in fine integræ expanſionis elaſtrorum in corporibus obſervantur, ſed etiam illæ, quibus æquales maſſæ cientur in ſingulis punctis, quæ in ſingulis ſeriebus a principio in ratione numeri elaſtrorum ſibi ſuccedentium abſunt, §. 166. 167. ſequitur vires ſive actiones eſſe æquales productis ex preſſionibus in tempora, num. 1. Jam vero ut conſtat ex §. 168. 169. in prima ſerie preſſio eſt $=1$, & tempus $=12$. Ergo vis & actio generata $=12$. In ſecunda preſſio $=2$, tempus $=6$. Ergo vis pariter $=12$. In tertia preſſio $=3$ & tempus $=4$. Ergo vis $=12$. In quarta demum preſſio $=4$, & tempus $=3$. Ergo vis $=12$. His ſi adderetur quinta ſeries ex ſenis conſtans juxta ſe poſitis, & duobus alio poſt aliud, preſſio eſſet $=6$ & tempus $=2$. Ergo vis & actio $=12$. Ex quo palam fit temporis rationem, quatenus a nobis in virium & actionum menſuram inducitur, cum æqualitate actio-

actionum, quando illæ æquales ſunt, & generatim cum quantitate earumdem, quam natura deſiderat, optime convenire.

5. Ex quibus fit, ut quamvis mihi cum Riccato pag. 179. in ſermone 5. diei conveniat, non ex formulis phyſico-mathematicis virium menſuram eſſe eliciendam, ſed ipſas formulas, quæ ad vim exprimendam idoneæ ſint, eſſe conſtituendas, id quod jam docui §. 140. num. 6. tamen duo me homini aſſentiri non poſſe intelligo. Alterum eſt quæſtionis cardinem in eo verti, utrum vires & actiones ſint computandæ in ratione temporum, an in ratione ſpatiorum, ſive cum in motibus acceleratis ſint jam conſtitutæ communi Phyſicorum calculo duæ notiſſimæ formulæ altera $fdt = mdv$, exprimens tempora, in qua f exprimit preſſionem, dt tempuſculum, m maſſam corporis moti, & dv incrementum velocitatis, altera $fds = mvdv$ exprimens ſpatium, cujus elementum eſt ds; utra ex his formulis complectatur idoneam menſuram virium & actionum, & ideo etiam effectuum. Nam utramque eſſe idoneam ex iis, quæ diſputata ſunt, ſatis evidenter eruitur, ſi utramque convenienter naturæ utriuſque uſurpemus. Si enim in virium menſuram ingreditur tempus, præter preſſionem ipſam per ſe ſpectatam, cum tempore etiam velocitas, qua preſſio fluit, conjungenda eſt; ſin autem ſpatium, ſola preſſio eſt attendenda, propterea quod ſpatium complectitur tum celeritatem fluxus preſſionis, tum tempus, & eorum producto proportione reſpondet. Quemadmodum tum tempus tum ſpatium ſunt aptæ menſuræ rectanguli, quod fluxu rectæ ſecundum alterius longitudinem dato tempore generatur, ſi modo, cum computatur tempus, ponatur rectangulum = rectæ fluenti ductæ in velocitatem, qua fluit, & in tempus, quo fluxus durat, cum vero ſpatium, fiat rectangulum = rectæ, quæ fluit ductæ in rectam, quæ eſt ſpatium ab ea peragratum, propterea quod hæc recta ſive ſpatium continet tum tempus tum velocitatem & producti illorum rationem ſequitur. Nec aliter fieri poteſt; nam, ut is ſibimet objicit pag. 181. non ſolum utraque vera eſt, ſed etiam altera ex altera educitur; nam cum ſit $dt = ds : v$, ut Mechanici oſtendunt, formula $pdt = mdv$ convertet in hanc $pds : v = mdv$, & ideo $pds = mvdv$.

6. Alterum vero in quo mihi cum eo convenire non poteſt, eſt hujuſmodi. Cum is pag. 180. eam ſtatuiſſet tamquam præci-

puam

puam legem metiendæ actionis atque vis vivæ „ quæ ſemper „ idonea eſt arctæ neceſſitudini inter cauſſam & effectum con„ ſervandæ, & æqualitati inter duas cauſſas, quæ eumdem gi„ gnunt effectum; quæ univerſalis eſt, & tenet quod attinet ad „ omnia adjuncta in omnibus iis viribus, quæ in hac rerum uni„ verſitate conſtant & operantur; ad quam denique aliæ leges, „ quæ in Phyſicis conſtitutæ ſunt, rediguntur „ deinde pag. ſequenti docet in motibus directis, in quibus eſt eadem directio vis & corporis moti, non poſſe dijudicari, utra ex dictis legibus his qualitatibus ſit inſtructa, propterea quod in hiſce motibus neutra ex dictis legibus aberrat a vero, & ideo ad motus obliquos confugiendum eſſe, in quibus fortaſſe invenietur ambas leges non idem valere, ſed latum inter utramque diſcrimen intereſſe. Equidem non inficior in motibus obliquis maximum eſſe momentum pro ſtabilienda virium & actionum menſura, unde ſcilicet petenda ſit, propterea quod æqualitas inter cauſſam & effectum ſervari non poteſt, niſi menſura virium ducatur a ſpatio, & quadrato velocitatis proportione reſpondere ponatur, de quo enucleate diſſerit auctor in colloquio 7. diei, & nos accurate diſſeruimus §. 127. Sed illud aſſentiri non poſſum ex motibus directis veram virium menſuram non poſſe concludi. Nam ut mittam rationem in contrariam partem allatam a Riccato niti eo falſo principio, quod utraque ex iis formulis viribus & actionibus exprimendis accommodata non ſit, jam pluribus locis oſtendi §. 127. 179. & ſeq. & ultimo articulo capitis antegreſſi in metiendis viribus & actionibus eſſe, præter ipſam preſſionem, ſupputanda celeritatem, qua fluit, & tempus, quo fluxus durat; quibus etiam in motibus directis oſtenditur vis æqualis producto ex maſſa in quadratum velocitatis. Quidquod etiam in motibus obliquis, ſi diſceſſeris ab iis, in quibus vires ſunt ad angulum rectum contrariæ, ad ſervandam æqualitatem & proportionem inter cauſſam & effectum, quæ in ſententia eaque vera Riccati eſt una ex notis legis præcipuæ, unde vires & actiones æſtimandæ ſunt, opus eſt illa celeritate fluxus preſſionum in eadem recta vel conſpirantium, vel oppoſitarum, ut citato articulo evicimus? Sed de hoc ſequenti articulo enucleatius. Nunc unum addo ex iis, quæ §. 201. late diſſeruimus, concludi, qui noſtra virium ſententia cum directa corporum perfecte durorum colliſione concilietur.

A R-

ARTICULUS IV.

De Sermone habito ſeptimo die .

§. 207. Sententia Riccati

MItto ea , quæ auctor diſſerit in colloquio ſexti diei , utpote quæ eo ſpectant , in quo jam ſatis ſuperque verſati ſumus , ut ſcilicet efficiatur parum eſſe momenti in iis rationibus , quæ ſive a Leibnitio ſive ab ejus Aſtipulatoribus hactenus allatæ fuerunt ; & venio ad colloquium ſeptimi diei , in quo theoriam motus compoſiti & virium , quæ ad quemcumque angulum ſint inclinatæ, in chordis elaſticis contractis vel diſtractis ita nitide , ſubtiliter , artificioſeque tractat atque demonſtrat , ut ſi aliud nihil is liber complecteretur , ob illud unum magno in pretio eſſe habendum exiſtimarem . Mihi vero nunc animus non eſt eam exponere , & laborem ſuſcipere non neceſſarium in ipſis decem foliis exſcribendis , quibus eadem continetur . Sed illud unum propoſitum eſt ſumma quædam capita delibare , & quid ſentio , paucis explicare . Ratio a Riccato concluſa ita preſſe proponi quit . Inter effectum & cauſſam , ſive inter vim vivam ſeu actionem , & effectum ab illa generatum æqualitas ſervanda eſt ; ſervatur autem , ſi vis viva ſeu actio ponatur æqualis potentiæ ductæ in ſpatium , per quod illa ſe exerit , quod ſpatium , ut oſtendimus ſupra , eſt æquale producto ex velocitate fluxus potentiæ ſive preſſionis in tempus , quo preſſio ſe explicat ; non vero ſervatur , ſi vis ponatur æqualis potentiæ ductæ in ſolum tempus ; ergo vis viva ſeu actio eſt = potentiæ ductæ in ſpatium , ſive preſſioni fluenti ductæ in velocitatem fluxus , & in tempus , quo is durat , non autem eſt = potentiæ , quæ in ſolum tempus ducatur . Primum ex iis , quæ aſſumta ſunt , tamquam certum principium , quo ſublato tota in Phyſicis certitudo funditus evaneſcat , Riccatus ponit , tametſi moneat pag. 209. Mairano , Martino , aliiſque non paucis minime abſurdum videri , quod in compoſitione de viribus quidpiam decedat , atque ideo effectus ſit minor cauſſa , & in reſolutione quidpiam accedat , atque idcirco effectus cauſſam ſuperet ; quod multo magis repugnat quam primum , præſertim ob illa , quæ §. 127. & 201. num. 37. fuſe diſſeruimus de infinita virium

ſumma ,

ſumma, quæ in reſolutione duceretur ex finita quadam vi, ſi hæc foret = producto ex maſſa in velocitatem, quod cum producto ex potentia in tempus, quo ſe explicat, congruit. Hac de cauſſa, ut ſe ab his laqueis expediat Buskovikius, nodum gordianum ſecat, & advertente Riccato citata pag. negat in hac rerum univerſitate virium reſolutionem aliquando fieri, & ait eam eſſe rationis concludendæ methodum, qua utuntur Geometræ, non operationem naturæ, quæ ſolum adhibet virium compoſitionem. Sed hominem iis rationibus auctor refellit, ut nihil contradici poſſe certum & exploratum videatur. Quamobrem hic locus a reſolutione virium ductus in quamcumque partem verſetur, adeo bene conſtitutus eſt, ut ratio a nobis inde petita & §. 127. late explicata funditus evertat Carteſianum ſyſtema, in quo ex vi finita vis infinita in reſolutione gigneretur, & Leibnitianum confirmet, in quo minimæ vires cum planis communicatæ ad quemcumque obliquum angulum corpus incurrat, ſemper ejuſdem priſtinam vim, unde generatæ fuerunt, exæquant: idque præſertim poſteaquam §. 201. num. 37. eam rationem valere oſtendi etiam poſita illa noſtra circa virium in conflictu corporum durorum communicationem ſententia, quæ rem a capite arceſſit.

2. Major difficultas eſt in oſtendenda repugnantia alterius partis, quod effectus ſit minor ſua cauſſa, ſaltem cum agitur de viribus, quæ ad angulum oppoſitæ vim gignunt ipſis minorem; nam effectus plenus &, ut ajunt, totalis virium, quæ ad angulum ſunt oppoſitæ, non eſt unus corporis motus & actio in illo exercita, & vis cum eodem communicata, propterea quod aliqua vis alterius pars impenditur in perimenda vel ſuſtinenda aliqua alterius parte, quæ primæ adverſatur. Jam vero principium illud de æqualitate inter cauſſam & effectum obtinere quidem, cum agitur de effectu pleno, non autem cum de partiali, nemo eſt qui ignorat. Hanc difficultatem ſibi proponit Riccatus pag. 207. quam ab eodem ſolvendam eſſe arbitror, ſi modo velit aliquid eſſe momenti in ratione ab ipſo concluſa. Nam ſi inter vires laterales & effectum ab iis genitum propter earumdem contrarietatem proportio intercedere poteſt; ratio ſic concluderetur. Si vis viva & actio potentiæ ductæ in ſpatium proportione reſpondet, inter cauſſam ſive actionem & effectum in motu compoſito

poſito æqualitas ſervatur; hæc autem æqualitas in virium compoſitione ſervatur; ergo vis viva ſive actio potentiæ ductæ in ſpatium proportione reſpondet; ex quo argumentandi genere nihil effici poſſe nemo eſt in dialecticis tam peregrinus & hoſpes, qui neſciat; propterea quod quemadmodum in ratione ita concluſa, ſi lapis ab alto demittitur, celerrime movetur, lapis autem manu jactus celerrime movetur, ergo lapis manu jactus ab alto demittitur, conſequens nullum eſt, quia celer lapidis manu projecti motus ab alia oritur cauſſa, quam ab ea, quam conditio exprimit; ita non rite inferretur vim vivam ſive actionem eſſe æqualem producto ex potentia in ſpatium, ſi hæc inter actionem & effectum æqualitas non ſolum in hypotheſi actionis = producto ex potentia in ſpatium, quæ conditione exprimitur, verum etiam in alia hypotheſi actionis æqualis preſſioni ductæ in tempus intercedere poteſt.

3. Quo vero laudatus auctor hoc ab aliqua parte corrupta virium, quæ ad angulum opponuntur, petitum effugium adverſariis præcluderet, artificio duplicis inflexi vectis brachiorum æqualium adhibito pag. 208, vim gravitatis ſphæræ primum reſolvit in duas, quæ ad angulum rectum adverſarentur, & duo vectium diſſita extrema perpendiculariter premerent, deinde eaſdem denuo conjunxit atque compoſuit in aliis duobus extremis ſibi vicinis idem ſubjectum corpus prementibus per eas vires reſolutas gravitatis, quibus prima extrema premebantur. His perfectis ita concludit rationem: a gravitate corporis non minus proficiſcuntur duæ vires ad angulum rectum oppoſitæ & duo extrema disjuncta vectium pellentes, quam aliæ duæ vires, quæ obicem ſive corpus aliis extremis ſubjectum gravant, & in eamdem vim concurrunt. Hæ autem adminiculo contrarietatis non poſſunt fieri æquales vi gravitatis corporis, unde profectæ ſunt; propterea quod tantum abeſt, ut opponantur, ut etiam in eamdem directionem conſpirent. Ergo etiamſi habeatur ratio virium lateralium, quæ vim mediam componunt, nullum debet eſſe momentum in virium contrarietate.

§. 208. Sententia noſtra

Equidem non inficior æqualitatem inter vires vivas ſive actiones, & inter effectum ab iis genitum, hic nequaquam ſervari, & ideo non parvi eſſe momenti rationem inde peti-

 tam.

tam. Sed adverto gravitatem ſphæræ eſſe proximam cauſſam duarum virium lateralium contrariarum, quibus disjuncta vectium extrema premuntur, has autem eſſe proximam duarum congruentium: ut nimirum intelligatur, ſi quid eſt roboris in hoc argumentandi genere, eſſe poſitum in eo, quod in Carteſiana virium æſtimatione finita vis reſolveretur in duas majores illa, a qua generantur. Ut igitur aliquid afferam, quod in ſolam cadat virium compoſitionem, veniat in mentem eorum, quæ §. 134. docuimus. Hinc enim compertum ſit conſentaneum eſſe rationi, ut cum vires ad angulum rectum oppoſitæ ſunt æquales, dimidia pars corrumpatur. Quod ſi ob rationem ibi allatam ita eſt, conſequitur vim reſiduam in diagonali non eſſe effectum, qui cauſſis proportione reſpondeat æſtimatis viribus ex ſententia Carteſii. Erit enim vis in ea diagonali reſidua major dimidia parte virium oppoſitarum, atque ideo major cauſſa, ſeu vi reſidua ex duabus, quæ ad angulum rectum opponuntur. Quo igitur in virium compoſitione æqualitas ſervetur inter effectum & cauſſam, vis eſſe non poteſt æqualis producto ex maſſa in velocitatem, ſive preſſioni ductæ in tempus, quod eodem recidit, ſed exæquet oportet productum ex maſſa in quadratum velocitatis, ſeu quod eodem revolvitur, productum ex preſſione in ſpatium, in quo ſe exerit, ſeu productum ex preſſione in tempus, quo durat, & velocitatem, qua fluit, propereaquod viribus hoc pacto æſtimatis reſidua vis in diagonali eſt præciſe æqualis dimidio virium, quæ ad angulum rectum adverſantur §. 134.

2. Ceterum quod attinet ad theoriam Riccati, duo animadverto, alterum etiam in motu compoſito eamdem inter cauſſam ſive actionem & effectum proportionem ſervari, ſi vis ponatur æqualis producto ex potentia ſive preſſione in velocitatem, qua fluit, & in tempus, quo fluxus durat, alterum rationem a priori ejuſdem poſitam eſſe in principiis ſupra ſtatutis. Quod ad primum attinet, quamquam id univerſe conſtet ex eo, quia altera ex parte Riccatus in contractione chordæ elaſticæ diſtractæ per ſpatiolum infinite parvum, in quo preſſio ejuſdem eſt ſemper æqualis & conſtans, ut gravitas, poſita vi viva ſive actione per illud generata æquali preſſioni ductæ in idem ſpatiolum, æqualitatem inter effectum & cauſſam conſequi oſtendit; ex altera vero productum ex preſſione conſtanti in ſpatiolum ab ea peragratum eſſe æquale pro-

ducto

ducto ex eadem preſſione in velocitatem fluxus, & in tempus, quo idem tenet, jam demonſtravimus: tamen non erit abs re, ſi ad rem veluti ſub oculos ponendam in aliquibus caſibus, in quibus rem hanc auctor expendit, perſpicuum fecero. Primum pag. 216 ponit chordam elaſticam AS (*Fig.* 56.) altero extremo S clavo affixam ad S jam diſtractam & trahentem corpus cum extremo A conjunctum per ſpatiolum A*a* juxta directionem canalis AD, a quo corpus diſcedere nequit; unde fit, ut Riccatus eam directionem neceſſariam vocet. Tum ſi potentia chordæ AS exprimatur recta AB, & ex puncto B erigatur perpendicularis BH ad AD, ex legibus compoſitionis virium, quas a Daniele Bernullio demonſtratas ſupra monuimus §. 190. infert potentiam æquipollentem potentiæ chordæ AS, quatenus hæc trahit corpus in directione neceſſaria A*a*, eſſe futuram AH; & ideo corpus in fine ſpatioli A*a* eadem velocitate latum iri, ſive attrahatur a chorda elaſtica AS, cujus potentia = AB, tranſeunte ad ſitum S*a*, & ſi centro facto in S, radio S*a* deſcribatur circulus *ap*, ſe contrahente ſecundum longitudinem A*p*, aut per ſpatiolum A*p*; ſive a chorda elaſtica jam diſtracta AD fixa ad clavum D, cujus potentia ſit = AH, quæque ſecundum A*a* pariter ſe contraheret. Demum conficit tempus contractionis chordæ AS per A*p* ad tempus contractionis chordæ AD per A*a*, eſſe ut A*a* ad A*m*, ex puncto *a* ducta *am* æquidiſtanti a recta BH, ſive ut AH ad AB. Quare cum in noſtra ſententia vires vivæ, ſive actiones genitæ a preſſionibus ſint æquales preſſionibus ductis in velocitatem, qua fluunt, & in tempus, quo fluxus durat, & ideo ſoli producto ex preſſione in tempus, ſi ut hic contingit velocitates ſint æquales, vis genita a chorda AS erit = AB.A*a*, & vis genita a chorda AD erit = AH.A*m*, quæ duo producta ſunt æqualia, propterea quod eſt AB:AH = A*m*:A*a*. Unde fit vires & actiones genitas eſſe æquales, uti eſſe debent, propterea quod a cauſſis æquipollentibus gignuntur. Nec mirum id videatur, quemadmodum auctor inſinuat pag. 219. Nam diſtinctis tribus caſibus primo chordæ AS trahentis corpus per directionem liberam A*p*, ſecundo ejuſdem chordæ AS, cujus potentia = AB, trahentis per neceſſariam A*a* = A*p*, tertio chordæ æquipollentis AD, cujus potentia AH, trahentis per A*a* directionem liberam ratione habita ipſius,

Kk 2 primum

primum inter ſe comparemus duas actiones a prima & a tertia chorda generatas. Quis enim mirabitur preſſionum ſummam, ſeu vim vivam & actionem iis proportionalem in duobus caſibus eſſe æqualem, ſi eadem utræque velocitate fluant, & quanto prima preſſio ſecundam ſuperat, tantumdem tempus, quo prima pergit ciere corpus, a tempore durationis ſecundæ ſuperetur? Rem vero ita ſe habere jam ex Riccato docuimus. Cum autem etiam preſſio & potentia chordæ AS in directione neceſſaria A*a* potentiæ chordæ AD æquipolleat, & eodem tempore per A*a* ſe explicet, mirum pariter nulli eſſe debet, ſi etiam inter actiones chordæ AS, quatenus trahit corpus in directione libera A*p*, & inter actiones ejuſdem, quatenus in directione neceſſaria A*a* per ſpatiolum A*a* trahit, æqualitas intercedat. Unde quod pag. 219. Riccatus aſſerit „ actiones eſſe æquales, tametſi ab eadem potentia AB „ inæqualibus temporibus exercentur„ non omnino verum eſt, ſi præciſe loqui velimus, quia recta AB exprimit potentiam chordæ AS trahentis corpus in directione libera A*p*, non autem potentiam ejuſdem trahentis in directione æquali quidem ſed neceſſaria A*a*, quia ut conſtat ex legibus compoſitionis, illa ad hanc ſe habet ut AB ad AH, corrupta propter impedimentum parte ſive directione BH, ſive AE.

3. Antequam vero ab hoc primo caſu diſcedam, adverto, ſi rationem habere velimus vis vivæ, ſive ſummæ preſſionum, quam generat chorda AS in directione libera AB eodem tempore, ac eadem vel in directione libera per A*p*, vel in directione neceſſaria A*a*, ſive chorda æquipollens AH in directione libera A*a*, cum hæ tres ultimæ vires idem, ut vidimus, efficiant, ducta *am* æquidiſtanti ab HB, tempus impenſum in contractione chordæ AS per A*m* futurum eſſe = tempori impenſo in contractione ejuſdem vel æquipollentis per A*a*, & velocitatem genitam in *m* ad velocitatem genitam in *p*, vel in *a* futuram eſſe ut A*m* ad A*a*, ſive ut AB ad AH. Nam ſpatia confecta eodem tempore a corporibus æqualibus ſunt in ratione preſſionum conſtantium, quibus pelluntur. Preſſiones autem ſunt in ratione AB ad AH, ſive A*m* ad A*a*. Ergo ſi A*a* ſit ſpatium confectum a potentia AB chordæ elaſticæ AS in directione neceſſaria A*a*, ſive æquipollentis AH chordæ AD in libera A*a*, erit A*m* ſpatium eodem tempore confectum a potentia AB chordæ AS, ſed in directione

ctione libera AB. Velocitates autem eodem tempore a duabus preſſionibus genitæ ſunt in ratione preſſionum ſive in ratione A*m* ad A*a*. Quare cum tempora ſint æqualia, juxta noſtram ſupputandæ vis methodum vis genita per A*m* erit = A*m*. A*m*, ſcilicet = preſſioni A*m* ductæ in velocitatem A*m*, & vis genita per A*a* = A*a*. A*a*; unde rurſus efficitur vires eſſe in ratione duplicata velocitatum A*m* & A*a*. Quoniam vero ex antecedentibus conſtat tempus per A*p* directionem liberam eſſe ad tempus per A*a* ut A*a* ad A*m*, erit etiam tempus contractionis per directionem liberam A*m* ad tempus contractionis per directionem pariter liberam A*p* ut A*m* ad A*a*; in qua ratione ſunt etiam velocitates genitæ. Cum ergo preſſiones hic ſint æquales, vis genita in *m* erit = producto ex velocitate fluxus in tempus, quo durat, ideſt = A*m*. A*m*, & pariter vis genita in *p* erit = A*p*. A*p*; ideſt vires ſunt in ratione duplicata velocitatum A*m*, A*p*.

4. Atque hæc quod attinet ad primum caſum. Cum vero ex iis, quæ in eodem contingunt, ſua veluti ſponte conſequantur ea, quæ pertinent tum ad duas chordas elaſticas ad angulum oppoſitas, quæ corpus trahunt in directione neceſſaria, tum ad duas, quæ in libera, ut auctor perſpicuum facit; illud etiam conſequens eſt in iiſdem ſervari æqualitatem inter cauſſam & effectum, etiam poſita noſtra virium & actionum menſura, qui volumus vires generatas & actiones exercitas eſſe æquales productis ex preſſione in velocitatem, qua fluit, & in tempus, quo fluxus durat, ut mihi nunc opus non ſit longius facere in re tam perſpicua.

5. Quamobrem ſatius eſſe puto ad alterum eorum tranſire, quæ ad Riccati theoriam animadvertenda propoſui. Hæc tota innititur illo principio, quam ut hypotheſim ſibi ſumit, quod ſumma virium in contractione chordæ elaſticæ per ſpatium infinite parvum, in quo potentia ſive preſſio eſt conſtans uti gravitas, productum exæquet ex preſſione in ſpatium, per quod ſe contrahit, ſive in ipſammet contractionem. Hujus vero rationem a priori jam vidimus §. 128. & alibi eſſe poſitam in velocitate fluxus preſſionis, quæ una cum tempore impenſo & preſſione eſt elementum vis generatæ, & actionis exercitæ, ex quo fit ut gravitas conſtans, cujuſmodi eſt etiam potentia chordæ, in ſpatiolo generet vim proportionalem ſpatio, propterea quod hoc ſpatium eſt = velocitati fluxus

preſſionis gravitatis ductæ in tempus. Igitur ratio a priori Theoriæ chordarum elaſticarum Riccati ducitur ex principiis, quæ in anteceſſum ſtabilivimus.

6. Ceterum cum ex iiſdem principiis, præſertim iis, quæ articulo ultimo capitis quinti poſuimus ad reddendam a priori rationem motus compoſiti, colligatur duos æquales gradus velocitatis duabus maſſis æqualibus ſeorſim impreſſis facere duos gradus vis in iiſdem, impreſſos vero in eadem æquali conſtituere vim quatuor graduum; & ideo per ſecundum gradum velocitatis tres gradus vis generari, & in maſſa habente duos gradus velocitatis unum corrumpere idem eſſe ac tres gradus vis perimere; hinc elici poteſt expedita demonſtratio trium problematum, quorum ſolutione tota virium ad angulum oppoſitarum theoria mirifice illuſtratur; 1. cur ſi vires æquales ad angulum rectum ſint oppoſitæ, in maſſa conjunctim pellenda generent eamdem vim, ac ſi ſeorſim in duabus maſſis æqualibus inter ſe, & etiam primæ ſe exererent; 2. cur ſi ad acutum opponuntur, majorem, ſed minus duplo; 3. cur ſi ad obtuſum, minorem. Sint enim duæ vires æquales AB, AD ad angulum acutum BAD oppoſitæ. Perfecto parallelogrammo ABCD & ducta diagonali AC (*Fig.* 57.) & erecta perpendiculari HAE ad AC completiſque rectangulis AMBH & AMDE, preſſio AB erit reſoluta in duas AM, AH, & potentia AD in alias duas AM, AE. Jam vero potentiæ AH, AE ut omnino contrariæ & æquales ſe viciſſim perimunt, & duæ AM, AM, ſive AM, MC conſpirant. Fit autem propter angulum acutum BAD, ut quæ conſpirant, ſint valde majores iis, quæ ſe perimunt. Ergo multo majorem vim conjunctim in dicta maſſa generare debent, quam ſi ſeorſim in duas maſſas ſe explicarent; nam ſi forent omnino oppoſitæ, vis penitus corrumperetur, ſi omnino congruerent, vim efficerent duplam ejus, quam in duabus maſſis ſeorſim generarent. Ergo cum in iis id, in quo congruunt, majus ſit illo, in quo opponuntur, vim gignant neceſſe eſt majorem, quam ſi ſeorſim agerent, ſed minorem tamen quam duplam. At ſi angulus BAD ſit rectus, rectæ AH, AE, AM forent æquales. Quamobrem quantum ob contrarietatem minores eſſe deberent iis, quas in duabus maſſis ſeorſim efficerent, tantumdem ob congruentiam majores eſſe oporteret. Igitur alterum altero compenſatur, & vis genita in una maſſa

per

per duas vires æquales ad angulum rectum concurrentes vim genitam in duabus maſſis æqualibus ab iiſdem viribus ſeorſim exæquabit. Ex quo fit, quod ait Bulfingerus in Comment. Acad. Petrop. tom. I. loco ſupra citato, vires ad angulum rectum contrarias nec ſibi viciſſim ſavere, nec ſibi refragari, verum non eſſe, niſi in hoc ſenſu, quod perinde eſt ac ſi altera alteri nec faveret, nec refragaretur, proptereaquod oppoſitio congruentiam exæquat. Denique ſi eædem ſint ad angulum obtuſum BAD oppoſitæ (*Fig.* 58.), tunc duæ omnino contrariæ AH, AE valde majores erunt duabus, quæ congruunt, AM, AM, ſive AM, MC. Ex quo fit, ut in data maſſa per vires conjunctas AB, AD minor vis viva generetur, quam eædem potentiæ in duabus maſſis æqualibus ſeorſim efficerent.

7. Quæ omnia congruunt etiam cum iis, quæ de menſura vis vivæ & actionis genitæ ſupra ſunt dicta. Nam cum preſſiones & velocitates per latera parallelogrammorum ſint ut eadem latera AB, AD (*Fig.* 57. 58.), & preſſiones uti velocitates per diagonales ſint ut AC, tempora autem æqualia, vis genita per AB erit $= AB.AB$, ſive AB^2, vis generata per AD erit $= AD^2$, & vis per AC erit $= AC^2$, videlicet ob tempora æqualia vires genitæ ſunt ut producta ex preſſionibus in velocitates, quibus fluunt. Jam vero ex Geometria notum eſt in parallelogrammo anguli acuti BAD (*Fig.* 57.) quadratum AC^2 eſſe majus ſumma duorum quadratorum AC^2, AD^2, in parallelogrammo anguli recti eſſe æquale, in parallelogrammo obtuſi eſſe minus. Ergo conſtat, cur in primo caſu vires genitæ per diagonalem ſint majores viribus ſeorſim per latera, in ſecundo cur ſint æquales, in tertio denique cur illæ ab his ſuperentur. Hæc autem omnia etiam ad duas potentias inæquales facile transferri poſſunt. Unde efficitur in virium compoſitione nihil eſſe, quod cum æqualitate inter cauſſam ſive vim motricem, & effectum non optime componatur, ſi ſententiam Leibnitii & ſtatutam a nobis virium menſuram ſequamur.

8. Porro ex his, quæ diſſeruimus, majus accedit momentum rationi, quam pro Leibnitiana virium æſtimatione ex ipſamet motus & virium compoſitione deduxi §. 208. num. I. Siquidem ex his ducitur ratio a priori, eaque valde perſpicua, cur cum vires ad angulum rectum opponuntur, reſtet

dimidia pars illius vis, quam eædem potentiæ omnino conſpirantes efficerent.

9. Atque hæc ſunt, quæ mihi eſſe animadvertenda putavi quod attinet ad rationem pro viribus vivis a Riccato expoſitam citato ſermone ſeptimi diei. Cum vero a pag. 234. uſque ad finem ejuſdem ſermonis tractet difficultatem ductam ab æquilibrio, & a viribus mortuis, quam nos §. 127. num. 17. & §. 201. num. 27. enodavimus, hic unum adjiciendum cenſeo ad ea, quæ ibi & in quæſtione an dentur puræ preſſiones, diſſeruimus. Eſt autem hujuſmodi: cum vis ſit æqualis producto ex preſſione in celeritatem, qua fluit, & tempus, quo fluxus durat; ſequitur ſi tempora ſint æqualia in generatione duarum virium, eadem negligi poſſe, & ideo duas vires eſſe in ratione productorum ex preſſione in velocitatem, qua fluit, atque idcirco futuras æquales, ſi preſſio unius ad preſſionem alterius rationem reciprocam velocitatum ſequatur. Jam vero cum duo gravia ex extremis inflexilis vectis, cujus aliquod punctum ſuſtinetur, appenduntur, preſſiones in utroque non poſſunt niſi tempore eodem fluere tum in generanda vi viva deorſum in corpore, quod deprimitur, & ejus adminiculo uti & conjunctionis partium vectis in eo, quod attollitur ſurſum, tum in corrumpenda in corpore, quod attollitur & ejus atque vectis ope in eo, quod ſubſidit, proptereaquod quo tempore vis repellens $=$ 1 maſſæ $m=1$ corrumpit velocitatem $=$ 1 maſſæ M $=2$, & ideo totam ejus vim, eodem vis repellens $=2$ maſſæ M $=2$ velocitatem $=2$ maſſæ $m=1$ perimit §. 201. num. 27. Ergo quamvis vires ſint æquales productis ex preſſionibus in velocitates, quibus fluunt, & in tempora, per quæ fluxus tenet, & ideo rationem productorum ex maſſa in quadratum velocitatis ſequantur, tamen æqualitate temporum fit, ut in motu vectium ſint in ratione producti ex preſſione in velocitatem, quin Leibnitiana virium æſtimatio detrimenti aliquid capiat.

AR-

ARTICULUS V.

De Sermone habito nona die.

§. 209. Sententia Riccati

MIſſis omnibus iis, quæ in colloquio octavæ diei diſputantur, venio ad ſermonem nonæ, quo Riccatus vires ingenii contendit in enodanda illa celebri Carteſianorum difficultate, quæ ducitur a conflictu corporum inertium; cumque is totus in eo ſit, ut corpora perfecte dura eſſe non poſſe contendat, quod falſum eſſe §. 24. docuimus, & aliunde veram illius ſolutionem §. 201. tradiderimus, hæc quoque miſſa faciam, & ex eo colloquio illam unam excerpam rationem, quam a Jurino allatam contra Leibnitianam ſententiam, nec ſatis ab aliquo Leibnitianorum refutatam Riccatus excogitata ſubtiliter motus tranſlati theoria convellere nititur. Eſt autem hæc. Fac globum aliquem una cum navi definito quodam velocitatis gradu deferri; & hominem in navi poſitum, aut elaſtrum altero ſui extremo ad eamdem fixum pellere globum, & eidem imprimere alium velocitatis gradum æqualem illi, quem a navi excipit. Tam homo, quam elaſtrum eumdem virium in illo generando niſum exercent, ac ſi navis & globus quieſcerent. Ergo eamdem communicant vim. Æqualem vero communicant in ſententia Carteſii, non autem in Leibnitiana; quia cum in hac globus uno velocitatis gradu latus habeat vim = 1, & duobus gradibus latus habeat vim = 4, conſequens ſit hominem & elaſtrum, quæ in corpore quieſcente unum velocitatis gradum generant, impertiri vim = 1, quæ vero in globo jam unum gradum habente alium excitant, vim = 3 cum eodem communicare; quod experientiæ adverſatur, quæ monſtrat & hominem eumdem niſum in excitando uno gradu velocitatis explicare, & alterum æqualiter expandi, ſive globus quieſcat, ſive una cum elaſtro & homine moveatur.

§. 210. Sententia Noſtra

Prætereo ſolutionem Riccati, quod ad eam intelligendam opus eſſet exſcribere illa omnia, quæ ab homine ſubtiliter excogitata & eleganter expoſita fuerunt circa corporum inertium conflictum, cujus accuratam diſputationem alium in locum differre mihi in animo eſt, & paucis explico quid ad eam ſolvendam dici

dici poſſe credo. Jam vidimus pluribus locis & præſertim §. 128. 180. & ſequen. & articulo ultimo capitis quinti vim genitam ab elatere, a gravitate, & ab aliis viribus, quæ ſemper reſtaurantur, proportione reſpondere nec ſoli velocitati, qua preſſiones fluunt, nec ſoli tempori, quo fluxus durat, ſed utrique in ſe invicem ducto, adeout & æquali tempore vis diverſa gigni queat, dummodo elaſtri & gravitatis preſſiones majori velocitate donentur, & e contrario. Hinc fit ut gravitas & elaſtrum ex infinitis elaſtris conſtans, quod in locum gravitatis conſtantis ſubſtitui poteſt, §. 180. & ſeq. poſtquam primum velocitatis gradum in corpore impreſſit, ſecundum imprimere nequeat, niſi per triplo majus ſpatium ſe exerat. Jam vero faciamus altero extremo fixum ad navim elaſtrum ex infinitis elaſtris compoſitum; hoc, ſi navis & elaſtrum quieſcat, in corpore quieſcente imprimet unum velocitatis gradum per datum ſpatium; at ſi navis una cum elaſtro & corpore eo velocitatis gradu cieatur, idem elaſtrum triplum ante conficiet ſpatium, quam æqualem gradum impertiat; duplum videlicet ob velocitatem jam habitam, aliud vero etiam æquale in explicatione ſuimetipſius, perinde ac ſi una cum corpore ante expanſionem quieſceret. Quid ergo mirum ſi quamvis tunc diducatur perinde ac ſi quieſceret, tamen triplam cum corpore communicet vim? At enim vis major vel minor ab elaſtris imprimitur, prout plus vel minus diducuntur, & prout major vel minor æqualium elaſtrorum numerus in pellendo corpore impenditur. Ita vidimus §. 180. & ſeq. tria elaſtra generare velocitatem & vim $= 1$, quadruplo vero plura requiri ad generandam velocitatem $= 2$, & ideo vim $= 4$, tametſi ſingula 12 æqualiter ac ſingula tria explicari debuerint. Hic vero tam navi quieſcente quam mota eſt idem elaſtrum & æqualiter ſe explicans. Qui ergo navi quieſcente imprimendo unum gradum velocitatis dat vim $= 1$, in navi autem a ventis delata uno gradu velocitatis alium generando vim communicat triplo majorem? Quamquam hæc valide aſtringantur, tamen non diffido ea me poſſe diſſolvere. Nam ratio præciſa &, ut ajunt, formalis, cur in generatione ſecundi gradus velocitatis aut virtute gravitatis aut elaſtrorum non eſt, quia triplo major numerus elaſtrorum in eo generando per ſpatium triplo majus impenditur, cum ſingulis momentis ſolum ſe exerat ultimum elaſtrum etiam in ſerie infinita, §. 284. ſed, ut alibi docuimus, quia triplo major ſumma preſſionum exſiſtit ob majorem, qua fluunt,

velo-

velocitatem, quæ non aliunde oritur, quam ab eo, quod corpus jam uno gradu latum velocitatis offendunt. Quod ſi tam elaſtrum, quam corpus initio quieſcant, ſecundum velocitatis gradum eidem imprimere non poteſt, niſi per triplo majus ſpatium triplo major numerus elaſtrorum ſe explicet. At ſi elaſtrum & corpus jam uno velocitatis gradu cieantur, tunc eædem elaſtri preſſiones majori velocitate fluere poſſunt & ideo majorem vim generare, tametſi elaſtrum non plus ſe expandat, quam in eodem imprimendo, cum corpus quieſcit. Neque urgeas, quatenus elaſtrum & corpus uno & æquali gradu cientur, alterum in altero non agere; nam id valet quidem quod attinet ad velocitatem augendam, non autem quod attinet ad augmentum vis. Nam etiam in elaſtro & corpore ab initio quietis poſt communicatum primo minuto primum velocitatis gradum tam corpus, quam cuſpis elaſtri pellens corpus eadem velocitate feruntur; nihilominus dum alium velocitatis gradum gignit, triplo majorem vim communicat propter majorem fluxus preſſionum celeritatem, propterea quod elaſtrum indeſinenter premit corpus, & ideo exerit preſſiones eodem tempore alias poſt alias citius ſuccedentes, prout majori velocitate corpus cietur. Cum ergo idem accidat in noſtro caſu ſine majori elaſtri expanſione, dicendum eſt ob idipſum triplo majorem vim generari.

2. Sed ad magis refutandum hoc objectum, in quo, referente Domina *Du Chaſtellet* §. 585. Inſtit. Fiſic. t. 1. Jurinus tantum eſſe putat momenti, ut omnes Philoſophos ad hanc rem cum Leibnitiana virium menſura conciliandam provocet, ex iis, quæ de elaſtrorum actione tractata ſunt, memoria repeto, cum inter duas maſſas elaſtrum aliquod compreſſum ſe expandit, velocitates, quæ utrimque generantur, eſſe in ratione inverſa maſſarum §. 128. num. 3. Id quod cadet etiam in maſſas, quæ una cum elaſtro finita quadam æquabili velocitate ante ciebantur, quam elaſtrum ſe explicet. Hoc autem erit diſcrimen, quod brachium ſe explicans contra motum communem gradum aliquem corrumpet velocitatis, qua maſſa ad illud admota ante expanſionem ferebatur. Hoc poſito in navi, quæ verſus orientem fertur, ponantur duæ maſſæ *m* orienti propior = 1, & M ab eodem remotior = 2, & inter eaſdem ſit compreſſum elaſtrum, quod diducatur. Communis velocitas in duas partes intelligatur diviſa, quot nimirum indicat maſſa major, ideoque ſit = 2. His conſtitutis ſequitur, quo tempore in maſſa *m* duo gradus veloci-

tatis

tatis generantur, & ideo velocitas illius fit una cum velocitate communi æqualis 4, eodem in M gigni velocitatem æqualem 1 in contrariam plagam, ideoque unum velocitatis priſtinæ gradum in M corrumpi & ejus velocitatem fieri æqualem 1. Ex quo fit, ut juxta illa quæ §. 201. num. 11. docui, in *m* 12 gradus vis efficiantur, propterea quod tertio velocitatis gradui quinque vis, & quarto ſeptem vis reſpondere patet ex loco citato; in M vero ob eamdem rationem tres, ſed ducendi in maſſam 2, ideoque ſex deſtruantur; qui ſi a 12 ſubducantur, vis denuo generatæ reſtant gradus ſex. At ſi maſſæ & elaſtrum ante quieſcant, dum in *m* ab elaſtro gignitur velocitas = 2, & in M celeritas = 1, ſolum ſex gradus vis procreantur, quatuor ſcilicet in *m*, & duo in M. Cujus ratio liquet ex iis, quæ tum paulo ante, tum citato §. 201. diſſeruimus. Sit nunc *m* = 1, & M = 3, velocitas communis eadem ut ante, ſed intelligatur diviſa in tres partes, atque ideo ſit = 3. Ergo quo tempore elaſtrum in maſſa *m* gignet velocitatem = 3, eodem in M velocitatem = 1 corrumpet. Unde in *m* gignentur 27 gradus vis, & in M peribuntur quinque, ſed ducendi in maſſam 3, atque idcirco 15 corrumpentur, quos ſi ex alüs 27 generatis ſubducas, reſtabit vis denuo generata = 12. Si maſſæ quieſcant, vis utrimque generata erit pariter = 12, ſcilicet 9 gradus in *m*, & tres in M efficientur. Si *m* ſit = 1 & M = 4, & velocitas communis licet eadem ac prius, tamen intelligatur diviſa in partes quatuor, atque idcirco ſit = 4; quo tempore in *m* velocitas generabitur = 4, atque idcirco vis = 58, in M corrumpetur velocitas = 1, atque ideo vis = 7 ducta tamen in maſſam 4, ideſt vis = 28, qua vi ſubducta a 58 reſidua eſt vis generata ab elaſtro = 20. Jam vero ſi maſſæ quieſcerent, vis utrimque generata eſſet = 20, videlicet 16 gradus exſiſterent in *m* = 1 mota celeritate = 4. & 4 in M = 4 mota celeritate = 1. Ex quibus terminis progreſſio ſeriei uſque in infinitum intelligi poteſt. Unde ſi *m* ſit = 1 & M = quantitati infinitæ, velocitas eadem ut ante, ſed diviſa in partes æquales infinitas ponatur, vi, quæ in M corrumpitur, ſubducta ex vi, quæ in *m* generatur, reſiduam comperiemus æqualem illi, quam in duabus maſſis quieſcentibus elaſtrum nullo pariter motu communi donatum generaret. Cum vero elaſtrum ponitur altero extremo nixum immobili puncto, perinde eſt ac ſi ad maſſam infinitam idem extremum admoveretur. Siquidem nullum eſt corpus, quod natura ſit motui recipiendo

piendo minime aptum. Ergo idem contingeret, quod modo elicuimus. Unde ſi poſito motu communi tam vim genitam in *m*, quam vim corruptam in M in unam ſummam colligamus, ob rationem allatam celerioris fluxus preſſionum majorem ab eodem actionem, quam maſſis quieſcentibus exerceri comperiemus. Sin autem corruptam a generata ſubducimus, eamdem omnino vim in utraque hypotheſi generatam obſervabimus permanere.

§. 211. Scholion.

In colloquio decimi diei eamdem incudem tundit Riccatus colliſionis corporum inertium; in colloquio ultimo undecimi tria potiſſimum expendit ea ſubtilitate & diligentia, qua ſolet, in quorum tertio demonſtrat in colliſione obliqua duorum, trium & plurium corporum elaſticorum eamdem impetus & vis quantitatem ante & poſt conflictum permanere, in quo caſu trium, aut plurium corporum cum ante ipſum non ſatis, ut opus eſſet, accurate Mechanici eſſent verſati, immo aliqui ex ipſis, ut Eulerus & Marzagaglia, qui eſt auctor Diſſertationis Veronæ impreſſæ, quam ſupra expendimus §. 202. leges ex falſis ductas principiis ſtatuiſſent, eorum errorum confutat & corrigit, aliaſque ex veris ductas conſtituit: in qua re ſummopere gaudeo, quod alia methodo in eamdem incidit theoriam, quam nos citato loco, dum illum auctorem refutaremus, ex ſimpliciſſimis legibus colliſionis directæ corporum elaſticorum, & reſolutionis virium in duas laterales elicuimus §. 202. Ex quo fit, ut mihi nunc opus non ſit longius facere hac in re, præſertim cum de eadem mihi ex profeſſo ſit diſputandum, cum ad expendendas leges communicationis motus in corporum colliſione pervenero.

CAPUT NONUM

De nova quadam Sententia Cl. Anonymi circa virium æſtimationem.

§. 212. Scholion

Atque his cogitabam finem imponere huic de virium æſtimatione diſputationi. Sed me quodammodo a portu in altum revocat excogitata nuperrime a quodam docto Anglo ſententia, qua diſſentientes ſummorum Virorum opiniones conciliare nititur, contenditque litem eſſe de nomine. Mihi enim

opus

opus eſſe video illam accuratius expendere, proptereaquod ſi hæc obtineret, oleum & operam perdidiſſem, qui tot argumentis alteram convellere, alteram confirmare eſſem annifus, perinde ac ſi non de terminis, ſed de tota poſſeſſione inter Adverſarios Philoſophos eſſet contentio. Cum autem auctoris liber ad manus non ſit, illam referam verbis Cl. illius Anonymi, qui Elementa Phyſicæ Muſſchenbroekii notis illuſtravit, ne cum hic ſpecimen ad ſe tranſmiſſum paulum ſe immutaſſe, atque tyronibus accommodaſſe fateatur, nimis fortaſſe ab auctoris ſententia aberrarem, ſi rem aliis etiam ego verbis exponerem. Anonymus itaque ad §. 209. tom. 1. pag. 175 edit. Neapol. 1751. hæc habet.

APPENDIX CONCILIATRIX

Utriuſque virium æſtimandarum ſententiæ.

§. 213.

IDentidem mihi volventi animo, unde tanta Cl. Virorum diſſenſio & pugna in virium vivarum æſtimatione ortum duceret, ac modo in unam, modo in alteram earum menſuram propendenti, firma hæſerat opinio, quid obſcuri & involuti ea in quæſtione contineri, quod ſi ſemel extricaretur, diſcrepantes opiniones facile in concordiam devenirent, omnemque controverſiam de nomine tantum eſſe appareret. Ea in ſententia cum plurimorum Sapientum auctoritas me confirmabat; tum quod obſervarem effectus omnes mechanicos, ſive ſecundum unam virium ſupputationem, ſcilicet per velocitatem ſimplicem, ſive ſecundum alteram per velocitatis quadratum, æſtimarentur, eoſdem ſemper prodire.

At in eo expediendo herculeo veluti nodo non levem eſſe difficultatem facile mihi vel ex eo ſuaſeram, quod viderem nil ejus ſuboluiſſe præclariſſimis Philoſophis & Mathematicis, quos inter tot de hoc argumento excitata ſunt diſſidia, diviſis partibus, exaratis utrinque pluribus voluminibus, deſertaque potius, quam finita cauſa, non ſine Mathematicarum diſciplinarum dedecore; cum id eis præ ceteris eſſe debeat proprium, ut rerum evidentia, quam ubique præſeferunt, lites omnes & controverſias excludant. Præclariſſimis ergo diſciplinis ſuum reſtituet decus, deque iis optime meritus erit, qui diſcrepantes de virium menſura ſententias ſimul conciliaverit, ipſamque rem eo deduxerit, ut ambigendi diſputandique amplius nullus eſſe poſſit locus. Id

ſane

Digitized by Google

ſane ingenioſe molitus eſt Nicolaus de Martino noſtri hujus Lycæi Mathematum Profeſſor eximius, cujus ineundæ concordiæ rationem expoſitam habes cap. 19. *Diſſertat.* De corporum quæ moventur viribus, *quam anno* 1741. *edidit Cl. Petrus ejus frater. Paucis ab hinc diebus Marchio Alexander Rinuccinus, avita nobilitate, morum ſuavitate, & omnigena eruditione mihi ſemper colendus, ſignificavit mihi in nuperrimis Regiæ Scientiarum Academiæ Londinenſis Tranſactionibus elegantiſſimum contineri opuſculum* de quantitate ejuſque propria & impropria ſpecie, *in eoque inter cetera plurima declarari, quæ famigeratiſſimæ jam controverſiæ finem tandem conciliarent, omnemque illam quæſtionem de nomine tantum eſſe oſtenderent; cujus cum ſpecimen mihi humaniſſime exhibuiſſet, id quale ſit his Auctariis addere placuit, paulo quidem immutatum, Tyronibuſque noſtris accommodatum, quo ita quiſque facilius dijudicare ex ſe poſſit, rem acu tetigerit Auctor; nec ne.*

Duplex diſtingui cum Ariſtotele debet quantitatis ſpecies, propria *ſcilicet &* impropria *; prior eſt, quam altera ejuſdem ſpeciei quantitas metitur; veluti lineam rectam notis linearum menſuris metimur, quæ ſunt pollices, pedes, milliaria &c. & ſemel definita pedis longitudine, nulla amplius eſſe poteſt difficultas, quominus cujuſque alterius longitudinis clara & diſtincta idea animo formetur.* Impropria *vero quantitas eſt, quam nulla ejuſdem ſpeciei quantitas dimetiri poteſt, ſed ad ejus menſuram habendam alterius ſpeciei quantitas adhiberi debet, ad quam illa aliquam habeat relationem. Ejuſmodi eſt velocitas, quæ non aliter definitur, & menſuratur, quam per ſpatium dato tempore percurſum ad idem tempus applicatum, uti in* §. 124. *Atque hac ratione intelligimus, quæ ſit velocitas alterius velocitatis dupla, vel tripla, tum velocitatum rationes variæ.*

Quantitates propriæ ad tres tantum reducuntur, Extenſionem ſcilicet (ſive ſit linea, ſive ſuperficies, ſive ſolidum), temporis durationem, & numerum. Sed quantitates impropriæ longe plures ſunt, veluti velocitas, motus, denſitas, electricitas, elaſticitas, vis motrix quæcumque, probabilitas, ſeu ſors &c.

Quo vero quantitates impropriæ Scientiæ & Matheſeos objectum fiant, oportet earumdem prius claras, diſtinctaſque definitiones exhibere, quibus nempe facile intelligantur, plures ejuſdem ſpeciei quantitates invicem comparentur, & mathematicis ratiociniis ſubjiciantur; quod certe non aliis definitionibus obtineri poteſt, niſi quæ earum quantitatum menſuram notis aliis quantitatibus expreſſam complectuntur. Exemplo eſſe poſſunt, quas Vir ſummus Iſaacus Nevvtonus

tonus Philoſophiæ Naturalis Principiis Mathematicis præmiſit definitiones, quæque quantitatum, de quibus agit, proprias menſuras continent. Quæ vero impropriarum quantitatum definitiones traduntur, nullis certis menſuris eas explicantes, nullam earumdem claram, diſtinctamque ideam animo ingerunt; ideoque ineptæ prorſus ſunt ad illas invicem comparandas, earum detegendas rationes, ac ratiociniis Mathematicis ſubjiciendas.

Ex eo itaque fonte orta eſſe videtur huic Auctori interminabilis diſputationis cauſſa, quod ſcilicet virium menſuram, quæ definitione contineri debebat, Mathematicis ratiociniis & experimentis ſtabilire Philoſophis placuerit. Niſi corporum motorum vires ad aliam quantitatem, cujus nota ſit menſura, ipſa definitione referantur, intelligi numquam vel determinari poterit, quæ vis alterius ſit dupla, vel tripla, vel quævis alia inter eas intercedat ratio. Virium ſane conceptus ſine hac menſura nimium vagans eſt, incertus, & indefinitus, atque idcirco andabatarum more æternæ erunt pugnæ, ſi ex ea indeterminata, & obſcura notione mathematicas propoſitiones inferre libeat: omnis vero illico evaneſcet controverſia, ingenſque propoſitionum ſeries orietur, ſi talis virium ponatur definitio, quæ earumdem menſuram aliis notis quantitatibus contineat.

Quamobrem ſumma laude dignus videtur Nevvtonus, qui cum de viribus centripetis eſſet acturus, ſeptimam & octavam definitionem ita poſuit: Vis centripetæ quantitas acceleratrix eſt ipſius menſura velocitati proportionalis, quam dato tempore generat. Vis centripetæ quantitas motrix eſt ipſius menſura proportionalis motui, quem dato tempore generat. *Cum ergo Nevvtonus vim corporis moti per genitam velocitatem definiendam, dimetiendamque eſſe ſtatuit, puram putam definitionem profert, qua inde tuto licet vires invicem conferre, & earum rationes varias determinare.*

Eſt præterea hæc definitio ſimplex & clara, ut patet, tum communi de viribus loquendi & concipiendi modo accommodatiſſima. Nam 1. *ratum communiterque acceptum omnibus eſt, aucta corporis velocitate, vel diminuta, ejus vim productricem augeri, vel minui; deſtructa & evaneſcente velocitate, corporis quoque vim perire, & e converſo; quod quidem ei definitioni oppido quadrat.* 2. *Si duo corpora æqualibus motibus invicem occurrant, & in ictu utriuſque motus ſine novi productione pereat, omnes incunctanter pronunciant, eorum corporum vires æquales fuiſſe; quod in idem recidit, ac eas definiri ex corporum illorum velocitatibus & maſſis, cum experimento conſtet eo in caſu velocitates maſſarum reciprocam rationem ſervare, & eſſe*

adeo

adeo producta ex velocitate & maſſa invicem æqualia. 3. In Mechanicis etiam cum applicata potentia & pondus ſive reſiſtentia ſunt in æquilibrio, hoc eſt, cum machinarum ope potentia & pondus reciprocam ſuarum velocitatum rationem habent, vires ponderis & potentiæ communiter æquales pronunciantur; quod id ipſum eſt ac eas definire per velocitatem & maſſam ſecundum allatæ definitionis ſenſum. 4. Vis gravitatis, cum in corpore conſtans & æqualis ſupponitur ſecundum Galilæi hypotheſim, quiſque incunctanter adfirmat ſecundum ejuſdem definitionis ſenſum, æqualibus temporibus comparatas corpori velocitates æquales eſſe. Nil ergo clarius, ſimplicius, & communi hominum ſenſui accommodatius ea definitione proferri poteſt. Atque id totum eſt, quod ad accuratam definitionem requiritur. Huc ſane ſpectant, ſi recte expendantur, omnia argumenta, quæ hujus ſententiæ patroni in medium proferunt.

Quod ſi quis haud ſatis ſibi videatur velocitatem virium menſuram tamquam definitionem ſtatuiſſe, malitque propoſitionem eam eſſe ratiocinio vel experimento comprobandam, ab eo petam, ut antequam ejus propoſitionis demonſtrationem proferat, clare nitideque definiat, quid per vim intelligat, quid per vim alterius duplam vel triplam ſibi velit. Id certe hujuſmodi definitione præſtare debet, quæ Vis primam & notam menſuram contineat, alias nil de ejus quantitate adfirmare poterit, nil quod ab aliis intelligi. Quod ſi in ea definitione velocitatem adhibeat ceu primam & notam menſuram, jam patet idipſum ſibi aſſumere, quod probandum ſtatuerat. Liquet igitur ratiociniis mathematicis, & experimentis non probari vim corporis moti eſſe ut velocitatem, ſed definitione tantum id adſtrui, apte quidem & ſimpliciter.

Sed expendamus modo, quæ Leibnitius ejuſque aſſeclæ hac de re docent, corporum ſcil. motorum vires eſſe, ut velocitatum, quæ ab iiſdem producuntur, quadrata. Si id eis placeat, tamquam virium definitionem proferre, non repugnabimus, alias de nomine erit controverſia. Atque ita ei definitioni conſtanter inhærendo, porro intelligemus vim alterius quadruplam eſſe, quæ duplam corpori velocitatem impartitur: noncuplam alterius, quæ triplam dat corpori velocitatem, & ita in infinitum in duplicata ſemper velocitatum ratione vires ſumentur. Neque ſane, re ita ſemel conſtituta, ullus eſſe poterit in mechanicis effectibus æſtimandis error, & nomine tenus, non re diſcrepantes erunt concluſiones, quæ eam ſequuntur definitionem, ab iis, quas ex altera virium menſura per velocitatem ſimplicem alii deducunt Philoſophi. Eodem ſane modo ſi quis ex ſex tantum digitis pe-

Digitized by Google

dis menſuram fieri ſtatuat, indeque adfirmet perticam 20 pedes continere, is ſane reipſa eamdem perticæ quantitatem tribuit, ac alter, qui pedem definiens duodecim ejuſmodi digitos continere, perticam hinc inferat decem tantum pedibus æqualem eſſe: eadem, etſi diverſis nominibus, eſt utrique perticæ longitudo.

Etſi vero hæc virium Leibnitiana definitio clara & diſtincta ſit, nequeatque in dubium verti, quod nulla nominis definitio poſſit eſſe falſa, inficiari tamen nequit minus ſimplicem, minuſque communi loquendi & concipiendi modo accommodatam illam eſſe, ut ex ſuperius dictis liquet. Quid ſane nos cogit ad velocitatis duplicatam rationem confugere, cum ejuſdem ſimplex ratio ſufficiat? Atque huc ſane reducuntur, ſi recte expendantur, quæcumque tot elaboratis experimentis & ratiociniis contra Leibnitii ſententiam opponuntur abſurda.

Verum Leibnitius, ceterique ejus ſententiæ patroni, virium menſuram per velocitatis quadratum, propoſitionem eſſe experimentis & ratiociniis innixam, non ad libitum confictam definitionem ajunt. Quod ſi ab iis quæratur, ut ſi res ita eſt, virium definitionem proferant, earumdem menſuram per alias notas quantitates, ut oportet, complectentem, qua ad eorum demonſtrationes intelligendas manuducamur, & cui illæ innitantur; reſpondent altitudinem, ad quam corpus comparata vi aſcendit, eſſe integrum ejuſdem vis effectum: adeoque per eamdem primitus menſurari, & definiri poſſe vim, cum effectus cauſæ ſuæ proportione correſpondeat. Sunt autem hujuſmodi altitudines, ut acquiſitarum velocitatum quadrata; igitur iiſdem quadratis proportionales erunt vires, & per illa menſurari & definiri debent. Atque hoc eſt præcipuum Leibnitianæ ſententiæ argumentum.

Sed vereor ne in hoc ratiocinio aliquid humani paſſus ſit Leibnitius. Imprimis cum ad ſuam ſententiam probandam principia utrique parti communia adhibenda eſſent, Vir Cl. id aſſumit, quod contrariæ ſententiæ fautoribus non probatur, altitudinem ſcilicet, ad quam corpus acquiſita vi aſcendit, ejuſdem eſſe effectum integrum.

Nam contra hi contendunt immediatum, primum, & integrum comparatæ Vis effectum, illius eſſe tantum velocitatem: ſpatia vero, vel altitudines, quæ eodem tempore percurruntur, comparatis viribus eſſe proportionalia, non vero ſpatia, quæ diverſis peragrantur temporibus; tum illa ſpatia velocitatum ſimplicem rationem ſequi, quemadmodum adnot. ad §. 194. a. ex horum Philoſophorum ſententia expoſuimus. Quod enim Leibnitiani opponunt vires decidentibus libere corporibus comparatas effectus habere determinatos, eoſque eſſe tantum altitudines, ad quas elevari poſſunt, atque adeo per illas altitudines eſſe definien-

Digitized by Google

ſiniendas vires, id contrariæ ſententiæ patronis improbatur. Urgere enim hi poſſunt in iis peragrandis altitudinibus comparatas deſcenſu vires non libere agere, præpeditas indeſinenter a conſtanti corporum gravitate deorſum ea urgente. Quod ſi poſtquam acquiſitæ ſunt decidentibus corporibus vires, eadem omni gravitate ſpoliari, omnemque aliam removeri extrinſecam retardantem cauſſam ſupponamus (uti imaginari par eſt, quo acquiſitarum virium libere agentium effectus habeantur), iiſdemque comparatis viribus corpora tum moveri vel horizontaliter, vel ad horizontem perpendiculari directione ſingamus, æternum uniformiter moveri pergent ea corpora, iiſdem ſemper velocitatibus, quas in ſine lapſus ſibi compararunt; qua certe ratione non erunt amplius earum virium determinati & deſiniti effectus, ſed qui cum aucto tempore augentur, qualia ſunt inde emenſa ſpatia. Quod ſi ex his deſinire libeat earumdem virium rationes, jam patet eos ſumendos eſſe effectus, ſeu ea tantum ſpatia, quæ eodem tempore percurruntur. Sed hæc utpote æquabili motu peragrata, ſunt ut velocitates ſimplices; ergo in eadem ratione erunt comparatæ corporibus libere decidentibus vires. Quæ ergo vires Leibnitii calculo duplicatam velocitatum rationem obtinebant, accuratiori inita ſupputatione earumdem ſimplicem rationem habere comperiuntur.

His ergo, ſimilibuſque ſalebris jactantur Philoſophi, cum virium menſuram experimentis & ratiociniis ſirmandam eſſe contendunt. Rei natura id non patitur; omniſque virium dimenſio & comparatio ſola tantum deſinitione ineunda eſt; quæ quidem aptior, ſimplicior, clarior eſſe nequit, quam ſi cum Newtono dicatur: Vis motricis quantitas acceleratrix eſt menſura ejuſdem velocitati proportionalis, quam dato tempore generat; ejuſdem vero quantitas motrix illius menſura motui, quem dato tempore gignit, proportionalis.

§. 214. Propoſitio

Hactenus Anonymus in referenda Cl. Angli ſententia, ad quam examini ſubjiciendam mihi primum opus eſſe video expendere quæſtionem hanc dialecticam, an deſinitionibus uti poſſimus tamquam certis atque evidentibus principiis, unde alia eruere ac demonſtrare liceat. Dum enim Auctor pronunciat virium menſuram deſinitione contineri oportere, non experimentis aut ratiociniis oſtendi, nullam nominis deſinitionem poſſe eſſe falſam, veram eſſe utramque Carteſii & Leibnitii virium æſtimationem, illam ſumta velocitate pro menſura earumdem, hanc poſito velocitatis quadrato, mihi ſuſpicionem ingerit homini ſaltem ex aliqua parte probari princi-

pium quoddam, quod in ore Scholaſticorum audivi: *unuſquiſque juxta ſua principia bene diſcurrit*. Quod quatenus intelligi oporteat, ne in palmares incidamus errores, propoſitæ ſolutione quæſtionis faciam perſpicuum. Hoc igitur in anteceſſum conſtituto definitionem nominis eſſe illam, in qua non conſtat, utrum ſimul eſſe poſſint notæ, quæ ad aliquid cognoſcendum ipſum in ſe & ab aliis omnibus internoſcendum aſſumuntur; quæ ſaltem duæ eſſe debent, propthereaquod objectum omnino ſimplex unaque ſimplici notione percipiendum, uti eſt ens generatim inſpectum, ipſum per ſe intelligi quidem poteſt, explicari autem non poteſt; definitionem vero rei, in qua conſtat eaſdem notas ſimul eſſe poſſe; ajo primum in quacumque definitione ante opus eſſe, ut vel ex ſe conſtet vel oſtendatur notas ea contentas ſimul eſſe poſſe, quam ut illa tamquam certo ad alia elicienda principio abutamur. Si enim id non liqueat, fieri poteſt, ut eæ notæ ſimul eſſe non queant, atque idcirco quod ex illis coalitum ponitur, ſit impoſſibile atque ideo nec ens nec ullis entis attributis donatum. Quo poſito nihil eorum, quæ inde inferrentur, certum eſſet & exploratum; immo quidquid efficeretur, eſſet falſum & impoſſibile, ſi notarum copulatio inter ea, quæ eſſe nequeunt, recenſeretur. Exemplo eſſe poteſt communis illa vacui definitio, ſpatium omni corpore deſtitutum, quæ omnibus impoſuit Philoſophis tum iis, qui vacui poſſibilitatem defendunt, tum iis, qui impugnant §. 8. & ſeq. illis, quia cum clare & perſpicue viderent poſſibilitatem omnium corporum e cubiculo educendorum, quin alia ſuccederent, & parietes moverentur, crediderunt reſtare ſpatium ſimul extenſum & omnis expers corporis extenſæque ſubſtantiæ, indeque intulerunt extenſionem non ſoli ſubſtantiæ creatæ extenſæ convenire, & alia quamplurima, quæ a communibus abhorrent notionibus, ut ſuo loco notatum eſt; his autem, quia cum extenſionem cum negatione ſubſtantiæ extenſæ componi non poſſe viderent, etiam poſſibilitatem omnium corporum ex aliquo ſpatio educendorum præfracte negarunt, tametſi ea clariſſimis notionibus contineretur. Ex iis autem, quæ §. 8. & ſeq. diſputavimus, nemo non colligit illa duo ſpatium extenſum, & negationem cujuſcumque ſubſtantiæ extenſæ in una ſede morari non poſſe, & ex hac præjudicata opinione, quam definitio vacui inſinuavit, factum eſſe, ut alterutrius ſententiæ

tiæ Patroni ſe inextricabilibus nodis aſtringerent. Sic ex definitione extenſi continui originem duxiſſe reor omnes tricas atque anguſtias, in quas ſe conjecerunt Philoſophi in ejuſdem proprietatibus explicandis. Nam extenſum continuum definientes id, quod habet partes extra partes, inter quas nulla alia interponi poſſet, qua definitione ideam imaginariam contineri docuimus §. 21. num. 9. toti in eo fuerunt, ut qua ratione ex partibus continuum coaleſceret, docerent, & extenſionis continuæ rationem in iiſdem partibus quærerent. In quo quantum a ſcopo aberrarint, planum fecimus, cum illud oſtendimus partes re ipſa diſtinctas in vero continuo non eſſe, ac tantum abeſſe, ut hæ ſint extenſionis ratio, ut potius extenſio ante omnes etiam infinitas partes reperiatur §. 19. & 20. Hujus vero & aliorum, quæ hic conſequuntur, errorum fons & origo ſunt illa duo, quæ perinde ac ſi una in ſede morari poſſent, ſimul conjunguntur, extenſio continua eaque ex partibus re ipſa diſtinctis & ſe proxime contingentibus conſtans. Mitto alia exempla, quæ afferri poſſent, cum ex ratione nuper allata & ex iis, quæ attulimus, ſatis liqueat id, quod propoſitum eſt, in qualibet definitione opus eſſe, ut notas illa comprehenſas poſſe ſimul copulari ante perſpicuum fiat, quam illam veluti certum & exploratum principium in aliis concludendis uſurpemus.

2. Quo conſtituto adverto poſſe definiri vel rem, quæ per ſenſus in animum illabitur, uti arborem, quam video, vel nomen, quod imaginatione percipio, illudque in duplici ſtatu; vel enim nondum determinatum eſt ad aliquid ſignificandum, vel jam determinatum eſt. Si definio rem, ut arborem ante oculos poſitam, aut nomen jam ad rem ſignificandam determinatum, ut arborem, cujus nomine a me & ab aliis ea intelligitur, quæ talem in ſenſus impreſſionem antea fecit, illud ſtatuo non ſatis eſſe enumerare notas aliquas, quæ ſimul eſſe poſſint, ſed opus eſſe illas afferre, quæ ſunt propriæ ejuſdem, ideſt vel eſſentialia, vel attributa propria. Cum enim ex altera parte definitio inſtituta & comparata ſit ad eum finem, ut res ipſas in ſe cognoſcamus, & alias ab aliis omnibus internoſcamus, ex altera vero ſolæ notæ propriæ ſeu vel omnia eſſentialia rei vel attributa propria nobis utrumque præſtare poſſint §. 22. num. 40. & ſeq. & num. 16. & 23. evidenter conſequitur non ſatis eſſe in definitione rei quaſcum-

que poſſibiles notas afferre, ſed illas in medium adduci oportere, quæ ſint propriæ ejuſdem, cujuſmodi ſunt ſola eſſentialia & attributa propria. Quod valet etiam in definitionem nominis ad rem ſignificandam determinati, quia perinde eſt definire rem & definire nomen, quod ad illam ſignificandam jam reſtrictum eſt.

3. At ſi nomen nullum adhuc ſignificatum habet, ajo ſatis eſſe in illo definiendo duas afferre notas, quæ ſimul eſſe queant, iiſque notis optimam definitionem formari. Nam nomen abhuc indifferens a definitione ſuum ſignificatum primo accipit, ab eaque determinatur ad aliquod ens ſignificandum. Ergo bona erit, ſi proprias ejuſdem notas enumerabit. Duo vero, quæ poſſunt ſimul eſſe, conſtituunt aliquod ens, cum poſſibile & ens idem ſit, ſuntque ejuſdem eſſentialia vel attributa propria. Nam eatenus non erunt eſſentialia aut attributa, quatenus poterunt eſſe accidentia; eatenus vero non erunt propria, quia communia. At ipſamet accidentia etſi non ſubſtantiæ tamen alii accidenti neceſſaria ſunt, illudque tamquam eſſentia vel attributum componunt, uti quatuor latera æqualia ſunt accidentia corpori, eſſentialia tamen figuræ quadratæ, quæ corpori accidit. Quæ autem ſunt communia individuis, ſunt propria ſpeciei, quæ communia ſpeciei, ſunt propria generis infimi, quæ communia generi infimo, ſunt propria generis ſuperioris primi gradus & ita porro. Quare illa duo poſſibilia, quæ definitio complectitur, erunt eſſentialia vel attributa propria ſin minus ſubſtantiæ, ſaltem accidentis, ſin minus rei determinatæ, ſaltem indeterminatæ, ideſt vel ſpeciei, vel generis infimi, vel ſuperioris primi gradus &c. uno verbo illius entis, ad quod ſignificandum nomen a definitione determinatur. Igitur definitio nominis ad rem aliquam ſignificandam nondum determinati bona erit certumque principium, ſi modo notas, quæ ſimul eſſe poſſunt, complectatur.

4. Ex his multæ eæque maximi uſus definitionum regulæ oriuntur, quas mihi hic eſſe prætereundas video, ne a propoſito nimis aberrem, atque ut propius accedam ad id, cujus gratia hanc in locum excurri. Si definienda ſuſcipiatur menſura vis, nemo non videt hic definiri nomen jam determinatum ad rem ſignificandam; ſiquidem nomine vis intelligitur ea, qua cientur corpora, cum moveri conſpicimus,

quam

quam aliquid eſſe abſoluti & permanentis & a motu diſtincti ſuo loco probavimus §. 119. nomine autem menſuræ id, quod aliquoties repetitum aut per ſolos integros numeros, aut per integros ſimul & fractos rem, quæ eſt metienda, exæquat §. 43. num. 4. & ſeq. Quamobrem ex iis, quæ hactenus diſputavimus, compertum ſit non ſatis eſſe notas aliquas poſſibiles in ejus definitione numerare, ſed opus eſſe, ut quæ aſſeruntur, ſint propriæ menſuræ vis. Unde ſuo non funguntur munere nec Carteſiani, cum ſimpliciter ſumunt menſuram vis eſſe materiam, quæ movetur, ductam in velocitatem, nec Leibnitiani, cum materiam ductam in quadratum velocitatis, ſed utriſque incumbit id ita eſſe aut rationibus aut experimentis evincere, cum ſecundi adverſus primos dicere poſſint, ut dicunt, eam eſſe menſuram quantitatis motus, qui a vi generatur, non vis, quæ illum generat, ſecundi autem reponere, ut reponunt, eamdem eſſe menſuram cauſſæ & effectus, qui ab illa eſt. Quamobrem fallitur auctor & contra Logicæ regulas peccat, dum virium menſuram ſimplici definitione contineri, non autem monſtrari oportere contendit.

5. Nec enim verum eſt, quod ſubjungit, id fieri non poſſe; ad hunc enim finem, ut intelligamus quænam vis ſit alterius dupla vel tripla vel &c. neceſſe non eſt funditus ſcire quidnam ſit vis, ſed ſatis eſt ea tenere,. de quibus jam diſſeruimus, eam eſſe aliquod abſolutum & permanens, diſtinctum a motu, quod ſit ejuſdem cauſſa, & preſſionibus fluentibus generari. Nam quod attinet ad primum, nec funditus comprehendimus quid ſit extenſum, & tamen ipſo auctore fatente quodnam ſit ejus duplum aut triplum aut &c. cognoſcimus. In quo dimetiendo unico ſenſuum teſtimonio utimur, cum, ex. gr. linearem quamdam menſuram per ſuperimpoſitionem in alia linea aliquoties contineri videmus §. 43. Quidni etiam vim ſimiliter quimus metiri? Fac enim duo corpora in lancibus libræ æqualium brachiorum ſe in æquilibrio ſuſtinere, deinde tertium grave cum iis duobus eidem impoſitis lanci; nonne hinc intelligimus vocata in auxilium ratione tertium illud eſſe duplo gravius quolibet ex iis duobus? Quod vero pertinet ad ſecundum, in modo, quo vis aut in corpore generatur fluxu preſſionum alterius, aut a corpore oblique incidente cum aliis corporibus communicatur, quam efficaces

rationes pro ſtatuenda Leibnitiana virium æſtimatione & menſura poſitæ ſint, ſatis ſuperque conſtat ex iis, quæ hujus diſputationis initio & alibi diſſeruimus.

6. Ergo liquet ex eo, quod vis funditus intelligi nequeat, non effici menſuram virium alia ratione haberi non poſſe, quam pura definitione &, ut ajunt, *ſuppoſitione*. Nec majus eſt momentum in ea doctrina duplicis generis quantitatum. Miſſo enim, quod ad rem valde non facit, ubi tempus inter primas quantitatis ſpecies numeretur, ad idem genus redigendum eſſe etiam motum in ea ſententia, quam ſupra defendimus, temporis a motu nequaquam diſtincti §. 39. & ſeq. & conceſſo vires ipſas per ſe ſupputari non poſſe, & idcirco earum menſuram repeti aliunde oportere, nego inde colligi poſitum eſſe in libera cujuſcumque facultate ad quam velit menſuram vires referre. Quod ut doceam, loco exempli pono denſitatem corporis, quam inter quantitates improprias collocat, quod eam nulla ejuſdem ſpeciei quantitas metiri poteſt, ſed ad ejus menſuram habendam alterius ſpeciei quantitas adhibenda eſt, & adverto Phyſicos non levibus rationibus & experimentis didiciſſe in æqualibus materiæ particulis æqualem gravitatem reperiri, & in majoribus majorem non ſimpliciter, ſed in ratione majoris maſſæ, indeque intuliſſe denſitatem unius corporis ad denſitatem alterius ejuſdem molis eſſe ut gravitatem primi ad gravitatem ſecundi. Hinc autem factum eſt, ut pro menſura denſitatis gravitatem maſſarum ſub eodem volumine ſtatuerent, non pro libito, ſed illo innixi principio, quod ex altera parte metiri denſitatem non ſit illam abſolute cognoſcere, quanta ſit in ſe, quod in nullo genere quantitatum continuarum fieri poſſe ſupra docuimus, ſed ſolum relate, ideſt percipere quam habet rationem primi corporis denſitas ad denſitatem alterius §. 41. & ex altera ſi hæc ratio ipſa per ſe cognoſci non queat, bene percipi poſſe, ſi comparetur cum ratione aliarum duarum, quæ his duabus proprietatibus gaudent, prima, ut earum ratio ſit nobis aliunde perſpecta, cum ignotum per aliud pariter ignotum intelligi nequeat; ſecunda, ut primæ duæ ſint in ratione poſteriorum; propterea quod ſi primæ aliam quam ſecundæ, ſequerentur rationem, valde aberraret a vero, qui rationem illarum rationi, quæ inter has intercedit, æqualem poneret. Cum vero & ratio inter gravitates corporum molis æqualis multis modis, ut a Phyſicis conſtat, queat obtineri, & oſtendatur gravitates eſſe in eadem,

dem, ac denſitates, ratione; hinc factum eſt, ut optime a Phyſicis pro menſura denſitatis gravitas conſtituta ſit: ut ſi falſum foret gravitatem eſſe in denſitatis ratione, pro menſura denſitatis gravitatem amplius adhibere non poſſent.

7. His poſitis, quibus hæc res ad vivum mihi reſecari videtur, plane conſtat virium menſuram pro libito confingi non poſſe, ſed id eſſe adhibendum, quo ratio inter duas vires intelligatur; hanc autem rationem intelligi non poſſe niſi ope duarum aliarum quantitatum, quarum ratio non ſolum nobis perſpecta ſit, verum etiam exæquet rationem, quæ inter duas vires intercedit. Id vero ſupponendum non eſt ſed probandum, niſi per ſe conſtet. Hoc admiſſo inter Recentiores convenit duas vires eſſe in eadem ratione, ac ſunt duo totales effectus ab iiſdem geniti, nec immerito; nam id primis iiſque evidentioribus principiis conficitur. In eo vero Carteſiani & Leibnitiani diſſentiunt in definiendis effectibus, quibus vires agentes proportione reſpondent. Primi volunt in deſignando effectu vis, cui hæc proportionalis eſt, eſſe habendam rationem ſolius motus, quo corpus vi donatum pellitur, qui motus ab ipſis ponitur æqualis producto ex maſſa in velocitatem, vel illius, qui ex incurſu directo corporis duri in aliud durum exſiſtit; ſecundi vero illius alterius, qui vel conflictu obliquo corporum durorum fit, vel actione elaſtrorum aut generatur aut corrumpitur. Ex his autem compertum fit quæſtionem non eſſe de nomine, ſed de ſumma re. Eo enim revolvitur, ut ſtatuatur quinam ſint effectus pleni virium, quibus hæ proportione reſpondere debeant, & quæ inter eoſdem effectus ratio intercedat.

8. Ad id autem definiendum præter ea, quæ in ſuperioribus diſputata ſunt, adverto ex Geometria duplicem poſſe diſtingui menſuram quantitatis, generalem ſcilicet, & particularem; generalis eſt, quæ in omni eventu & hypotheſi monſtrat quænam inter duas quantitates ratio interſit, particularis autem, quæ id præſtat in aliquo ſolum eventu. Ut ſi rationem inter duo recta parallepipeda velimus cognoſcere, generalis menſura eſt productum ex altitudine in latitudinem & longitudinem, adeo ut in omni caſu primum parallepipedum ſe habeat ad ſecundum ut productum ex altitudine, latitudine, & longitudine primi in productum ex altitudine, latitudine, & longitudine ſecundi. At ſi parallepipeda ſint æqualiter alta, in hoc particulari caſu menſura particularis erit productum ex longitudine in latitudinem,

quia

quia propter altitudinum æqualitatem, quæ idcirco rationem non variat, primum ad ſecundum eſt in ratione producti ex longitudine primi in latitudinem primi ad productum ex ſimilibus dimenſionibus ſecundi. Hinc efficitur, ſi duæ quantitates rationem aliarum duarum ſequantur, non continuo primas ſemper eamdem rationem tenere, ſed videndum, an poſteriorum ratio ſit in omni eventu, necne rationis priorum menſura. Ad hoc autem internoſcendum multum confert diſtinguere omnia elementa, ex quibus quantitates generari intelliguntur. Quamobrem quia parallepipedum generari percipitur tamquam elementis ductu baſis rectangulæ ſupra altitudinem & rectangulum ductu longitudinis ſupra latitudinem, hoc productum eſt vera generalis menſura, cui parallepidum in omni caſu reſpondet.

9. Ex his porro efficitur, ſi duæ vires eſſe in ratione duarum quantitatum obſerventur, non continuo fieri has quantitates eſſe generalem virium menſuram, ad quam vires omnes ſint exigendæ, propterea quod ob æqualitatem aliquorum ex iis, ex quibus dictæ vires tamquam elementis componuntur, fieri poteſt, ut eadem ſolum in ea æqualitatis hypotheſi talium quantitatum rationem ſequantur. Jam vero vires, quæ aut in reſolutione cum planis a corpore oblique incurrente communicantur §. 127. ſeu vi repellente plani in illo perimuntur, aut in compoſitione a duabus viribus ad angulum concurrentibus exſiſtunt, non ſunt in ratione producti ex maſſa in velocitatem propter ea, quæ §§. 127. 128. 206. 207. 208. 209. fuſe diſputavimus. Ergo productum ex maſſa in velocitatem vera & generalis virium menſura eſſe non poteſt. Eaſdem autem ſequi rationem producti ex maſſa in quadratum velocitatis iiſdem locis evicimus. Ergo hoc potius productum pro generali virium menſura ſtatuendum eſt, niſi perſpicue conficiatur vires quandoque ab ejuſdem ratione diſcedere, quod non fit. Siquidem hoc eam habet generalis menſuræ notam, quam dedimus paulo ante, quia dum vis generatur, tria, ex quibus exſiſtit, elementa obſervantur, quantitas preſſionis, celeritas, qua fluit, & tempus, quo fluxus durat, ut §§. 128. 208. & ſeq. cum librum Riccati expenderem, planum feci, quorum omnium elementorum ratione ſubducta colliguntur, quæ, ut ibidem oſtendimus, ſemper productum ſequuntur ex maſſa in quadratum velocitatis. Quare ſi in aliquo eventu, ut in æquilibrio, vires gravitatis obſervantur in ratione producti ex maſſa in ſimplicem velocitatem, id non contingit, quia pro-

productum ex maſſa in quadratum velocitatis non ſit virium generalis menſura, ſed eo quod unum ex iis elementis ſcilicet tempus eſt æquale in qualibet ex maſſis, quæ ab extremis vectis ſuſpendantur §. 201. num. 27. & §. 208. num. 9. Quo fit, ut ſimplex velocitas una cum maſſa appareat, non ejuſdem quadratum. Atque hæc eſt una ex rationibus, cur in conflictu corporum perfecte durorum virium communicatio & contrariarum deſtructio perinde fiat, ac ſi eædem ſimplicem velocitatum rationem ſequerentur, propterea quod dum duo corpora dura ſibi mutuo occurrunt, vires utriuſque repellentes debitos velocitatis gradus in utraque maſſa, & ideo etiam vires, quæ reſpondent iiſdem, eodem tempore perimunt §. 201. num. 10. & ſeq. Ceterum ex iis, quæ §. citato diximus, compertum fit qua ratione vires motrices in colliſione corporum perfecte durorum rationem quadrati velocitatis ſequantur.

10. At enim effectus geniti a viribus corporum, quæ quidem moventur, ſed cum aliis partem aliquam vis non communicant, cum dicta menſura non congruunt. Hi enim effectus aliud non ſunt, quam productum ex maſſa in velocitatem, ſive celeritas toties repetita, quot ſunt partes in maſſa. Huic difficultati jam fecimus ſatis §. 131. ea præſertim diſtinctione inter quantitatem motus momentaneam ſive initium motus, & inter quantitatem ejuſdem aliquo tempore durantem. Hic tamen addo in data hypotheſi corpus in vacuo eſſe; in illo vero non dari translationem a loco extenſo ad alium, quam in motu omnes Philoſophi eſſe volunt, jam declaravimus §. 114. num. 8. Qui ergo poteſt eſſe plenus virium effectus ille motus, qui ſemper in corpore vi percito non reperitur? & ſi non ſemper eſt, qua fulti ratione menſuram virium inde repetent? Quid ergo facit vis illa in vacuo? Interiorem aliquam mutationem, quemadmodum ideæ in anima, & ut citato §. num. 9. inſinuavi: quam ſi me plane non intelligere profiteor, nemo incuſaverit, niſi qui vim corporum funditus ſe percipere credat.

11. His autem explicatis, quinam ad Leibnitianam menſuram caſus non redigantur, non video. Quod ſi ad hujus menſuræ normam omnes exigi poſſunt, ad Carteſianæ vero normam aliqui ſaltem nequaquam, ex iis, quæ diſſeruimus, planum fit veram & generalem virium menſuram eſſe illam, quam ſtabilivit Leibnitius; Carteſianam autem ſolum in aliquo caſu poſſe uſurpari. Illud ſaltem certo certius conficitur falſum eſſe laudatum auctorem,

rem, qui alterutram pro libito ſumi poſſe virium menſuram arbitratur, cum fieri nequeat ut duæ vires in omnibus eventibus ita ſe habeant, uti duæ quædam quantitates, & in iiſdem pariter ſe habeant ac aliæ duæ diverſæ, quæ aliam, quam primæ, rationem ſequantur.

12. Neque ſimile eſt, quod ait de perticis duabus, quarum altera conſtet 20 pedibus in hypotheſi pedis ſex digitos longi & altera 10 in hypotheſi pedis, qui 12 digitorum longitudinem habeat. Nam ſi fuerint duo agri, quorum alter ſit longitudinis 100 perticarum, quarum ſingulæ 12 pedum, alter 10 perticarum ſimilium, longitudo primi agri ad longitudinem ſecundi erit in ratione 100 perticarum 12 pedum ad 10 ſimiles perticas; ſed quia duplus numerus perticarum ſex pedum eamdem rationem ſequitur, ideſt 200 perticæ ſex pedum ad 20 pariter ſex pedum habent eamdem rationem, ac 100 perticæ pedum 12 ad 10 ſimiliter pedum 12; hinc mirum non eſt, ſi longitudo primi agri & longitudo ſecundi rationem perticarum 200 & 20 ſequuntur. Ex quo fit, ut tam perticæ pedum 12 quam pedum ſex pro menſura eorumdem agrorum ſumi poſſint. Quæ ſi auctor velit ad duas vires transferre, prius docere debet duo producta ex maſſis in velocitates eſſe in eadem ratione, ac duo producta ex iiſdem maſſis in quadrata velocitatum, quam affirmare duarum virium menſuram eſſe poſſe utrumque productum, propterea quod, ut oſtendi, id perinde eſt, ac aſſerere duas illas vires eam ſequi rationem, quam tum prima producta tum ſecunda tenent. Quod fieri non poteſt, niſi ponatur id, quod prorſus eſſe nequit, inter prima & ſecunda producta eamdem intereſſe rationem.

13. Quod vero ad probandum id, quod aſſumit, utramque menſuram ad vires æſtimandas pro libito accipi poſſe, inſinuat in explicandis mechanicis effectibus concluſiones, quæ Leibnitianam menſuram definitione comprehenſam ſequuntur, nomine tenus, non re diſcrepantes futuras ab iis, quæ Carteſianam, id uberius declarandum eſt, ut hæc eadem præjudicata opinio ex Phyſicorum animis evellatur. Nam prius adverto id in aliquos cadere effectus, non in omnes. Siquidem, ut paulo ante etiam monui, & ſuis locis oſtendi fruſtra conantur Phyſici, dum leges compoſitionis, aut reſolutionis virium ex Carteſiana earum menſura contendunt elicere. Quod ſi in aliquibus id uſuvenit, ut in æquilibrio corporum gravium, ideo fit, quia ut paulo ante monſtravi, unum ex tribus elementis, ſcilicet tempus, quo preſſio fluit, utrim-

utrimque eſt æquale. Similiter cum corpora dura velocitatibus, quæ ſint in ratione inverſa maſſarum, directe ſibi occurrunt, futuram eſſe quietem efficitur in utroque ſyſtemate, in Carteſiano, quia contrariæ vires æquales ſunt, in Leibnitiano ea ratione, quam Reicterus concludit in Actis Lipſienſibus anni 1729. & Maupertuiſius §. 201. num. 43. atque iis etiam de cauſſis, quas in ſuperioribus & paulo ante num. 9. & præſertim §. 201. num. 10. & ſeq. expendimus, Quamobrem ex eo, quod aliqui effectus poſita utraque menſura explicantur, non ſequitur utramque eſſe veram & generalem virium menſuram. Multo minus efficitur virium menſuram poſſe quam quiſque velit aſſumere. Ponat enim ſi placet vires eſſe in ratione triplicata, aut etiam altioris gradus celeritatum, & periculum faciat, an leges motuum, quæ nunc obtinent, inde ſequantur, videbitque alias atque illæ, quæ nunc tenent, inde elicitum iri. Ex quibus omnibus compertum fit ab auctore Diſſertationis contrarias in æſtimandis viribus ſententias non conciliari, nec ideo nodum quæſtionis diſſolvi.

13. Quibus ſatisfit etiam Carolo Labelye, dum eamdem ac citatus Anonymus, niſi idem ſit, viam inſiſtit in epiſtola ad Deſagulierium, quæ habetur tom. 2. Operis ejuſdem Deſagulierii, inſcripti *Cours de Phyſique Experimentale Paris an.* 1751. & a P. Pezenas Societ. J. ab anglica in gallicam linguam converſi. Unde in eodem refutando opus non eſt, ut longius immorer.

§. 215. Scholion

Cum hæc differerem, meas ad manus pervenit elegantiſſimus Liber anno 1752. Bononiæ editus apud Hæredes Piſauri a doctiſſimo viro Franciſco Maria Zanotti, qui inſcribitur. *Della forza de' corpi, che chiamano viva, libri tre, ne' quali ha procurato l' Autore, quanto ha potuto, di promovere la quiſtione col ſolo diſcorſo Metafiſico ſenza aſſumere dalla Geometria, nè dalla Meccanica altro, che le propoſizioni più note e più comuni.* In rebus adeo ſalebroſis & horridis nihil eo libro venuſtius meo quidem judicio prodire poterat & majoris ſale urbanitatis aſperſum, ut nunc præteream vim aut ſubtilitatem rationum, de quibus paulo poſt. Cum ſe ipſum inducat loquentem cum Cl. noſtræ ætatis Viris, immo etiam Mulieribus, Socratis perſonam ſuſtinere mihi videtur; potius aliorum ſententias exagitat, quam expromat ſuam, eamque tali artificio, ut quemadmodum ipſe alicubi inſinuat, ſibi integrum ſit aliam quamcumque voluerit amplexari. Præſertim vero identidem carpit laudatum in ſuperioribus librum Cl. Riccati,

cati, qui nonnulla, ut vidimus, ab ipſo in Commentariis Bononienſibus propoſita refutaverat, ea tamen animi moderatione, quæ honeſtum & bonum Virum atque adeo Philoſophum decet. Cum autem mihi in multis cum Riccato cauſſa communis ſit, quemadmodum ea declarant, quæ in ejus libro ad examen vocando in ſuperioribus diſputata fuerunt, operæ pretium exiſtimo, antequam huic libro finem imponam, opus Auctoris paucis expendere, & iis, quæ mihi negotium faceſſere poſſunt, pro virili parte ſatisfacere. Quod enim attinet ad proprias Riccati ſententias, is multo melius ſuam cauſſam tuebitur, quam alius quiſque, nedum ego, qui cum hiſce viris nullo pacto ſum conferendus.

CAPUT DECIMUM ET ULTIMUM

Expenditur Opus Cl. Zanotti de Viribus vivis.

QUemadmodum vero Auctoris Opus in tres libros diſtribuitur, ſic hoc examen in tres articulos dividam, in quorum ſingulis ea præſertim, quæ mihi adverſantur, expendam.

ARTICULUS I.

Expenditur 1. liber Operis Zanotti.

§. 216. Zanotti Mens

PRimum auctor exponit varias, quæ ab auctoribus traduntur, vis vivæ definitiones, & pag. 17 refert aliquos in ea eſſe ſententia, ut velint nomine vis vivæ aliud nihil intelligi oportere, quam „ potentiam aut vim, aut qualitatem aut „ virtutem, quodemumcumque nomine appelletur, quæ in „ corporibus motum gignit „. Qua definitione admiſſa pag. 18. ſubjungit controverſiam jam eſſe dijudicatam his verbis ab italico ſermone in latinam translatis „ Si vis viva aliud non „ eſt, quam illa potentia, quæ in corporibus generat motum, „ quis eſt qui non videat ipſam eſſe cauſſam motus & motum „ ejuſdem effectum? Quoniam igitur cauſſa ſemper effectum „ exæquat, atque ideo ad eamdem exigi poſſunt menſuram, „ ſequitur vim vivam, quæ eſt cauſſa motus, metiendam eſſe

„ pro-

„ producto velocitatis in maſſam, cum nemo ſit, qui hoc pa„ cto motum non metiatur „.

2. Deinde cum pagina 22 Leibnitianorum definitiones vis vivæ obſcuritatis arguiſſet, ex iis, quæ de ipſa hi Philoſophi diſſeruerunt, colligi affirmat, aliud nihil a ſe intelligi niſi eam vim, quam corpus habet, dum aliquo motu cietur, generandi modo hunc, modo illum effectum; ex qua definitione pag. 23 effici putat vim vivam, de qua diſputant Leibnitiani, non gignere motum, ſed motui jam generato accedere. Inde anſam arripit carpendi tum P. Riccatum pag. 20, tum Carteſianos pag. 23, qui aliam huic nomini poteſtatem ſubjecerunt, quo factum eſſe ait, ut aliam, ac Leibnitiani, quæſtionem tractarint.

3. Tum pag. 24 rem eo recidere ſibi videri ait, ut effectus metiri oporteat, ex quorum magnitudine menſura cauſſæ eliciatur; æſtimationem autem effectuum negat ſolis experimentis confici poſſe, cum ad eam definiendam opus eſſe velit exquiſitiſſimis rationibus ductis ex univerſali Philoſophia, quam alii Ontologiam, alii Metaphyſicam vocant: quo loco uſque ad pag. 28 ſubtiliſſime diſtinguit inter ea, quæ proxime exſiſtunt & generantur a cauſſa effectrice, interque illa, quæ in effectu ipſa per ſe tamquam aliquod relativum exſiſtunt, ut inde inferat univerſim cauſſam primis metiri oportere, non autem ſecundis, quæ varia & innumerabilia eſſe poſſunt, cauſſa eadem permanente: peculiariter autem paulo poſt vis menſuram peti debere ex velocitate æquabili, ſive ex ſpatio, quod motu æquabili & eodem tempore perficiatur, non ex foveis in molli luto excavatis, ex contractione elaſtrorum & ex ſimilibus, quæ a corporibus motis efficiuntur.

4. Poſtea cum in eo convenire Recentiores Philoſophi videantur, ut omnes omnium corporum mutationes in motibus molecularum & in earumdem collocatione poſiti ſint, ad hæc obtinenda tria hæc ſufficere advertit pag. 31, potentias, quæ motum gignunt, potentias, quæ corrumpunt, & inertiam, qua fit, ut corpus, quantum in ipſo eſt, tueatur ſtatum quietis aut motus, in quo potentiæ illud reliquerunt, quibus ſolis potentiis, non autem vi viva Leibnitii opus eſſe probare contendit pag. 61 in deſcenſu aut aſcenſu corporum gravium, quos a pag. 46. uſque ad 68 examinat.

5. Deinceps præter alia, quæ intertexit, diſſerit de elaſtris, de

de quo loco nobis integrum ſervabimus, cum ad examen ſecundi libri venerimus.

6. Demum pag. 112 exagitat definitionem Riccatianam vis vivæ, & præſertim ſententiam illam auctoris, qua vult vim vivam eſſe eamdem ac inertiam, de quo nihil dicam, cum ad meam de natura vis vivæ ſententiam id nihil pertineat.

§. 217. Noſtra Sententia

Ex quibus apparet primum hunc librum eo præſertim ſpectare, ut definiatur, quid intelligi oporteat nomine vis vivæ, cujus menſura quæritur. Qua in re illud primum adverto totam quæſtionem hanc locum non habere, & ſi vocabulis Peripateticorum uti libeat, eſſe de *falſo ſupponente* in ſententia Carteſii & eorum, qui in ejus verba jurarunt, quod in corporibus ſit purus motus, nulla vero cauſſa exigens motum, quæ dicitur vis, ſed pura Dei voluntas, qui eatenus corpora movet, quatenus ceſſat conſervare in tali loco, & incipit conſervare in aliis §. 119. Nam rei, quæ non eſt, fruſtra menſura quæritur. Id vidit etiam Zanottus pag. 28, quo loco fatetur ſe hanc opinionem libenter amplexaturum, ſiquam amplexari vellet. Deinde hoc idem eſſe ſtatuendum, tametſi ob aliam rationem, exiſtimo, ſi vis, quæ motum gignit, ad eſſentiam corporis pertineat, vel ſaltem nulla ſit in corporibus alia vis præter eam, quæ ad eſſentiam pertinet. Quemadmodum enim ſalvo corpore ejuſdem eſſentia eadem manet, atque idcirco nec augetur, nec minuitur, ita ſi vis cum ea neceſſario copulatur, eadem permaneat neceſſe eſt, nec ideo quidpiam eidem accedere aut decedere poteſt, ſive corpus tardiſſimo, ſive celerrimo, ſive etiam nullo motu cieatur. Quamobrem hæc vis nequit eſſe illa, quam pro majori vel minori corporis velocitate variari ponunt omnes Philoſophi, qui menſuram ejuſdem inquirunt. Quod ſi quidam Leibnitiani ſimul volunt vim ad corporum eſſentiam pertinere, & ejuſdem menſuram ad velocitatem referunt, ii aut ſibi non conſentiunt, aut quod veriſimilius eſt, cum Leibnitio & Wolphio præter vires primitivas, quas eſſentiales eſſe putant, alias derivativas ſtatuunt, §. 115. & 119. quarum utpote accidentalium tamtummodo menſuram ad velocitates tamquam ad normam exigunt.

2. His prænotatis me ea ratione, quæ refutari non poſſe videtur §. 119. confeciſſe reor dari in corporibus aliquod continuum

tinuum ac permanens, quod ſit cauſſa motus ſive motum exigat, idque vocari vim, propterea quod relativum, uti eſt motus, per ſe gigni aut creari non poteſt. Hanc autem vim eſſe non poſſe eſſentialem jam §. 120. docui. Immo etſi corpora quamdam vim cum ipſorum natura & eſſentia copulatam haberent, tamen illa ad motum efficiendum determinata non foret. Cum enim ex altera parte corporis eſſentia nullum determinate locum requirat, & ex altera motus re ipſa fieri non poſſit niſi aliquorſum, ſequitur hujus determinati motus cauſſam aliunde quam a viribus eſſentialibus eſſe petendam. Hoc autem, quod eſt proxima cauſſa motus, quodque a Leibnitianis dicitur vis derivativa, debere eſſe quidquam continuum & permanens ratione mox allata conficitur. Qua de re vide, quæ citato §. 120. diſputavi & præſertim a numero 8. uſque ad finem, quo loco nunc præcluditur effugium iis, qui vim ad corporis eſſentiam accidentem explodunt.

3. Ergo monſtrata neceſſitate hujus accidentalis vis in corporibus, reliquum eſt ut inveſtigemus utrum ad id, cujus gratia vis deſideratur, puræ potentiæ ſive preſſiones, ut vult Zanottus, ſint ſatis, an vero ſit opus ea vi, quæ fluxu preſſionum exſiſtere percipitur. Ad hoc autem definiendum ſufficere poſſunt quæ §§. 123. 124. 125. diſputavimus; in quorum primo docui in corporibus exſtare vim diſtinctam a preſſionibus tamquam rem a ſuis finibus & terminis, ex quibus incipit aut in quos deſinit, in aliis vero non eſſe puras in hac rerum univerſitate potentias atque preſſiones, ſed ſolum earum ſummas, ſcilicet vires, quæ ex iiſdem fluentibus exſiſtunt. Verum quia nunc mihi res eſt cum acerrimo adverſario, id confirmare conabor alia ratione, quam petam ex reconditiori Metaphyſica, quam ſibi eſſe in deliciis, & meo quidem judicio, jure ac merito ſexcentis locis præſefert. Quemadmodum cubus eſt ſumma ſuperficierum quadratarum, quæ fluxu unius quadratæ ſuperficiei ideſt motu & continua ſecundum omnia altitudinis puncta translatione generari percipitur; ita vis eſt ſumma potentiarum ſive preſſionum, ex quarum fluxu & continua ſucceſſione, ſive acceſſione alius ad aliam generari intelligitur. Datur autem hæc preſſionum ſumma in corporibus. Nam cum prima preſſione primus velocitatis gradus gignatur, ſecunda ſecundus, tertia tertius, & ita porro quouſque ex ſingulis quantumvis exiguis velocitati-

bus magna quædam definiti gradus velocitas colligatur, quemadmodum hæ ſingulæ velocitates in corpore permanent & in unam ſummam colliguntur, nec aliis ſuccedentibus primæ evaneſcunt; ita preſſiones & potentiæ, ex quibus ſingulæ exſiſtunt, perſeverent neceſſe eſt, unamque ſummam conficiant, nec aliarum ſucceſſione primæ corrumpi poſſunt. Ad elevandum hujus tam preſſe aſtrictæ rationis vim aliud nihil dici poſſe credo, quam ad efficiendam quidem primam velocitatem deſiderari preſſionem, quæ ſit aliquod abſolutum & permanens & diſtinctum ſimul a voluntate divina & a motu, non vero ad illam conſervandam eſſe opus, ut ſimul potentia & preſſio permaneant. Corpora enim ipſa per ſe in eodem motus aut quietis ſtatu perſeverant, nec ad alium tranſire poſſunt, niſi ſit exterior cauſſa, quæ id exigat.

4. Ad hoc præcludendum effugium nunc mitto eam preſſionem ſuapte natura eſſe aliquod abſolutum & permanens non ſucceſſivum, atque ideo ſine ulla ratione illius, ſimul ac exſiſtit, interitum poni, immo contra omnem rationem; nam illa uno tantum inſtanti inextenſo temporis permanere, non poteſt, quia ut citatis locis & cum de tempore diſſerebamus, oſtenſum eſt, eodem momento foret & non foret, quod prorſus abſurdum eſt. Quare aliquod vel minimum tempus perſeveret oportet. Quod ſi ita eſt, interea fluat eſt opus & unam in ſummam coaleſcat cum aliis, quæ eodem tempore corpus impellunt. Hæc, inquam, mitto, non quia ipſa per ſe ad id efficiendum, quod volo, ſatis non ſint, ſed quia jam ſum profeſſus me rem confecturum alia ratione, atque illæ, quas in ſuperioribus contorſi, cujuſmodi eſt hæc a neceſſaria preſſionis per aliquod tempus duratione petita.

5. Res autem eo revolvitur, ut oſtendamus corpus ceſſante illa potentia, quæ fuit cauſſa motus, in eodem perſeverare non poſſe. Ad illud autem efficiendum neceſſe mihi video rem altius petere & excurrere ad nobilem illam univerſalis Philoſophiæ quæſtionem circa res, quæ ſtatum mutant, utrum ſimul ac aliquam ſtatus mutationem acceperunt, in eadem permaneant, donec ab exteriori cauſſa cohibeantur. Nam Phyſici Recentiores de legibus motuum differentes hanc inter alias legem abſolute fixerunt corpus motu aliquo percitum indeſinenter moveri pergere, quoad exterior cauſſa perimat motum, ejuſque legis rationem ex eo deducunt, quod quæcum-

cumque res in eo ſtatu perſeverant, in quo ſunt, donec aliquid extrinſecus accedat, unde mutentur. Quo fit perſpicuum eos eſſe in illa ſententia, omnia, quæ mutantur, ipſa per ſe in mutatione perſtare, nec ab ea deſiſtere niſi cohibita vi quadam extrinſecus accedente. Mihi vero actionem a paſſione diſtinguere placet hac in re, atque illud ſtatuere ſubſtantiam, quæ ſimul cum interiori vi mutat ſtatum, perſeverare quidem in mutatione, donec aliquid novi extrinſecus adſit, quæ vero ſolam mutationem ab alia acceperit, non autem vim, ab ea mutatione deſiſtere, ſimul ac externa cauſſa ceſſat. Atque ut ea, quæ ſum dicturus, magis in ſenſus incurrant, a generali quæſtionis ſtatu ad ſpecialem, qui ad motum pertinet corporum, identidem deſcendam illudque monſtrabo, ſi corpus ab alio non ſolum motum, ſed etiam vim acceperit, ipſum per ſe motum amittere non poſſe; ſin autem moveatur quidem, ſed minime communicato intrinſeco motus principio, quieſcere, ſtatim ac aliud corpus a motu communicando abſiſtit, neque cauſſa exteriori opus eſſe, ut quieſcat, ſed ut pergat moveri.

6. Qua in re illud primum conſtituo cauſſam effectricem mutationis ſtatus, ex. gr. motus localis eſſe aliquid non poſitum in rerum ſucceſſione, ſed permanens, & ab ipſa mutatione diſtinctum atque diverſum. Nam mutatio ſtatus eſt jugis & continuata rerum ſucceſſio & tranſitus ab alio in alium ſtatum, uti motus eſt jugis tranſitus ab alio in alium locum. Res vero ſucceſſiva, cujuſmodi eſt motus localis, ab æterno non fuit. Quorum primum tametſi Aheis non probetur, aſſentiuntur tamen ii, quibuſcum in præſenti congredior. Quamobrem mutatio in tempore exſiſtit tum ſcilicet, cum in anteceſſum non exſtaret; ex quo fit, ut ab alia cauſſa tamquam id, quod per ſe eſſe non quit, oriri debeat. Hæc vero cauſſa vel eſt aliquod permanens, vel in rerum fluxu poſitum; ſi primum, conſtat quod propoſitum eſt; ſin vero alterum, ipſa per ſe eſſe non poterit, ſed ab alia tertia manabit, de qua iterum quærerem, utrum eſſet aliquid permanens, an vero fluens & ſucceſſivum; itaque concluderem, ne detur aliquid ſine ſufficienti ratione, tandem eſſe veniendum ad aliquam cauſſam, quæ mutatio & ſucceſſio non ſit, quæque mutationum omnium atque ſucceſſionum origo & principium habeatur. De quo etiam §. 119. late diſſeruimus.

7. Deinde illud etiam in anteceſſum ſtatuo, ut res in eo ſtatu, quem habet, permaneat, nihil novi requiri; ut vero tranſeat ab alio ad alium ſtatum, aliquid ſemper exigi, quo ceſſante tranſitus quoque ceſſaret; ex. cauſſa, ut corpus in eodem loco perſtet, nihil novi opus eſſe; ut vero a loco ad locum migret, deſiderari quidpiam, quod hujus migrationis ſit cauſſa effectrix. Nam ut nihil ſit, nihilque gignatur, nihil requiritur; ut vero aliquid exſiſtat, quod prius non erat, quidpiam etiam novi deſideratur. Sed cum res in eodem ſtatu, ut corpus in eodem loco permanet, nihil quantum ad ſtatum & ad locum novi exſiſtit, quod antea non foret; quia ſtatum illum & locum jam habebat. Ergo ad eum finem, ut res in eodem ſtatu & loco permaneat, aliquid novi ponere neceſſe non eſt. At vero cum corpus a ſtatu ad ſtatum & a loco ad locum perpetuo tranſit, novum aliquem ſtatum & locum, quem antea non habebat, indeſinenter acquirit; ergo aliquo ſemper eſt opus, quod ſit illius tranſitus cauſſa. Neque enim motus ipſe corporis ad aliquem locum poteſt eſſe cauſſa motus ad locum ſequentem; ſiquidem motus omniſque mutatio non ſolum originem, verum & continuationem cauſſæ permanenti & a mutatione diſtinctæ acceptam ferre debet. Nam in omni re, quæ in ſucceſſione poſita eſt, uti eſt motus, alia poſt alia ſunt; & cum eſt antecedens pars motus, nondum eſt conſequens; hacque accedente illa jam interiit. Qui igitur fieri poteſt, ut pars motus antecedens ipſa per ſe ratio & cauſſa ſit conſequentis, cum illius interitum hujus origo ſequatur? An quidpiam in eo momento, in quo deſinit eſſe, effectum aliquod gignere poteſt? Manet igitur quod propoſuimus, ut res in eodem ſtatu permaneat, nihil novi requiri, ut vero ab alio ad alium ſtatum tranſeat, aliquid exigi, quo ceſſante mutatio quoque ceſſat.

8. Hæc principia Recentioribus etiam probata homines in errorem induxerunt. Cum enim putarent corpus motum, dum pergit moveri, in eodem ſtatu perſeverare; dum autem a motu ad quietem migrat, mutare ſtatum; ex illis principiis concluſerunt corpus motum numquam quieſcere, niſi præſto ſit cauſſa externa, quæ motum perimat, ſive illud corpus percitum ſit interiori vi, ſive non ſit. Verum niſi mea valde me fallit opinio, contrarium omnino concludendum erat, propterea quod permanere in motu non eſt permanere in eodem

ſtatu,

ſtatu, ſed eſt ſtatum mutare. Nam permanere in motu eſt in mutatione ſtatus ſive loci perſeverare; perſeverare autem in mutatione ſtatus & loci non eſt eumdem ſtatum & locum tenere, ſed mutare locum & ſtatum. Quamobrem ut corpus jugiter pergat moveri, opus eſt quopiam, quod ſit permanens & ab ipſo motu diſtinctum, ſcilicet vi motrice, ſive in ipſo corpore, quod a loco ad locum tranſit, ſive in alio corpore, a quo movetur. Si igitur corpus ab alio vim non accipiat, ſed ſolum motum, quieſcere debet, ſimul ac aliud a motu communicando ceſſat; quia tunc nulla vis eſt, quæ hunc motum efficere poſſit. Quod ſi vim acceperit, eam corpus ipſum per ſe amittere nequit; tranſiret enim a ſtatu vis ad ſtatum non vis, quod eſſe non poteſt; cum enim vis ſit aliquod permanens, vere ſtatum mutaret ſine externa cauſſa, quod a ratione diſſentaneum eſt.

9. At enim cui perſuaſeris motum & quietem non eſſe ſtatus corporis diverſos, cum immo ſint ex iis, quorum alterum alteri adverſatur? Quod ſi ſtatus diverſi ſunt, ex datis principiis ſequitur corpus ipſum per ſe a motu ad quietem tranſire non poſſe.

Ad hoc primum ajo me dare adverſariis motum & quietem ſtatus eſſe diverſos, non inde tamen conſequens eſſe aliquid, quod meam rationem infirmet. Nam quemadmodum negatio negationis eſt verum eſſe, & ſola negatio entis eſt vera negatio; ita etiam ſolum ceſſatio rei permanentis eſt vera mutatio, & ſucceſſivi ceſſatio eſt potius in eodem ſtatu conſiſtentia. Quare cum vis ſit aliquod permanens, quippe quæ tota eſt in qualibet loci parte, ea ceſſante vera ſit in rebus mutatio, ex qua ſtatus diverſitatem oriri neceſſe eſt. Sed in hypotheſi a nobis conſtituta, ut præciſe loquamur, corpus ipſum per ſe ſine cauſſæ externæ mutatione omnino non quieſcit; nam ceſſat actio & vis illius corporis, a quo impellebatur. Ergo vera mutatio accidit rei permanentis. Quid igitur mirum, ſi effectus cauſſæ perimitur, & corpus quieſcit? Cum ergo negamus exigi cauſſam externam, ut corpus quieſcat, ad mentem loquimur adverſariorum, & excludere intelligimus neceſſitatem cauſſæ, quæ alia ſit, ac ea, quæ motum in corpore efficiebat.

Deinde expendamus, ſi placet, diſcrimen, quod inter motum, & quietem intereſt, & illud conferamus cum diſcrimine,

quod inter plures motus partes intercedit ; illudque in negativo poſitum, hoc autem in poſitivo videbimus. Si quid enim poſitivi eſt in quiete, in eo ſitum eſt, quod per quietem corpus uno in loco reperitur, unique loco reſpondet; quatenus enim in uno tantum loco eſt, eſt negatio relationis & quidem affirmantis ad alia loca. Sed cum corpus per motum pluribus locis reſpondeat, etiam uni reſpondet, tametſi non uni tantum, ideoque id omne, quod eſt in quiete poſitivi, complectitur. At ſi aliam cum alia parte motus comparemus, per alteram ad unum locum, per alteram ad alterum corpus applicari comperiemus. Quamobrem earum differentia conſiſtit in poſitivo. Jam vero cum in certa ſententia quantitatis, quæ in infinitum dividi queat ſaltem eo ſenſu, quem ſuo loco explicavimus §. 21. ſint quidem in tempore quolibet inſtantia & momenta, in quorum ſingulis motus ceſſare poteſt, ſed talia, ut in iis affirmari non poſſit nec moveri corpus nec quieſcere, conſideremus corpus in illo inſtanti, quo a cauſſa movente urgeri deſinit, & ſi in eo quieſcere incipiat, jam per motum acquiſiviſſe intelligemus locum, in quo quieſcat; non enim quieſcere poteſt, niſi in eo loco, quem motu comparavit. Quid ergo ad hoc, ut vere quieſcere incipiat, requiritur, niſi ut agere deſinat cauſſa, quæ corpus e loco pellebat? Nam actionis finem excipit principium ejus, quod actionis negatio eſt. Ut vero tranſeat ad locum ſequentem, quem adhuc non acquiſivit, nonne opus eſt continuatione cauſſæ, quæ uti corpus uſque ad dictum locum movit, ita ad ſequentem etiam impellat? Nam ut negatio ſit, ſolum negatione opus eſt; ut vero affirmatio exſiſtat, affirmatione.

10. Urgere tamen aliquis poteſt Deum, qui omnia in eo ſtatu, in quo ſunt, conſervat, eſſe cauſſam efficientem, cur corporis, quod a corpore movente ſejunctum eſt, motus perſeveret; nam neque impetus, quem corpus cum alio communicat, ipſe per ſe durare poteſt; nihilotamenminus eum perimi negamus non aliam ob cauſſam, quam quod a Deo conſervatur. Quidni igitur etiam motum ſine impetu ſervat?

Antequam rationem afferam diſcriminis, cur Deus impetum conſervet, non vero motum, ajo quod a me concluſum eſt, hac Dei conſervantis actione minime labefactari; nam hoc unum ſtatui puram paſſionem ſine vi, uti motum localem ſine impetu, ipſam per ſe durare non poſſe, quod perpetua ſtatus mutatio ſit, quæ ſine perpetua cauſſæ actione perſeverare non

po-

poteſt. Quid vero hanc enunciationem infirmat actio Dei conſervantis, cum ſimul ac Dei vis accedit, non ipſa per ſe paſſio & motus localis conſiderentur, ſed ſimul cum cauſſa effectrice ſupernaturali, quæ munere fungitur naturalis? Ex hoc autem ipſo, quod ſubſtantiæ & vires creatæ ſtatus mutationes fuerunt, cum factæ ſunt, quarum rationem non ipſæ res creatæ, ſed ſolus Deus habebat, eas perſeverare non poſſe ſine jugi actione Dei conſervantis in Naturali Teologia monſtratur.

11. Sed ut diſcrimen intelligatur motum inter & impetum, duo diſtinguenda ſunt genera eorum, quæ in hac rerum univerſitate conſtant; alia abſoluta, quæ a ſolo Deo proxime poſſint oriri, uti ſubſtantiæ & vires accidentales; alia vero relativa, quæ non a Deo proxime originem ducunt, ſed ab ipſis ſubſtantiis creatis, atque ab earum viribus, quatenus inter ipſas multifariam copulantur §. 119. Ita ſunt ſimilitudo, ſitus, diſtantia, æqualitas, textura aliaque hujuſmodi, quæ in rerum relatione poſita ſunt. Hujus generis eſt etiam motus; nam eſt relatio corporis ad diverſas loci partes, quæ proxime naſcitur ab impetu, qui eſt jugis & perennis corporis conatus mutandi locum §. 119. Res itaque prioris generis quemadmodum a ſolo Deo primitus oriri poſſunt, ita etiam a ſolo Deo conſervari queunt. Nam conſervatio, ut Theologi monent, eſt illius actionis, qua primum res creatæ fuerunt, continuatio & veluti continuata creatio. Quid igitur mirum, ſi Deus legem ſtatuit conſervandi impetus ab alio corpore ad aliud tranſlati ea ratione, quam §. 201. num. 10. explicavimus, cum aliter perſeverare non poſſit nec in corpore, a quo tranſiit, nec in corpore, ad quod migravit, etiam ceſſante primi corporis actione, cujus ſubſtantia nihil ad impetus conſervationem facit? Quæ vero ſecundi generis ſunt, ut a Deo ſolo proxime non ducunt originem, ita nec conſervationem. Quare non permanet ſimilitudo, niſi ſint res, quarum alia ad aliam referatur, & ratio perſeveret, cur alia cum alia comparetur; nec durat talis corporum ſitus ac diſtantia, niſi corpora in ſuo quæque loco perſtent. Ita etiam motus a Deo conſervari non poteſt, niſi aut in corpore moto, aut in corpore, a quo movetur, permaneat vis, quæ eſt motus proxima cauſſa. Ceſſante igitur actione corporis primi, quod ſolum motum, ut ponimus, non autem vim alteri impreſſit, hoc ſecundum illico quieſcat oportet.

12. Quod quamvis ita perſpicuum factum eſſe videatur, ut in

aliam nullam difficultatem incurrere poſſe judicem, nihilotamenminus eximendus eſt etiam alius ſcrupulus, qui in hoc poſitus eſt. Si corpus ſimulac a corpore movente ſejunctum eſt, quieſcere debet, a motu finito ad quietem in inſtanti perveniret, quin per omnes gradus infinite minores celeritatis tranſiret. Cum enim contactus in ſuperficie fiat, quæ in profundum dividi nequit, ſeparationem in inſtanti fieri neceſſe eſt. Sed ut optime advertit Cl. Joannes Bernullius in Opuſculo, quod inſcribitur *Diſcours ſur le Mouvement* tom. 3. Operum Omn. ejuſdem Auctoris, quæ Lauſannæ collecta & edita ſunt an. 1742. pag. 9. & nos ad §. 201. num. 1. jam animadvertimus natura non operatur per ſaltum, nihilque ab alio ad aliud extremum pertingere poteſt, niſi per omnes medii gradus tranſeat. Nam quæ neceſſitudo inter duo extrema oppoſita non interpoſito vinculo eorum omnium, quæ interjecta ſunt? Si enim natura a motu ad quietem, vel a quiete ad motum progrederetur prætervolans omnes inſenſibiles motus, per quos ab alio ſtatu ad alium pervenitur: primus ſtatus ante perimeretur, quam natura perſpectum haberet, qualem ſeligeret; cumque nullum eſſet neceſſarium vinculum, quo illi conglutinarentur, major ratio pro aliquo eorum ſeligendo non foret. Igitur ne in hæc abſurda incurramus, nobis diſcedendum eſt ab ea ſententia, quæ in has anguſtias compellit.

13. Duo ſunt, quæ ad hæc infirmanda habeo in promtu. Primum eſt me poſuiſſe quidem corpus mutare ſtatum ſive locum ſine intrinſeca vi, quod ita placere videbam nonnullis Philoſophis, quodque nonnullæ mutationes, uti ortus rerum ex nihilo, profecto ſolum vi, quæ ſit extra ipſas res, exſiſtunt; quo ſit, ut quæ de motu corporum diſputata fuerunt, ſaltem in has mutationes conveniant: at numquam pro certo ſtatuiſſe fieri poſſe, ut corpus ſine impetu moveatur. Id enim nullatenus eſſe poſſe §. 119. jam demonſtravi; quia ſicut aliæ relationes ſine rebus & fundamento exſtare nequeunt; ita motus, qui ſpectatus per ſe eſt relatio corporis ad loca diverſa, non ſolum ſine corpore, verum etiam ſine impetu, qui eſt proxima ratio motus & cauſſa illum exigens, conſtare non quit; nec motus utpote relatio eſt ex iis, quæ proxime creari & conſervari queant. Quare cum motus corporis ſit copulatus cum vi, vis autem paulatim extinguatur, ita ut antequam penitus intereat, per omnes gradus infinite parvos tranſeat §. 201. num. 24. motum etiam paulatim ac ſenſim imminui prius ne-

neceſſe eſt, quam perimatur. Quod eſt id, quod Bernullius deſiderat.

14. Sed fac corpus aliquod impelli vi ſolum exteriori, ut globulum vi manus, quæ globum intra canaliculum leviter ducat. Non tamen inde ſequetur motum in puncto temporis ceſſare, quin per omnes gradus interpoſitos tranſeat. Manus enim a globulo avelli non poteſt, niſi penitus intereat vis, qua illum pellit; interire autem non poteſt niſi adminiculo alterius oppoſitæ, quæ, cum paulatim gignatur, ita ut antequam finita fiat, per omnes infinite parvos gradus tranſire debeat, non poteſt oppoſitam vim jam generatam niſi ſenſim deſtruere. Atque ita fit, ut hæc ante omnes gradus interceptos percurrat, quam nulla fiat. Quod eſſe nequit, niſi etiam motus, qui eſt effectus, has eaſdem ſubeat mutationes.

15. Id autem confirmatur præſertim ex eo, quod §. 201. num. 34. docui contactum ſcilicet non in pura ſuperficie, ſed in interiori corporum ſubſtantia fieri, & a viribus repellentibus, quæ in eadem ſubſtantia ſunt, inter corpora motus perfici communicationem. Hinc enim efficitur eumdem motum in inſtanti nequaquam ceſſare. Quo Bernullii rationibus factum eſt ſatis.

16. Ex his autem concluditur id, quod propoſitum erat, perſtantibus in corpore ſingulis parvis velocitatibus perſtare quoque ſingulas illas potentias, ex quibus eædem fluxerunt, atque ideo vim illam, quæ viva appellatur. Quod niſi ita eſſet, corpus, ut modo oſtendi, prorſus quieſceret. Quare cum laudatus auctor lib. 3. pag. 278 hæc habeat: *quando il corpo ſta fermo, noi conſideriamo ſolo quell' impulſo inſtantaneo e preſente, ch'egli riceve dalla gravità; degli altri infiniti, che ſono già paſſati, e non hanno laſciato di ſe effetto niuno, non abbiamo conſiderazione tenendoli per inutili. Ma nel corpo, che cade, conſiderar ſi vuole non ſolo l'impulſo preſente, ma quegli infiniti ancora, ch'egli ha ricevuti per tutto il tempo della caduta: perchè ſebbene paſſarono e più non ſono, pur hanno laſciato nel corpo un movimento, del quale ſe noi vogliamo intendere la cagione, biſogna intendere tutti quegli infiniti impulſi, che lo produſſero. Se voi però ridurrete in una ſomma tutti gl' impulſi, che il corpo fermo riceve dalla ſua gravità in un minuto di tempo, e ſimilmente tutti quelli, che riceve in tempo eguale cadendo, voi troverete le due ſomme egualiſſime, e l'azione altro non è che la*

ſomma

Digitized by Google

ſomma degl' impulſi, il movimento è l' effetto : ciò vuolſi intendere per modo, che ſi miſuri non dall' effetto, che attualmente ſegue, ma da quello, che ſeguirebbe, ſe non foſſe da altra cagione &c. cum, inquam, hæc habeat, vel intelligit impulſus diſtinctos a motu non perſeverare in corpore impellente, ut in elaſtro globum pulſante, vel in corpore impulſo. Si primum, res per ſe clara eſt, & negari non poteſt. Qui enim ab alio in aliud corpus migrant ea ratione, quæ §. 201. tradita eſt, in primo perſtare non poſſunt. Sin autem ſecundum, propter rationes modo allatas, ejus ſententiam amplecti non poſſum.

17. Quod ſi Zanottus pluribus locis inſinuat ſe non poſſe videre, quid aliud potentiæ & preſſiones gignant præter localem motum, nec intelligere hanc vim vivam, quæ ex fluxu preſſionum exſiſtit; homini repono hanc difficultatem niti illa præjudicata opinione, quam §. 124. & 125. totis viribus labefactavimus, exſtare poſſe preſſiones puras ſine ulla earumdem ſumma, quæ vis appellatur. Hac enim exploſa difficultas ipſa per ſe evaneſcit. Nam uti ſuperficies quadrata revera eſt in cubo, ſed numquam ipſa per ſe exſiſtit, & eadem percipitur tamquam unum cubi elementum, non quia ex fluxu ejuſdem ſuper latus quadrati ſolidus cubus gignatur; hoc enim adverſatur illi §. 18. allatæ rationi, quod extenſa ſubſtantia quamvis habeat modos & terminos, tamen ex iis ſe proxime contingentibus non coaleſcit; & tota ſimul creetur oportet, neque ex fluxu alicujus termini exſiſtere quit §. 125. num. ultimo; ſed quia ob rationes ibi expoſitas primus cubus ad ſecundum eſt in ratione producti ex baſi quadrata primi in latus primi ad productum ex baſi ſecundi in latus pariter ejuſdem ſecundi: ita preſſiones ſunt quidem in viribus motricibus, ſed ut citatis locis oſtendi, numquam ipſæ per ſe in hac rerum univerſitate poſſunt exſtare, eædemque tamquam elementa virium habentur, non quia antequam vis exſiſtat, ſit pura preſſio, cujus fluxu eadem generetur; hoc enim pacto ex puris terminis res iiſdem circumſcripta conſtaret, quod pugnat cum eo, quod alibi advertimus rem quidem habere terminos, ſed non ex terminis, quorum alius alii proxime ſuccedat, componi, interque duos terminos rem terminatam exſtare opus eſſe; ſed quia duæ vires productis ex preſſionum quantitate in celeritates, quibus fluunt, & in tempora, quibus hi fluxus durant, proportione reſpondent. Quod ſi ab alio

Digitized by Google

alio in aliud corpus vires transferuntur, in quaſcumque particulas etiam numero infinitas eæ diſpeſcantur, numquam dici poterit in hac temporis parte puram preſſionem communicari, ſed ad minimum infinite parva ſumma preſſionum in idem migrabit. Hoc vero non obſtat, quominus preſſio tamquam unum vis elementum & celeritas atque duratio fluxus tamquam alia duo ponantur; quemadmodum ſimile quid non obeſt in continuis extenſis quantitatibus: qua de re conſule quæ §. 16. methodum indiviſibilium explicantes diſputavimus. Nam num. 20. advertimus in metiendis parallelogrammis ope illius methodi, quæ quantitatem in ſua elementa reſolvit primo poni debere veras lineas omnis expertes latitudinis, ne ſumtis lineis in latum extenſis peccetur in petitione principii; ſecundo numeri illarum habendam eſſe rationem; tertio denique eaſdem lineas ſimiliter diſpoſitas eſſe debere, ut inde poſſit inferri primum parallelogrammum eſſe ad ſecundum in ratione producti longitudinis primi in latitudinem primi ad productum ex longitudine ſecundi in latitudinem ſecundi. Hinc enim intelligemus primo etiam in hoc negotio puras preſſiones eſſe accipiendas tamquam elementa vis, ne ſcilicet demonſtratio eo laboret vitio petitionis principii, uti factum eſt in metiendis viribus, quæ ab elaſtris communicantur. Nam quod attinet ad vires etiam infinite parvas, quæ in dilatatione elaſtri infinite parva gignuntur, ſemper ſingulæ preſſiones ſumtæ fuerunt æquales, cum elaſtra ſimplicia ſunt, licet in aliis plura forent ſibi ſuccedentia, in aliis pauciora, in elaſtris vero duplicatis, triplicatis &c. in iiſdem rationibus poſitæ fuerunt; 2. habendam eſſe rationem numeri preſſionum, qui numerus pendet ex velocitate & duratione fluxus, quod pariter factum eſt, ut ex iis, quæ pluribus locis & præſertim §§. 128. 180. & ſeq. & §. 206. diſputavimus, liquet; tertio eaſdem preſſiones ſimiliter conſtitutas eſſe oportere; quod etiam præſtitimus; nam ut alia exempla prætercam, in duabus ſeriebus quatuor elaſtrorum, & unius ſemper inter ſe comparatæ fuerunt preſſiones, quæ forent in ſpatiis & dilatationibus, quæ numero elaſtrorum proportione reſponderent §. 166. Ex quibus magis magiſque confirmantur, quæ de tribus elementis ſummæ preſſionum ſeu vis motricis alibi diſſeruimus.

18. Sed illud præſertim efficitur, quo hæc potiſſimum ſpectant,

ctant, vim vivam ſeu motricem, cujus menſura quærenda eſt, aliam non eſſe quam hanc, quæ eſt æqualis ſummæ preſſionum, quæque eſt cauſſa intrinſeca motus corporis, in quo ineſt; immo ſi agatur de vi, quæ vere ineſt in corporibus, aliam eſſe non poſſe, cum pura preſſio exſiſtere nequeat, & a vi ſolum per mentem abſtrahi poſſit, ut linea a ſuperficie, & ſuperficies a ſolido, & ſolum in hoc ſenſu ejuſdem preſſionis menſura poſſit haberi. Quare non video, quam vim vivam a Leibnitianis intelligi velit Zanottus, cum aſſerit vim vivam Leibnitianorum non generare motum, ſed ex illo conſequi. Quod ſi vim vivam eam definiere, quæ cum motu conjuncta ſit, eſtque in corpore moto, id factum eſt, non quia putarent vim vivam a motu generari, & eſſe quodammodo illius effectum, ſed ut internoſcerent a mortua ſive a pura preſſione, quam in corpore quieſcente per ſe ſolam exſiſtere poſſe cum aliis Philoſophis falſo credebant, vel ſi putarunt, id non intellexere de illa vi viva, quæ in corpore moto, ſed de illa, quam a corpore moto in alia, in quæ incurreret, migrare videbant. Sed ut res ſe habeat de Leibnitianis, quos defendere noſtrum non eſt, qui nulli ſectæ ſumus addicti, ajo quæſtionem fieri non poſſe niſi de vi effectrice, quæ motum tamquam cauſſa præit, ſive ex qua motus tamquam pura relatio exſiſtit, propterea quod nulla eſt alia vis præter hanc §. 120. ex ea autem vi, quæ a percutiente in corpus percuſſum migrat, non poſſe peti niſi menſuram illius, quæ antea in percutiente reperiebatur, ut §. 127. fecimus diſputantes de incurſu obliquo corporis in plana immobilia, & alibi cum de elaſtris tractaremus, propterea quod a corpore impellente cum aliis communicari ſive in ipſo corrumpi §. 201. num. 37. non poteſt vis, quæ in ipſo non ſit, quemadmodum communicaretur ſive perimeretur, ſi quæ migraret aut interiret, major foret illa, quæ prius inerat; quod cum uſuvenire oſtenderimus in Carteſiana virium menſura, non vero in Leibnitiana, nobis ad illud explodendum, hoc amplectendum efficaciſſimam ſuppeditavit rationem.

Expen-

Digitized by Google

ARTICULUS II.

Expenditur II. Liber Cl. Zanotti .

§. 218. Zanotti Mens

SEd quod priori libro a Cl. Zanotto diſputatum eſt , fuit tamquam levis armaturæ prima orationis excurſio ; in ſecundo vero cominus agit , totiſque viribus conatur firmiſſima evertere præſidia Leibnitiani ſyſtematis. Poſitis enim in A Q (*Fig.* 46.) quatuor elaſtris , & in E P ſubquadrupla rectæ A Q uno æquali & æqualiter tenſo, ac ſingula quatuor, & abſciſſis ſpatiis Q H, P C, per quæ elaſtra pellentia globos æquales in Q & P poſitos ſe exerunt, in eadem ac numeri elaſtrorum ratione, itemque ſimilibus ſpatiolis infinite exiguis H *h*, C *c*, hoc ſibi oſtendendum proponit pag. 150. non ſatis adhuc demonſtrata fuiſſe hæc duo, primo velocitatem globi in H generatam a quatuor elaſtris in ſpatio Q H eſſe duplam velocitatis alterius globi in C genitæ ab uno tantum elaſtro in ſpatio P C ſubquadruplo ſpatii Q H ; ſecundo ſi velocitates eam rationem ſequantur, vim vivam in phyſicam eſſe inducendam. Quod ad primum attinet, ſumto ſpatiolo Q Z infinite parvo , itemque P *x* minimo ſed ſubquadruplo ſpatioli Q Z advertit in iiſdem ſpatiolis , ſi Leibnitianos audiamus , rem ſimiliter contingere ac in ſyſtemate Galilæi gravitatis conſtantis, quia preſſiones ob infinite parvam elaſtrorum dilatationem eædem manent, hincque ab iiſdem effici velocitatem in Z eſſe duplam velocitatis in *x*, ut contingit in gravibus, & velocitates in ſingulis ſpatiolis quadruplo majoribus, ex quibus conſtat ſpatium Q H, eſſe duplas ſingularum velocitatum in ſingulis quadruplo minoribus, ex quibus ſpatium P C, ac denique ſummam omnium velocitatum, quæ in ſpatio Q H acquiruntur, eſſe duplam ſummæ omnium velocitatum , quæ in ſpatio P C. His animadverſis monet hæc non bene concludi , niſi globi a punctis Q & P , in quibus quieſcunt, velocitatibus æqualibus diſcedant , quemadmodum accidit in gravium deſcenſu ; hoc autem nec a Bernullio nec ab aliis ulla evidenti ratione adhuc fuiſſe confectum . Cumque ſibi objeciſſet a duabus ſeriebus , antequam ſe expanderent , globos æqualiter preſſos fuiſſe, atque ideo etiam cum ſe explicare incipiunt , æqualibus celeritatibus ab iiſdem impelli; pag. 153. docet latum eſſe diſcrimen inter elaſtra clauſa, interque illa, quæ

ſe

ſe explicant, in iis, utpote mutuo ſe ſuſtinentibus, ſolum ab ultimo elaſtro globum premi, in his autem, ut quæ alia ab aliis amplius non ſuſtinentur, ſed omnia unam verſus partem contendunt, ab omnibus globum pelli, & ideo velocitatem acquirere non in ratione, ut volumus, ſubduplicata numeri elaſtrorum, ſed in ſimplici ejuſdem ratione. Quod confirmat ex eo, quia cum Bernullius nullam materiæ elaſtrorum rationem habeat & ea veluti incorporea cogitet, perinde eſt ac ſi poſuiſſet globum in Q a quatuor preſſionibus, quarum ſingulæ eſſent æquales preſſioni in P, proxime ſollicitari; ex quo efficit impulſum in Q quadruplum eſſe impulſus in P & ideo quatuor partibus majorem velocitatem, & perinde eſſe ac ſi globus in Q a quadam gravitate quadruplo majori, quam in P, cieretur. Qua in re notat a Cl. Heraclito Manfredi in Academia Bononienſi univerſum Bernullii ſyſtema hoc uno perturbatum fuiſſe, quod cum alter in utroque elaſtro æquales preſſiones p poſuiſſet, primus in ſimplici elaſtro poſuit $= p$ & in ſerie quatuor poſuit $= 4p$. & generatim $= np$ exprimente littera n numerum elaſtrorum,

2. Sed ut magis magiſque rationem pro Leibnitiana ſententia ab elaſtris ductam labefactet, pag. 150. Adverſariis dat primorum æqualitatem impulſuum, negat tamen inde conſequi velocitatem in H eſſe duplam velocitatis in C. Concedit enim tum in ſpatiis finitis, cum agitur de gravitate, quam in infinite parvis, cum de vi elaſtrorum, preſſiones eſſe continuas & ſemper æquales, ſed inficiatur inde certo concludi velocitates, quæ ab elaſtris generantur, eſſe in ratione ſubduplicata ſpatiorum, quæ percurſa fuerunt, propterea quod incertum eſt, utrum in gravitatis negotio id accidat ob hanc præciſe rationem, quod preſſiones continuæ & æquales ſunt, an vero ob aliquam aliam legem nobis ignotam. Id vero pag. 159. ſuadere conatur ex eo, quia „ ſi „ actio ſeu preſſio gravitatis eſt continua & æqualis in toto ſpa- „ tio, & nihilominus velocitatem non generat ſpatio proportio- „ ne reſpondentem: quidni eadem ſimiliter eſſe queat continua „ & æqualis toto tempore, quin velocitatem tempori proportio- „ nalem efficiat? Quod ſi gignit in ratione temporis, dicendum „ eſt id ab ea non fieri propter æqualem ejuſdem continuatio- „ nem, ſed ob aliam rationem, quam ignoramus „. Deinde confugit ad ſuum in primo etiam libro explicatum ſyſtema interruptionis ictuum gravitatis, ut inde rationem eliciat, cur velocitates ea genitæ temporibus proportione reſpondeant, vel

ſi

ſi id non probatur, ad experientiam, quæ in gravibus id comprobavit, in corporibus elaſtro preſſis non comprobavit.

3. His quædam ſubnectit de analogia, & ad vitandum ejuſdem abuſum apud Recentiores non rarum quaſdam regulas tradit, quas hic omittemus, ut videamus quid afferat in medium ad id oſtendendum, quod ſecundo loco propoſuit, de quo diſſerere incipit pag. 165. Quamquam hic fere aliud ab eo non proferatur, quam quod in priore libro expendendo jam examinavimus; ait enim puras preſſiones duplas in tempore duplo & ſpatio quadruplo ſatis eſſe ad omnia explicanda, ſupervacaneam eſſe vim vivam, quæ ad iiſdem generetur, eamdemque gratis in Phyſicam eſſe introductam. Ad rationem vero Bernullii ductam ex eo, quod quatuor elaſtra quadruplam vim transfundant oportet, pag. 168. animadvertit Bernullianos, dum ita ſe gerunt, obliviſci hypotheſis ab ipſis conſtitutæ, quod illa immaterialia ſint atque incorporea.

4. Hoc eodem pacto ſolvit invictum Bernullii argumentum petitum ex ſerie quinque elaſtrorum æqualium ſe explicante, & duas hinc inde maſſas alteram $=4$, alteram $=1$ pellente, & cum prima, verſus quam unum tantum elaſtrum ſe exerit, velocitatem $=1$, cum ſecunda, verſus quam quatuor, velocitatem $=4$ communicante; de quo §. 128. num. 3. diſſeruimus. Ut enim pag. 171. & ſequentibus quid ex eo efficiat Bernullius, oſtendit, pag. 180. hæc habet „ Sed hic video „ duo ſpatia (loquitur de ſpatiis, quæ hinc inde a globis „ percurruntur) quæ capere poſſint elaſtra, ipſa elaſtra non „ video, niſi ex improviſo & ſine ratione naſcantur. Quo „ etiam conceſſo, cur ſumma elaſtrorum, quæ ſpatium qua- „ druplum a minori maſſa percurſum occuparet, quadrupla „ diceretur? In quo enim quadrupla foret? In premendo? „ Sed ajunt eam æqualiter premere ac ſimplex elaſtrum. In „ extenſione & magnitudine? At dicunt elaſtra non habere „ nec materiam, nec corpus, nec aliquam maſſam. Quod „ ſi ita eſt, cujus extenſionis & magnitudinis eſſe queunt? „ Præterquamquod quid hic agit magnitudo & extenſio? Nam „ quædemumcumque ea ſit, ſi modo eadem preſſio ſit, idem „ motus exſiſtat oportet. „

5. Demum pag. 181. incipit diſputare de legibus motuum in colliſione corporum perfecte durorum, quæ non ſolum eſſe

poſſe

poſſe cum ipſo adverſus Bernullium, Riccatum, alioſque Leibnitianos defendo, verum etiam re ipſa exſtare, & hujuſmodi eſſe corpuſcula primitiva proxime a Deo creata propter illam, ut mihi quidem videtur, evidentem rationem propoſitam §. 24. ductam ex eo, quod in extenſo vere continuo, qualia ſunt eadem corpuſcula, nullæ ſunt partes re ipſa diſtinctæ; & aliquam ſolutionem difficultatis adverſus Leibnitianam virium æſtimationem ab hiſce legibus petitæ ſe in Commentariis Bononienſibus Leibnitianis obtuliſſe declarat pag. 187, quæ ita ſe habet. Cum duo corpora perfecte dura ſibi mutuo occurrunt, alterum contra alterum ſe exerit non viribus vivis, propterea quod neque contundi neque frangi poſſunt, in quo vis viva impenditur, ſed ſolis motibus. Hinc ſequitur, ſi contrarii motus ſint æquales, fore ut corpora quieſcant, tametſi vires vivæ æquales non ſint: quæ deinde corrumpuntur extinctis motibus, ſine quibus eſſe non poſſunt. Ratio vero Riccati contra corporum perfecte durorum poſſibilitatem, ducta a lege continuitatis, ut vocant, de qua Zanottus pariter ſubtiliſſime diſputat pag. 197. & ſequentibus, ſic concluditur, ut rem in pauca conferam. In corporibus duris ſibi mutuo occurrentibus iis velocitatibus, quæ ſint in ratione inverſa maſſarum, vis viva totam ſuam actionem explicat in tanta partium contuſione, in duriobus totam in minori contuſione, in corporibus etiam durioribus totam pariter in adhuc minori, & ita porro in infinitum in corporibus ſemper durioribus actio vis vivæ integra deprehenditur atque impenditur in contuſione in infinitum valde minori, nec umquam in infinito acceſſu ad corpora duriſſima, in quibus nulla contuſio eſt, actio minor fit, ſed eadem perſeverat. In corporibus omnino duris eadem actio nulla fit, propterea quod ubi nullus eſt effectus vis, ibi nulla eſt ejuſdem actio, quam effectus metitur; ibi autem nullus eſt vis effectus, ubi corpora ſibi occurrentia nec regrediuntur, nec ſe comprimunt, ſed ſtatim ac ad contactum pervenerunt, perfecte quieſcunt. Id autem eſt contra legem continuitatis, quæ requirit, ut in terminis ſeriei corporum magis magiſque durorum & ad corpora perfecte dura propius accedentium actio vis vivæ ſemper minor fiat, ſi in ultimo illius ſeriei termino ideſt in perfecte duris nulla obſervatur. Hæc ex Riccato, quibus quid Zanottus reſpondeat, paulo poſt videbimus.

§. 219.

§. 219. Auctoris Cenſura

Prius enim videndum eſt, quid Zanotto reſpondeam infirmanti rationes ductas ab actione elaſtrorum. Qua in re ingenue fateor nihil propius eſſe factum, quam ut in ejuſdem ſententiam deſcenderem. Sic ea, quæ ab homine diſputata ſunt, non perſuadere ſed cogere videbantur. Sed quod alibi diſſeruimus de natura elementorum quantitatis continuæ §. 15. & 16. deque tribus vis motricis elementis §. 128. 180. & ſeq. & 217. me jam labantem ſuſtentavit confirmavitque, & rationem ſuggeſſit expediendi nodos, quibus Zanottus totam hanc rem implicaverat. Nam duo ſunt optime diſtinguenda, elementum ipſum quantitatis, & lex, qua fluit, ſive fluere intelligitur. Quod attinet ad elementum, jam §§. citatis advertimus ipſum non eſſe idem ac infinite parvam quantitatem ejuſdem naturæ, ac illa, cujus dicitur elementum, ſed elementa ſunt modi & termini, qui in quantitate ſunt, non autem ex quibus quantitas conſtet. Ita ſunt puncta ratione habita lineæ, lineæ ratione habita ſuperficiei, & ſuperficies ratione habita ſolidi. Quare vera elementa lineæ ſunt puncta ſine ulla extenſione, vera elementa ſuperficierum ſunt lineæ ſine ulla latitudine, vera elementa ſolidorum ſunt ſuperficies ſine ulla profunditate. Lex vero progreſſionis, ſive modi, quo hæc elementa fluunt, præſertim attendenda eſt in definienda quantitate, quæ inde oriri percipitur, adeout duo elementa, quorum alterum ratione alterius ſit infinite parvum, eamdem, ut vidimus §. 88. quantitatem generare poſſint, vel ſaltem utraque finitam eodem tempore, ſi modo lex progreſſionis id poſtulet. Porro ex his conſequitur preſſionem, quæ eſt elementum vis, diſtinguendam eſſe a lege, qua fluit, & a celeritate fluxus ejuſdem. Ex quo fit, ut preſſiones in elaſtris ſe per ſpatiola infinite parva dilatantibus ſemper eædem ſint, tametſi aliæ aliis velocitatibus fluant. Fac enim duas rectas æquales fluere, alteram duplo majori, alteram duplo minori celeritate; nonne eodem tempore prima duplo majus rectangulum generabit, quam ſecunda? Nihilo tamen minus latitudo ejuſdem rectanguli a longitudine lineæ fluentis pendens eadem ubique reperietur & æqualis latitudini alterius. Siquidem advertendum eſt, quod alibi etiam monuimus, cum de tempore diſputaremus §. 50. hæc elementa in tota quantitate poſſe deſignari, propterea quod ſunt illa, in quibus aut incipit quantitas, aut deſinit, aut continuat. Ubi eſt ergo diſcrimen inter illa

rectangula ? In ſola rectarum æqualium diverſa celeritate. Quamobrem hoc idem contingat neceſſe eſt in preſſionibus, ex quibus vis viva generatur. Sive preſſiones quatuor elaſtrorum AQ (*Fig.* 46.) & unius elaſtri EP ſunt ſemper æquales per ſpatiola QZ, P*x* non ſolum antequam elaſtra ſe expandant, ut Zanottus vult, quod tamen ſi ad vivum reſecetur, falſum eſſe docent ea, quæ ſæpe diſſeruimus de puris preſſionibus per ſe non exſtantibus §. 124. 125. ſed etiam eo tempore, quo per eadem ſpatiola elaſtra ſe explicant, totumque diſcrimen eſt in velocitate, quæ major eſt in elaſtris AQ per ſpatium QZ, quam in elaſtro EP per ſpatium P*x*. Nam ut probavimus §. 204. num. 3. ſeries elaſtrorum, quæcumque ea ſit, non ſe explicat, niſi virtute illius brachii, quod ad corpus movendum applicatum eſt, primum adverſus obicem nititur, alia omnia utpote quæ in contrarias partes viribus æqualibus tendunt, ſe viciſſim ſuſtinent. Ergo in eo præciſe, quod in una ſerie plura ſint elaſtra, non eſt ratio, cur globus impulſus majori velocitate feratur; propterea quod preſſiones, etiam cum aperitur, ſemper æquales ſunt. Dixi præciſe; nam ideo ſeries ex pluribus elaſtris compoſita majorem generat velocitatem & vim, quam ſeries ex paucioribus, quod in illa ſingula elaſtra nequeunt ad maximam expanſionem pervenire, niſi in tanto majus ſpatium ſe extendant & longiori tempore globum novis ictibus percellere pergant. Quod dum accuratius explico, viam mihi muniam ad evidentem ſolutionem difficultatis a Zanotto propoſitæ.

2. Ex lineola QZ quadruplo majori, quam P*x*, abſcinde 1:4, ideſt Q*t*, quæ erit æqualis lineæ P*x*. Dum elaſtrum hanc Q*t* uno tempuſculo abſolvit, ictibus ſemper continuatis & æqualibus unum gradum velocitatis & vis imprimit. Quare ſecundo tempuſculo velocitate finali elaſtrum & globus ab eo pulſus abſolvet ſpatium duplum ejus, quod primo tempuſculo velocitate indeſinenter & æqualiter aucta peragrat, ideſt duplum ſpatioli Q*t*: interea ab elaſtro novum æqualem gradum velocitatis globus acquirit, propterea quod in toto ſpatiolo QZ preſſiones ſunt æquales, & alioquin perinde eſt, ac ſi globus ratione habita elaſtri quieſceret, cum æquali utrumque celeritate cieatur. Ergo ſecundo tempuſculo vi novi gradus acquiſiti ſpatiolum æquale ſpatiolo Q*t* conficit. Ex quo efficitur ſecundo tempuſculo ſpatium perfici triplum ejus, quod

primo

Digitized by Google

primo fuerat tranſactum, atque ideo quemadmodum in ſyſtemate Galilæano, ita hic velocitates & tempora eſſe in eadem ratione, & ea quidem ſubduplicata ſpatiorum, quæ percurſa fuerunt. Jam vero ex his colligitur, quod paulo ante inſinuabam. Conſtat enim non ſolum preſſiones & velocitates initiales in punctis Q & P, ſed etiam finales in *t* & *x*, atque omnes interpoſitas inter æqualiter diſſita puncta Q & *t*, P & *x* eſſe æquales; quia non poſſunt eſſe inæquales nec ratione diſtractionis elaſtrorum, nec ratione temporis in iis ſpatiolis percurrendis inſumti; non primum, quia ſpatiola infinite parva Q*t*, P*x* efficere non poſſunt, ut elaſtra unius ſeriei non ſint æqualiter tenſa, ac elaſtra alterius. Nam elaſtra tamdiu ſunt æqualiter tenſa, quamdiu ſpatia, in quibus explicata reperiuntur, ſunt in ratione numeri elaſtrorum, ideſt in ratione quadrupla in præſenti hypotheſi, ideſt ut AQ ad EP; ſed ob infinite parvas lineolas Q*t* & P*x* eſt A*t* ad E*x*, ut AQ ad EP, ſcilicet in ratione quadruplo majori, quemadmodum uſuveniebat, antequam ſe elaſtra explicarent. Igitur preſſiones, quod attinet ad intenſionem, in ſpatiolis Q*t* & P*x* ſint æquales oportet. Eadem vero æqualitas intercedat neceſſe eſt, quod attinet ad earum numerum & ſummam. Cum enim ex altera parte preſſiones intenſione ſint æquales, ex altera ſpatiola Q*t*, P*x* pariter æqualia ponantur, non eſt major ratio, cur majori velocitate fluant in alterutro ex dictis ſpatiolis. Ex quo tandem efficitur æquales in iiſdem gigni velocitates, & æqualia in iiſdem percurrendis tempuſcula inſumi. Unde etiam magis confirmatur id, quod paulo ante obſervavi, non ideo majorem effici velocitatem in ſpatiolo QZ, quam in P*x* aut Q*t*, quia preſſiones ipſæ per ſe ſint inæquales; nam eſſe æquales conficitur ex eo, quod AZ ad E*x* ita ſe habet ut AQ ad EP, ſed quia ubi æqualis earum ſumma in ſpatiolis æqualibus Q*t*, P*x* collecta eſt, reſtat triplum ſpatiolum *t*Z, in quo abſolvendo major earum ſumma colligitur. Concluditur quoque nec ab Heraclito Manfredi probe conſtitutam fuiſſe preſſionum formulam, dum eas numero elaſtrorum proportione reſpondere vult, nec ex quadruplo majori elaſtrorum numero quadruplam velocitatem initialem aut finalem jure ac merito fuiſſe elicitam a Zanotto, qui hypotheſim quatuor elaſtrorum, quorum aliud alii ſuccedit, eamdem eſſe velle videtur ac hypotheſim quatuor, quorum

quodlibet proxime in globum ſe exerit, & ideo in illo quadruplam preſſionem & quadruplam initialem velocitatem gignit. In quo quantum abſit a vero, perſpicuum faciunt, quæ hactenus ſunt diſputata.

3. Quod vero attinet ad id, quod numero ſecundo ſuperioris §. ex eodem attulimus, mihi videtur in dubium revocare neceſſitatem formularum, quæ in motibus definiendis primariæ ſunt, ejus præſertim, quæ ponit incrementum dv velocitatis v eſſe = producto ex potentia p, quæ tempuſculo pro conſtanti haberi poteſt, in idem tempuſculum dt, ideſt $dv = p\,dt$. Ex ea enim neceſſario ſequitur non ſolum in gravitate ſed etiam in qualibet alia potentia conſtanti ſimul & indeſinenter corpus ſollicitante incrementa velocitatis eſſe proportionalia temporibus, & ideo velocitates & tempora rationem ſequi ſubduplicatam ſpatiorum. Quod theorema poſtquam Eulerus tom. 1. Mech. §. 150. edit. Petropol. 1736. demonſtraſſet ope §. 130. tandem §. 152. hæc concludit. *Apparet igitur non ſolum verum eſſe hoc theorema, ſed etiam neceſſario verum, ita ut contradictionem involveret ponere* $dc = p^2 dt$ *vel* $p^3 dt$, *aliamve functionem loco* p. *Quæ omnes cum Cl. Danieli Bernullio in Comm. tom. 1. æque probabiles videantur, de rigidis harum propoſitionum demonſtrationibus maxime eram ſollicitus.* Ut vero hoc idem meis principiis expendam, ajo in qualibet potentia ſive preſſione conſtanti præter tempus, quo durat, duo eſſe conſideranda, intenſionem ſive magnitudinem ipſam preſſionis, & legem atque celeritatem fluxus. Si duæ preſſiones conſtantes ipſæ per ſe ſint æquales, in æqualibus maſſis & temporibus illas fluere eadem prorſus lege & velocitate certum judico. Cum enim in cauſſis omnia æqualia ſunt & æqualiter diſpoſita, unde inæqualitas in effectu poteſt oriri? Quamobrem hæ duæ preſſiones æquales æqualibus temporibus æquales generent velocitates neceſſe eſt. Quod ſi eædem preſſiones conſtantes ſint inæquales, ob eamdem & conſtantem rationem, quæ eſt inter ſingulas preſſiones fluentes ex una parte, & inter ſingulas fluentes ex alia, fluant quidem ſimili lege opus eſt, ſed velocitates fluxus habebunt ſuiſmet quantitatibus proportione reſpondentes. Nam quo tempore preſſio = 1 velocitate = 1 fluit, eodem preſſio = 2 velocitate = 2 fluat oportet. Ex quo fit velocitates eſſe proportionales producto ex potentia conſtanti in tempus, quo illa potentia conſtans perſeverat,

non

non ſolum in ſpeciali caſu gravitatis, ſed etiam generatim in caſu cujuſcumque conſtantis potentiæ, ut allatæ rationes evincunt.

4. Nec difficultatem facit, quod ad hæc in dubium revocanda profert Zanottus; nam præter id, quod oſtendit Eulerus §. 135. velocitates genitas a potentia conſtanti eſſe non poſſe in ratione ſpatiorum, quæ percurruntur, propterea quod corpus ea velocitate loco decedere nequiret, nonne patet ex iis, quæ paulo ante ex Galilæi ſententia attulimus, corpus ſecundo tempuſculo præter ſpatium confectum ea velocitate, quam in eodem acquirit, & quidem æquale ſpatio, quod primo conficitur, aliam ſpatii partem, & quidem duplo majorem velocitate jam in primo acquiſita tranſire debere? Qui enim fieri poteſt, ut otietur vis, quæ primo tempuſculo acquiſita fuit? Quod ſi ita eſt, velocitates in motu corporis eadem vi conſtanter & ſimul indeſinenter pulſi ſpatiorum rationem tenere non poſſunt. Deinde vim eſſe continuam in tempore quidnam eſt in vera temporis notione, quam §. 39. evolvimus? Aliud nihil quam vim corpori indeſinenter communicari ſimul cum motu æquabili ſolis per certum ac definitum ſpatium, quod ab eo perficitur, cujuſque initium & finis incidunt, illud in initium, hoc in finem communicationis vis. Quare huic potius motui atque ſpatio, quod eo perficitur, velocitas corporis proportione reſpondeat neceſſe eſt, non autem alteri, quod ea vi abſolvitur, cuique propter datam rationem velocitas in eo genita proportionalis eſſe non poteſt.

5. Venio ad id, quod ſæpe monuit de immateriali elaſtrorum natura, & Zanotto concedo, ſi rem Metaphyſica, ut ajunt, aut Mathematica ſubtilitate examinaveris, fingenda eſſe hujuſmodi elaſtra omnis maſſæ corporeæ expertia, quo ſcilicet, nulla vis particula in iis reſtante & tota in globos transfuſa, prorſus vera eſſe poſſint theoremata, quæ ex Bernullio & ex Camuſio in ſuperioribus conſtituimus; nego tamen id opus eſſe, ſi in phyſica veritate tibi conquieſcendum eſſe exiſtimaveris. Nam ad obtinendas velocitates iis theorematibus conſtitutas, quod attinet ad ſenſus, quorum teſtimonio Phyſica contenta eſt, alio non eſt opus, quam quod, niſi fallit memoria, Bernullius in citato Opere ſignificavit, noſque ſupra monuimus §. 155. & facile perfici poteſt, ut ſcilicet adhibeamus elaſtra tam exiguæ maſſæ ratione habita globi movendi, ut minima vis eorum pars & in ſenſus non incurrens, atque ideo in Phyſicis negligenda in iiſdem perſtet, maxima

ma autem, & tantum non æqualis toti vi ab elaſtris profectæ in globum transferatur. Quod ſi nihilominus mathematicam ſubtilitatem perſequi placeat, tunc, ut ſupra monui, hypotheſis duarum potentiarum ſive preſſionum, quarum primæ ſint ab initio & eodem tempore atque in ſingulis inſtantibus quadruplo majores quam ſecundæ, ut uſuvenit in quatuor elaſtris æqualibus ſimul copulatis *Fig.* 47. num. 3. & in ſimplo *Fig.* 47. num. 4. non eſt confundenda a Zanotto, ut in probatione ſecundæ partis facere videtur, cum hypotheſi duarum preſſionum, quarum primæ ideo quadruplo plures exſiſtunt, quia duplo majori tempore, quam ſecundæ, fluere pergunt, & quamvis quæ hinc inde fluunt prima parte temporis utrimque æquali ſint omnino æquales, ſive rationem habeas magnitudinis ſingularum, ſive ad celeritatem, qua fluunt, animum advertas, tamen quæ ex primis fluere continuant in alia æquali particula temporis, in qua ſecundæ ceſſant, ratione majoris celeritatis, ut paulo ante explicavimus, triplo majorem ſummam conficiunt. Quo ſatisfit etiam ſecundæ parti; nam quod in ea probandum aſſumitur de nulla vis vivæ a potentiis diſtinctæ neceſſitate, in ſuperiori articulo jam refutatum eſt.

6. Quamobrem nihil aliud eſt reliquum, niſi ut rationi a Riccato concluſæ adverſus poſſibilitatem corporis perfecte duri ſatiſfaciamus. Zanottus multa congerit contra legem continuitatis, quibus efficitur non adeo neceſſariam eſſe legem hujuſmodi, ut vel in phyſicis vel in geometricis diſciplinis numquam aliter eſſe poſſit. Exemplum tamen ab homine allatum pag. 117. & 178. & ductum a natura angulorum, qui lateribus ſemper magis a ſe divertentibus indeſinenter creſcunt, & cum maximi evaſerunt, lateribus in directum jacentibus repente evaneſcunt, nullo negotio refelli poteſt a Bernullianis, ſi modo adverterint, quod Par. I. §. 67. oſtendimus, angulos non eſſe ſpeciem aliquam quantitatis, quæ ipſa per ſe augeri aut minui poſſit, ſed ſolum qualitatem aliquam ejuſdem, quæ intendi ac remitti non intelligitur, niſi ratione habita arcus circuli, qui ab iis comprehendatur, quique revera perpetuo creſcit, numquam vero ex improviſo fit nullus. Magis facit ad rem exemplum ductum a lineis curvis, quas eſſe poſſe diſcontinuas ipſe fatetur, tametſi quæ a Mathematicis conſiderantur, continuæ ſint. Re tamen vera ab iis etiam ad examen revocantur, in quibus continuationis lex nequaquam ſervatur. Inter plures, quæ in medium afferri poſ-

Digitized by Google

poſſent, illam unam profero, quam Eulerus expendit in Introd. ad Anal. Infin. tom. 2. cap. 12. pag. 152. edit. Lauſannæ an. 1748. Siquidem in ea ordinatæ ex finitis & realibus fiunt imaginariæ & nullæ, & paulo poſt denuo oriuntur finitæ & reales. Verum ut ut hoc ſe habeat, quo potiſſimum haud innitor, ajo continuitatis legem etiam in hoc negotio ſervari. Quod §. 201. num. 24. adeo feci perſpicuum, ut nullus poſſit amplius ſcrupulus reſidere, quin hypotheſis corporum perfecte durorum & motus communicatio inter ipſa cum lege continuitatis optime concilientur.

ARTICULUS III.

De libro tertio Cl. Zanotti.

§. 220. Exponitur ſententia Zanotti

Atque his Zanottus finem imponit ſecundo libro; in tertio autem aggreditur ipſam Riccatiani Operis arcem, demonſtrationem videlicet Leibnitianæ virium æſtimationis propoſitam in colloquio ſeptimi diei, quam nos §§. 208. 209. adumbravimus. Primum vero pag. 254. negat actionem chordæ elaſticæ diſtractæ eſſe = producto ex potentia in contractionem, ſive ex potentia in ſpatium, per quod illa contrahitur; quia nimirum actio chordæ non eſt ipſius contractio, ſed motus, qui corpori attracto communicatur: nam cum in ſpatiolo infinite parvo potentia chordæ eadem ſemper ſit perinde ac gravitas, in æſtimanda vi & actione, quæ ab illa exercetur, non eſt habenda ratio ſpatii, in quo corpus æqualibus ictibus ab ea ſollicitatum eſt, ſed velocitatis, quæ in eodem generatur, quemadmodum non ſpatii ſed velocitatis ratio habetur in æſtimatione actionis, quæ a gravitate exercetur.

2. Deinde multo acrius pag. 266. impugnat eam Riccatianæ ſententiæ partem, qua vult (*Fig.* 56.) actionem chordæ AS trahentis per directionem neceſſariam AD non reſpondere ſpatiolo percurſo A*a*, ſed ſpatiolo A*p*, quod contractioni chordæ & ejuſdem acceſſui ad punctum fixum S proportione reſpondet, quia ducta perpendiculari *ap*, duæ rectæ S*a*, S*p* ſunt æquales. Ad rationem vero Riccati ductam ex eo, quod actio eſt eadem nec ſpatio acceſſus nec potentia variantibus, tria reſpondet; primum nec potentiam nec ſpatium acceſſus variari, etiamſi corpus

ab A in *p* delaberetur per duas rectas, quæ ad aliquem angulum concurrerent, nihilo tamen minus actionem tunc eamdem non eſſe futuram, quia corpus longe diverſam celeritatem acquireret. Alterum, ſibi non placere ad formandam actionis notionem potentiam eſſe applicandam non ad ſpatium, quod perficitur, ſed ad illud, quod non perficitur. Tertium, nec illud ſibi arridere, quod actio dicatur potentia ad ſpatium applicata, quia ad quodcumque ſpatium applicetur, ſibi ſemper videatur eſſe potentia, numquam actio, cum ſint res diſcrepantes, nec quædemumcumque applicatio fiat, poſſit alia in alius naturam convertere, quemadmodum nec tempus quocumque modo applicetur, fieri queat ſpatium, nec ſpatium in naturam vis commeare.

3. Sed pag. 269. multo efficacius refellit hanc actionum chordæ æqualitatem his verbis ab italica lingua in latinam converſis, & propter ſchematis noſtri a ſchemate ipſius differentiam aliis alphabeti litteris loco earum, quæ ab homine uſurpantur, ſubſtitutis. „ Itaque ajo potentiam, cum ſuam actionem exercens „ in obicem oblique incurrit, univerſim ſe magis exerere, & ſui „ quodammodo periculum facere, quoniam ſtatim incipit pre„ mere obicem & impellere, quantum poteſt, quo illum repel„ lat, nec tamen deſiſtit premere & niti verſus alteram pla„ gam, quæ duæ actiones ſimul ſumtæ ſunt ſemper majores „ illa prima, quam exercebant, actione; quod clare dignoſci„ tur ex reſolutione cujuslibet motus. Sed ne aliunde exem„ pla ducamus, omnibus exploratiſſimum & certiſſimum eſt „ nec ab ipſo Patre Riccato negatum, ſi chorda S A (*Fig.* 56.) „ globum verſus S trahens in obicem plani A D incurrat, „ futurum eſſe, ut is globus incipiat non ſolum percurrere „ planum A D, ſed etiam premere ipſummet planum, & vi „ non mediocri impellere. Quod ſi actionem, qua chorda, „ plano amoto, globum attraheret ab A uſque in *p*, volumus „ eſſe æqualem illi actioni, qua poſito plano eumdem trahit „ ab A uſque in *a*, perſpicuum eſſe videtur, ſi huic actioni „ aliam illam, qua planum premit & urget, addamus, duas „ actiones ſimul conjunctas futuras eſſe majores ſola priori. „ Quoniam vero ambæ ab eadem chorda proficiſcuntur, con„ cludendum eſt actionem chordæ globum trahentis ab A in „ *a* majorem eſſe actione ejuſdem, dum ab A in *p* globum „ trahit. „ Hactenus Zanottus, qui pag. 272 ſibi hæc duo objicit, primum preſſionem plani non eſſe actionem, quia ubi

nullus

nullus eſt motus, ibi nullus effectus eſt, ubi autem nullus effectus, ibi nulla eſſe poteſt actio; alterum, etſi etiam actio ſit, eſſe tamen actionem infinite parvam, & ideo nullam, quia ſi cum Riccato in colloquio diei ſeptimæ pag. 220 aliam potentiam ſive chordam TA fingamus perpendicularem ad planum in A, & interea globus a chorda SA trahatur per *Aa* potentia, quæ ſit ut AH; chorda TA tranſibit in T*a*, & facto centro T deſcriptoque circuli arcu A*q* eadem diſtrahetur per ſpatiolum *qa* infinite parvum ſecundi gradus, ſi cum ſpatiolo A*a* vel A*p* conferatur, ut ex principiis conſtat Analyſis Infinitorum. Quare actio chordæ TA erit infinite parva ratione habita actionis chordæ AS.

4. Quorum primo pag. 274. reſpondet preſſionem, qua planum urgetur ſine ullo motu, eſſe ejuſdem generis ac eſt quælibet preſſio, ex qua motus oritur, atque idcirco eſſe effectum, ideoque actionem potentiæ, quod accuratius explicat & confirmat pag. 277. & 278. ubi ſibi viam munit ad alterum diluendum. Advertit enim eſſe quidem infinite parvum inſtantaneum impulſum corporis, ex. gr. planum immobile ſubjectum gravantis, ſed ſummam omnium impulſuum, qui aliquo finito tempore a corpore cum plano communicantur, eſſe æqualem ſummæ omnium impulſuum, quibus grave eodem tempore delapſum urgeretur; quo pag. 282 perſpicuum facit eamdem ſummam impulſuum, quibus chorda TA planum AD premit, eſſe finitam, tametſi motus ea genitus infinite parvus exſiſtat, non ob defectum potentiæ chordæ, ſed ob reſiſtentiam plani, quod indeſinenter corrumpit impulſus, ſimul ac generantur, & impedit, quominus unam colligantur in ſummam.

5. Pagina 282 & ſequentibus finem imponit expoſitioni rationis a Riccato concluſæ, contra quam multa congerit, quæ cum nullam habeant vim adverſus noſtra principia, ab iiſdem brevi me expediam. Primum pag. 298 negat rationem a Riccato concluſam valere in motibus compoſitis ſed æquabilibus, qualis eſſet corporis motu æquabili lati ſuper tabulam, quæ pariter aliorum motu æquabili ferretur. Deinde ait pag. 299 compoſitionem a Mechanicis fieri etiam in preſſionibus, in quibus cum nullus ſit motus, qui locus erit funibus elaſticis, quinam eorum contractionibus? Nec difficultatem vitare Riccatum, qui in motibus æquabilibus aut in preſ-

preſſionibus actionem ullam intercedere negat, quia ſi actiones non ſunt & nihilominus fit compoſitio in iiſdem, dicendum videtur rationem & modum, unde ipſa perficitur, aliter quam adminiculo actionum eſſe explicanda. Tertio pag. 302 & ſequentibus æqualitatem inter cauſſam & effectum, quam Metaphyſici volunt, ſartam tectam ſervari probat etiam non admiſſa vi viva, quæ velocitatis quadrato proportione reſpondeat. Nam eædem potentiæ ſeparatæ plus operantur, ad angulum copulatæ minus; nec id opponitur principio æqualitatis inter cauſſam & effectum, propterea quod conjunctæ ſibi mutuo aliqua ex parte obnituntur. Demum utramque potentiam BA, DA æqualem (*Fig.* 57.) in duas reſolvit AH, AM, & AE, AM, & deſtructis AH, AE utpote contrariis & æqualibus, velocitatem reſiduam 2AM, ſive AC eſſe vult proportionalem potentiis, a quibus oritur; nec cum dicto principio æqualitatis inter cauſſam & effectum pugnare duas AH, AM eſſe majores potentia AB, quia hoc nihil aliud eſt, quam potentiam AB modo plus, modo minus operari, quemadmodum nec pugnat duas AH, AE perimi, nec ullum gignere effectum, duaſque AM, MC in unam colligi ſummam, & effectum ab iis genitum cauſſæ proportione reſpondere, ſi nomine effectus intelligatur velocitas, quæ rationem ſequitur potentiæ AC.

6. Cum denique pag. 306 reſolutionem illam potentiæ AB in duas ipſa majores AH, AM reſolvi rem eſſe obſcuriſſimam ſibi objeciſſet, id aſſentitur, ſed negat hac in re obſcuritatem a Philoſophis poſſe vitari, nec certe ait vitari a Riccato, dum ſcribit ſe haud ſcire, an ille reſolvens potentiam AB in actionem, quæ movet corpus in diagonali, & in preſſionem, quæ cum potentia AD digladiatur, & ſimiliter reſolvens ipſam AD, majorem huic reſolutioni afferat lucem, dum eam preſſionem nomine actionis donari negat. Quibus ſcriptis & aliis paucis in Metaphyſicæ laudem adjectis elegantiſſimo libro finem imponit.

§. 221. Noſtra Sententia

Sed antequam explicem, quid ad ſingula mihi dicendum eſſe videatur, in anteceſſum adverto, Riccatum non ponere tamquam certum principium, quod actio chordæ elaſticæ proportione reſpondeat potentiæ ejuſdem ductæ in contractionem aut diſtractionem, ſive in ſpatium, in quo illa contrahitur

aut

aut diducitur, ſed ſolum id ex hypotheſi ſibi ſumit, ut conceptis verbis affirmat pag. 215. in eum ſcilicet finem, quem ibidem declarat Neſtor unus ex interlocutoribus hiſce verbis: „ Si bene percipio, tuum conſilium hoc eſt. In ſententia „ Carteſiana, quæ actionem ex tempore metitur, fieri non „ poteſt, ut ſervetur æqualitas inter effectum & cauſſam, in „ Leibnitiana, quæ ex ſpatio, non ſolum ſervatur, ſed etiam „ reſolutio & compoſitio virium principio æqualitatis inter „ effectum & cauſam oſtenduntur. Ergo Carteſiana vera eſſe „ non poteſt, ſed illa ſola, quam Leibnitiani defendunt. „ Et revera ſi Riccatus id tamquam principium, unde demonſtrationem conficeret, poſuiſſet, ſecum minime conſenſiſſet. Nam cum ex altera parte in colloquio ſexti diei monſtraſſet nihil eſſe momenti in ratione ducta a ſpatiis, quæ a gravibus conficiuntur, ex altera hypotheſim funis elaſtici per minimum ſpatiolum cum hypotheſi gravium delabentium congruere monuiſſet, inconſtantiæ argueretur, ſi actionem eſſe proportionalem potentiæ ductæ in ſpatium, in quo contrahitur tamquam rem certam & exploratam ſumſiſſet. Quare non intelligo, cur poſteaquam unus ex Zanotti interlocutoribus hanc Riccati hypotheſim expoſuerat, Zanottus hæc reſpondeat pag. 260 „ Si „ hæc (demonſtratio Riccati) poſita eſt in iis, quæ hactenus „ declaraſti, incipio jam illam loco valde incertæ demonſtra- „ tionis habere „ Hoc enim eſt illud ipſum, de quo diſputatur, quod ex præſcripto legum methodi, quæ ab analyſtis frequentiſſime uſurpatur, is poſuit, ut eo admiſſo æqualitatem inter effectum & cauſſam ſartam tectam ſervari monſtraret, eo negato nequaquam, indeque concluderet illud eſſe verum, atque ideo etiam Leibnitianam æſtimationem, quæ ex eodem conſequitur. Quare id Riccato tamquam hypotheſis dandum eſt, cum eoque ſolum eſt contendendum de iis duobus, quæ ſibi oſtendenda propoſuit, aut de alterutro. Quod ſi etiam velimus ejuſdem demonſtrationem, in alio non eſt, quam in ratione, quam in ſimili negotio gravitatis conſtantis, aut elaſtrorum per minimum ſpatiolum ſe exerentium alibi pluribus locis & recens §. 208. dedimus, petitam ex tribus vis motricis elementis, preſſione ſive potentia, velocitate, qua fluit, & tempore, quo fluere pergit. Ex quo petitur reſponſio ad id, quod priore loco exſcripſimus ex Zanotto, cur ſcilicet vis motrix & actio ponenda ſit = producto ex potentia

tentia in ſpatium, non vero celeritati aut producto ex potentia in tempus, quia ut alias monſtravimus, ſpatium eſt æquale producto ex velocitate fluxus in tempus, quo is durat §. 206. num. 1.

2. His conſtitutis venio ad ea, quæ numeris 2. 3. & 4. expoſita ſunt, & ut clarius meam ſententiam explicem, pono globum in A (*Fig.* 56.) trahi eodem tempuſculo a duabus chordis elaſticis, altera AH, cujus potentia ſit AH per ſpatiolum A*a*, altera AE perpendiculari ad AH, cujus potentia ſit pariter AE, per ſpatiolum A*z*; in hac hypotheſi, perfecto rectangulo A*amz*, globus eodem tempuſculo deſcribet diagonalem A*m*. Ex quo eruitur duas actiones & vires per A*a*, A*z* in unam coaleſcere per A*m*. Quare chorda elaſtica AS ut æqualem, ac illæ ſimul copulatæ, vim habeat, neceſſe eſt, ut eodem tempuſculo trahat globum per ſpatiolum, ſive diagonalem A*m*; id quod obtinebit, ſi ejus potentia fuerit ut AB diameter rectanguli AHBE duarum AH, AE. Quod ſi chorda AS non ſit libera, nec ideo globum ſecundum directionem AS trahat, ſed ob planum AD trahere debeat in directione neceſſaria AD, tunc vi & directione potentiæ AE per ſpatiolum A*z* nullam globo ſaltem ad ſenſum velocitatem impertietur, ſed ſolum planum immobile premet ea tamen ratione, quam alias explicavimus, ut pura preſſio ſine generatione alicujus minimæ vis & celeritatis eſſe non queat, ſed globum movebit ſolum per potentiam AH in ſpatiolo A*a*. Quamobrem ſi præciſe loqui velimus, eadem eſt actio & vis genita a chorda, ſive trahat in directione libera per ſpatiolum A*m*, ſive in neceſſaria per ſpatiolum A*a* tempuſculo eodem, præſertim in vera ſententia, quam §§. 124. 125. late probavimus, nullas in hac rerum univerſitate puras preſſiones exſiſtere poſſe, propterea quod quædam preſſionum chordæ AS ſumma impenditur in movendo globo ſecundum directionem A*a*, reſiduum autem in propellendo plano, cum in directione libera A*m* preſſiones omnes ab ea profectæ in globum transfundantur. Quoniam vero ſi funis pergat attrahere globum per ſpatium aliquod finitum plani AH, preſſiones AE ad planum perpendiculares nullam, quod ad ſenſus attinet, velocitatem cum globo communicant, propterea quod licet vim vivam generant propellendo aut comprimendo plano, tamen eadem valde exigua eſt & ſimul ac generatur, a contraria vi

plani

plani ſe reſtituentis extinguitur, hinc fit, ut eadem jure ac merito negligatur, & ſolius actionis ac preſſionum ſummæ, quæ in globo movendo impenduntur, ratio habeatur. Hæc autem actio ſive ſumma preſſionum fluentium ſi præciſe conſideretur, eſt æqualis actioni ſive ſummæ preſſionum ejuſdem chordæ, dum in directione libera AS per ſpatiolum A*p* ſe contrahit: nec mirum videri debet, quia cum tempuſculum per A*a* ad tempuſculum per A*p* ſe habeat in ratione directa ſpatioli A*a* ad ſpatiolum A*p*, & potentiæ in ratione eorumdem inverſa §. 208. potentia ex. gr. duplo minor in duplo majori ſpatio & tempore eamdem vim generet oportet, ac potentia dupla in duplo minori ſpatio & tempore; cum enim vires ſint æquales producto ex potentia in celeritatem, qua fluit, & tempus, quo fluxus durat, & potentia duplo major duplo majori velocitate in eodem tempuſculo fluat, erit vis genita a prima $= 2.2.1 = 4$, eo quod potentia eſt $= 2$, celeritas $= 2$ & tempus $= 1$; vis autem genita a ſecunda in eodem tempuſculo erit $= 1.1.1 = 1$. Quia vero in ſecundo dimidio dupli tempuſculi triplo major vis generatur ob ea, quæ §. 219. diximus, vis genita a duplo minori potentia in duplo tempuſculo erit $= 4$, & ideo vim generatam a prima exæquabit. Conficitur ergo actionem chordæ AS trahentis in directione neceſſaria AH per ſpatiolum A*a*, & virium menſuram contractione ejuſdem generatam, ſi preſſiones cum plano AD communicatas non computemus, eſſe æqualem actioni ejuſdem trahentis in libera AS per A*p*, & ſummæ preſſionum, quæ hoc pacto in corpore colliguntur. Quod ſi Zanottus eas computare velit, aſſentior plus operari funem, dum trahit in directione neceſſaria AD per ſpatiolum A*a*, quam cum in directione libera per ſpatiolum A*p*, & ajo integram actionem chordæ AS trahentis in directione neceſſaria AD per A*a* eſſe æqualem actioni ejuſdem, dum eodem tempuſculo trahit in directione libera per A*m*, quæ ſit diameter rectanguli A*amz*. Quod ultimum cum negetur ab homine, qui vult eamdem potentiam alio atque alio modo applicatam aliter operari, quale ſit, paulo poſt videbimus.

3. Nunc enim videndum eſt, quid ad hæc is dicere poſſit; equidem puto æqualitatem inter illas duas actiones a Zanotto iri conceſſum in ſenſu abſtracto, proptereaquod eædem in globo ſive per A*a*, ſive per A*p* velocitates gignuntur, ſed eum negaturum æqua-

æqualitatem hoc pacto explicatam conferre ad id efficiendum, quod Riccato propoſitum eſt, in ſententia Leibnitiana ſervari principium æqualitatis inter effectum & cauſſam, non vero in Carteſiana. Quid vero pro demonſtratione Riccati ſarta tecta contra hæc dici poſſit, ipſe viderit. Mihi enim id neceſſarium non eſt, qui rationes pro Leibnitiana virium æſtimatione a compoſitione virium petitas alio modo contorſerim. Siquidem §. 208. num. 1. & 6. vim præcipue feci in eo, quod vires æquales ad angulum rectum oppoſitæ in maſſa conjunctim pellenda generant eamdem vim, ac ſi ſeorſim duabus maſſis æqualibus inter ſe, & etiam primæ tribuerentur, & dimidium generant ejus vis, quam in eadem maſſa gignerent, ſi omnino congruerent; idque propter eam, ut mihi quidem videtur, evidentem rationem, quod quantum ſibi adverſantur, tantumdem favent, & oppoſitio congruentiam exæquat.

4. Atque hæc quod attinet ad illa, quæ numeri 2, 3 & 4 complectuntur; reſtat ut de iis, quæ numeris 5 & 6 diſputata ſunt, nonnulla dicamus. Itaque nego principium æqualitatis inter effectum & cauſſam ſervari improbata Leibnitii & admiſſa Carteſii ſententia. Cum enim tam potentia chordæ trahentis globum per A*m* in directione libera AS eadem ſit, ac potentia chordæ trahentis per A*a* in directione neceſſaria A*a*, & tempora inſumta ſint æqualia, non video qua de cauſſa fieri poſſit, ut eadem chorda plus agere debeat, cum trahit per A*a*, quam cum trahit per A*m*; quod ſi id eſſe non poteſt, ſequitur duas potentias A*a*, A*z*, in quas potentia A*m* reſolvitur, eamdem actionem exercere, ac ſola potentia A*m*, cum funis elaſticus globum in directione libera trahit. Dices varium illum modum, quo chorda applicatur, eſſe rationem ſufficientem, cur eadem potentia varias actiones exerceat. Ut hoc effugium illi omnino præcludam, adverto hanc reſolutionem fieri non ſolum in potentiis & in viribus, quæ indeſinenter generantur, in quibus utcumque tolerabile ſit eamdem potentiam plus minuſve operari pro ratione modi, quo applicatur, verum etiam in viribus jam generatis & in corpore finita quadam velocitate in planum oblique incurrente, in quo qui fieri poteſt, ut modus, quo applicatur, augeat vim, qua percellitur, præſertim in infinitum, quemadmodum eam augeri in Carteſiano ſyſtemate jam alibi oſtendimus? §. 127.

5. Nec verum eſt, quod ille ſubjungit, locum compoſitionis vi-

virium atque reſolutionis obſcuriſſimum eſſe, & a nullo Philoſophorum dilucide fuiſſe explicatum. Quod enim attinet ad compoſitionem, quid clarius aut naturæ convenientius dici poteſt, quam id, unde §§. 198. 208. & anteced. rationem compoſitionis earumdem facillime elicuimus, vim motricem, quæ preſſionibus fluentibus tamquam rectangulum rectis lineis generari percipitur, eſſe æqualem producto ex ipſa preſſione in velocitatem, qua fluit, & in tempus, quo fluxus durat, quemadmodum rectangulum exæquat productum ex recta fluente in celeritatem fluxus, & in tempus, quo fluere pergit? Quod vero pertinet ad reſolutionem, quid magis rationi conſentaneum eſſe poteſt, ut eo modo cum planis virium corporis oblique incurrentis communicatio fiat, ex quo colligatur ſummam omnium virium, quæ in plana transferuntur, ſive in corpore oblique impingente a vi expultrice plani deſtruuntur §. 201. num. 37. eſſe æqualem vi, qua corpus a primo donabatur? Id quod in Leibnitiano ſyſtemate, eoque ſolo contingit. Ex quibus efficitur, rationes a priori, ut vocant, compoſitionis reſolutioniſque virium in Carteſiana ſententia obſcuriſſimas eſſe & a nemine adhuc explicatas, in Leibnitiana vero tam perſpicue declarari, ut in Phyſicis aliquid amplius deſiderari non poſſe videatur.

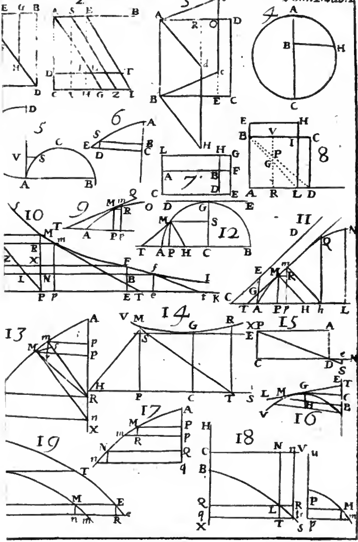
6. His unum addo rationem hanc ductam ex eo, quod corpus in aliud incurrens amittere non poteſt vim præſertim in infinitum majorem illa, qua percitum eſt, disjicere tenebras omnes, quibus Zanottus involvere conatus eſt principium æqualitatis inter cauſſam, & effectum, dum quid nomine veri effectus proxime a vi geniti ſit intelligendum explicat, propterea quod, vis, quæ deletur, in corpore, a quo decedit, extiterit neceſſe eſt.

FINIS.

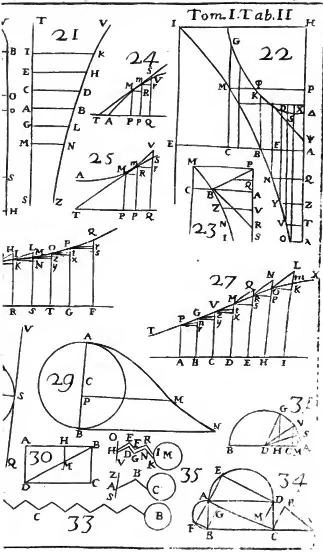
ERRATA

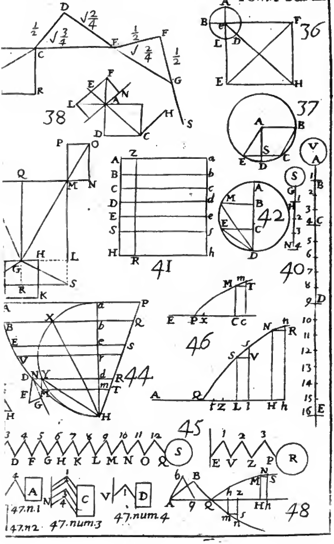
Pag.	Lin.	ERRATA	CORRIGE
37	2	quodlibuerit	quotlibuerit
48	27	quælibet	qualibet
61	17	ſuſtinere potuiſſe , quodnon viderunt id non quod ex hac	ſuſtinere non potuiſſe , quod non viderunt id quod ex hac
75	15	determinationibus	determinantibus
82	10	illarum	illorum
97	12	modo	momento
98	6	offundunt	offundant
109	34	25	21
136	28	4.3: 32	4.3: 2.2
138	5	eum	illud
141	21	ſphæram	ſphæra
147	2	nec ejus	nec ei
164	1	iedoque	ideoque
173	32	parva	parvam
175	12	§. 67. ſub finem	§. 67.
192	34	augetur	augeatur
192	35	minuitur	minuatur
199	13	$ax:(ax+2x)$	$ax:(a+2x)$
205	25	aliquid	aliquod
206	30	T M	T R
207	35	M V	M v
207	37	S m	$s\,m$
208	38	S m	$s\,m$
216	22	aliorum	aliarum
220	11	AQN = APM	AQN − APM
224	9	$\frac{3}{2}dx\frac{(4a+9x)^{1:2}}{a^{1:2}}$	$\frac{1}{2}\frac{(4a+9x)^{1:2}}{a^{1:2}}$
244	5	& ideo $=dx$	& ideo $=dx$:
250	8	rs	rS
262	10	numero a	numero. a
274	8	quot	quod
284	34	oulla eſt , cur	nulla eſt ratio , cur
288	26 27	nobis bis	nobis
306	17	conjuncta	conjunctæ
321	32	plano	pleno
322	15	alliciat.	alliciat?
325	29	generatum	generatam
330	38	corpuſculo	tempuſculo
335	24	obtutos	obtuſos
352	30	fluit	fuit
380	10	puncti ſpatiis	ſpatii punctis
381	16	DT	dT
418	5	$=dx$; V	$=dx$: V
420	20	C s	C S
424	28	CAPUT QUARTUM	*deletur*
430	27	generatur ergo	generatur : ergo
451	29	contractum	contactum
454	23	qua vis	quæ vis
465	28	poſſunt	poſſum
475	15	infitæ e	infitæ a
534	37	hanc	hunc
535	15	ſecuodi	primi
536	39	ut a	ut ex
538	13	parallepidum	parallepipedum
542	19	latinam	latinum
559	12	quæ ad	quæ ab

Digitized by Google


2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19

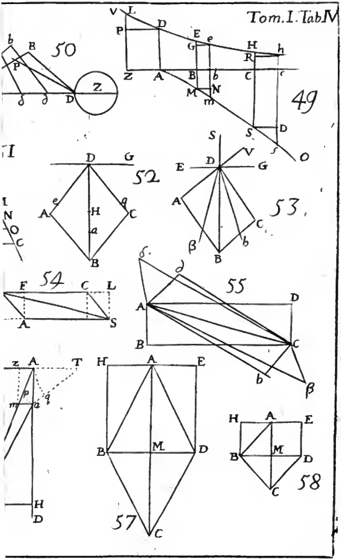



Tom. I. Tab. II
21
22
23
24
25
27
29
30
33
34
35



Digitized by Google

Tom. I. Tab IV.



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

005663392

Digitized by Google

Digitized by Google